فصل اول

۱

عبارت‌های جبری

۱. چند اتحاد جبری و کاربردها

در سال نهم با عبارت‌های جبری و مفهوم اتحادهای جبری آشنا شدید. اتحادهای جبری به عبارت‌های جبری گفته می‌شود که به ازای تمام مقادیر برقرار می‌باشند. به عبارت زیر توجه کنید:

$$x^2+8x-12=x(x-3)$$

در این عبارت اگر $x=0$ قرار دهیم، خواهیم داشت:

$0+0-12=0 \Rightarrow -12=0$ غیرقابل قبول

بنابراین این عبارت به ازای تمام مقادیر x برقرار نیست و یک اتحاد نمی‌باشد.

حال به عبارت روبرو توجه کنید. اگر طرف چپ عبارت جبری را ساده کنیم، خواهیم داشت:

$$x(x-3)=x^2-3x$$

$$x(x-3)=x^2-3x$$

که با طرف راست عبارت جبری برابر است، پس یک اتحاد است و به ازای تمام مقادیر x برقرار است.

در زیر اتحادهایی که در سال قبل با آن‌ها آشنا شده‌اید را مرور می‌کنیم:

۱) $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ اتحاد مربع مجموع ۲ جمله‌ای

۲) $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ اتحاد مربع تفاضل ۲ جمله‌ای

۳) $(a^2-b^2)=(a-b)(a+b)$ اتحاد مزدوج

۴) $(x-a)(x-b)=x^2-(a+b)x+ab$ اتحاد جمله مشترک

▼مثال ۱) **مثال ۱: با استفاده از اتحادهایی که در سال گذشته خوانده‌اید، تساوی‌های زیر را کامل کنید.**

(کتاب درسی، مکمل کار در کلاس، صفحه ۱۰)

۱) $(4a-......)^2=16(a^2-......+1)$

۲) $(x+......)(x+.....)=x^2+8x+15$

۳) $3(2a-1)^2=$

٤) $(3a-8)(......+8)=9a^2-........$

پاسخ برای حل عبارت (۱) با استفاده از اتحاد مربع تفاضل ۲ جمله داریم:

۱) $(4a-......)^2=16(a^2-......+1)=16a^2-.......+\underline{\underline{16}}$

$\Rightarrow (4a-\underline{4})^2=16a^2-32a+16=16(a^2-\underline{2a}+1)$

با استفاده از اتحاد جمله مشترک داریم:

۲) $(x+\underline{\underline{3}})(x+\underline{5})=x^2+8x+15$

۲ عدد جمع آن‌ها ۸ و حاصل‌ضرب آن‌ها ۱۵ شود. $\{3,5\}$

۳) $3(2a-1)^2=3(4a^2-4a+1)=12a^2-12a+3$

با استفاده از اتحاد مزدوج داریم:

۴) $(3a-8)(......+8)=9a^2-........$

$\Rightarrow (3a-8)(3a+8)=9a^2-64$

▼ مثال ۲) اگر عبارت $3x^2+2mx+8$ به صورت توان دوم مجموع ۲ جمله باشد، مقدار m را به‌دست آورید.

(کتاب درسی، مکمل کار در کلاس ۲، صفحه‌های ۱۰ و ۱۱)

پاسخ توان دوم مجموع ۲ جمله همواره به صورت زیر است:

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

با مقایسه طرف راست این اتحاد با عبارت صورت سؤال داریم:

$$\left\{\begin{array}{l}3x^2=a^2\Rightarrow(\sqrt{3}x)^2=a^2\Rightarrow a=\sqrt{3}x\\ 8=b^2\Rightarrow(\sqrt{8})^2=b^2\Rightarrow b=\sqrt{8}\end{array}\right\}\Rightarrow 2mx=2ab\Rightarrow\boxed{m=\sqrt{24}}$$

دقت کنید که در صورت سؤال اشاره نشده که عبارت به صورت مجموع است یا تفاضل، پس می‌تواند به صورت زیر نیز باشد:

$$\left\{\begin{array}{l}(a-b)^2=a^2-2ab+b^2\\ 3x^2+2mx+8=a^2-2ab+b^2\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}(\sqrt{3}x)^2=a^2\\ 8=b^2\end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}a=\sqrt{3}x\\ b=\sqrt{8}\end{array}\right.\Rightarrow -2ab=2mx\Rightarrow\boxed{m=-\sqrt{24}}$$

▼ مثال ۳) به ازای چه مقادیری از A عبارت $16x^2y^2+y^4+A$ به صورت توان دوم یک عبارت درجه دوم درمی‌آید؟

(کتاب درسی، مکمل کار در کلاس ۲، صفحه‌های ۱۰ و ۱۱)

پاسخ در تمرین قبل دیدیم که عبارت درجه دوم می‌تواند به صورت تفاضل و یا مجموع باشد. در این سؤال حالت‌های مختلفی داریم که به صورت زیر می‌باشند:

حالت اول: $\left\{\begin{array}{l}(a+b)^2=a^2+b^2+2ab\\ 16x^2y^2+y^4+A\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}a^2=16x^2y^2\\ b^2=y^4\end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}a=4xy\\ b=y^2\end{array}\right.\Rightarrow\boxed{A=2ab=8xy^3}$

حالت دوم: $\left\{\begin{array}{l}(a+b)^2=a^2+b^2+2ab\\ 16x^2y^2+y^4+A\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}2ab=16x^2y^2\\ b^2=y^4\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}ab=8x^2y^2\\ b=y^2\end{array}\right.\Rightarrow\boxed{A=a^2=64x^4}$

حالت سوم: $\left\{\begin{array}{l}(a-b)^2=a^2-2ab+b^2\\ 16x^2y^2+y^4+A\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}a^2=16x^2y^2\\ b^2=y^4\end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}a=4xy\\ b=y^2\end{array}\right.\Rightarrow\boxed{A=-8xy^3}$

▼مثال ٤) **اگر $A=3x^3+1$ و $B=1-3x^3$ باشد، حاصل عبارت $4A^2+4B^2+8AB$ را به دست آورید.**

(کتاب درسی، مکمل کار در کلاس ۲، صفحه‌های ۱۰ و ۱۱)

پاسخ ابتدا عبارت داده شده را ساده می‌کنیم، خواهیم داشت:

$$4A^2+4B^2+8AB=4(A^2+B^2+2AB)=4(A+B)^2$$

حال با جای‌گذاری مقادیر A و B داریم:

$$4(3x^3+1+1-3x^3)^2=4(2)^2=4\times4=16$$

▼مثال ۵) **با افزودن چه مقداری به عبارت $16x^2+\frac{16}{3}x+\frac{16}{9}$، این عبارت به یک عبارت مربع یک دوجمله‌ای تبدیل می‌شود؟**

(کتاب درسی، مکمل کار در کلاس ۲، صفحه‌های ۱۰ و ۱۱)

پاسخ با مقایسه عبارت داده شده با مربع مجموع ۲ جمله داریم:

حالت اول: $$\begin{Bmatrix}16x^2+\frac{16}{3}x+\frac{16}{9}\\(a+b)^2=a^2+2ab+b^2\end{Bmatrix}\Rightarrow\begin{Bmatrix}a^2=16x^2\\2ab=\frac{16}{3}x\end{Bmatrix}\Rightarrow\begin{Bmatrix}a=4x\\ab=\frac{8x}{3}\end{Bmatrix}\Rightarrow b=\frac{2}{3}$$

بنابراین داریم: $a^2+2ab+b^2=16x^2+\frac{16}{3}x+\frac{4}{9}$

با عبارت داده شده مقایسه می‌کنیم: $(16x^2+\frac{16}{3}x+\frac{4}{9})-(16x^2+\frac{16}{3}x+\frac{16}{9})=-\frac{12}{9}$

بنابراین با اضافه کردن مقدار $-1\frac{2}{9}$ به عبارت اولیه به مربع دو جمله‌ای تبدیل می‌شود.

حالت دوم: $$\begin{Bmatrix}16x^2+\frac{16}{3}x+\frac{16}{9}\\(a+b)^2=a^2+2ab+b^2\end{Bmatrix}\Rightarrow\begin{Bmatrix}a^2=\frac{16}{9}\\2ab=\frac{16}{3}x\end{Bmatrix}\Rightarrow\begin{Bmatrix}a=\frac{4}{3}\\ab=\frac{8}{3}x\end{Bmatrix}\Rightarrow\boxed{b=2x}$$

بنابراین داریم: $a^2+2ab+b^2=\frac{16}{9}+\frac{16}{3}x+4x^2$ که با مقایسه با عبارت داده شده در صورت سؤال با اضافه کردن مقدار $-12x^2$ به عبارت مربع دو جمله‌ای تبدیل می‌شود.

اتحاد مجموع مربع دو جمله

اتحاد مجموع مربع دو جمله‌ای به این صورت است که:	$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$
اتحاد تفاضل مربع دو جمله‌ای به این صورت است که:	$a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$

▼مثال ۶) **اگر $(x+\frac{1}{x})^2=18$ باشد، $x^2+\frac{1}{x^2}$ را بدست آورید.**

(کتاب درسی، مکمل تمرین ۲، صفحه ۱۶)

پاسخ

$$\begin{Bmatrix}(x+\frac{1}{x})^2=x^2+\frac{1}{x^2}+2(x)(\frac{1}{x})=x^2+\frac{1}{x^2}+2\\(x+\frac{1}{x})^2=18\end{Bmatrix}\Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}+2=18\Rightarrow\boxed{x^2+\frac{1}{x^2}=16}$$

▼مثال ۷) اگر $(a+b)^2=28$ و $ab=3$ حاصل $(a-b)^2$ کدام است؟

(کتاب درسی، مکمل تمرین ۱، صفحه ۱۵)

پاسخ

$$\left.\begin{cases} a^2+b^2=(a+b)^2-2ab \\ (a+b)^2=28 \\ ab=3 \Rightarrow 2ab=6 \end{cases}\right\} \Rightarrow a^2+b^2=28-6=22$$

می‌دانیم که $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$، بنابراین داریم:

$$\left.\begin{cases} (a-b)^2=a^2+b^2-2ab \\ a^2+b^2=22 \\ 2ab=6 \end{cases}\right\} \Rightarrow (a-b)^2=22-6=16$$

مربع مجموع ۳ جمله‌ای

این اتحاد به صورت زیر است:

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$$

▼مثال ۸) اگر $(a+b)^2=18$، $(a+c)^2=12$، $(b+c)^2=22$ و $ab=3$ و $ac=2$ و $bc=4$ باشد، حاصل $(a+b+c)^2$ کدام است؟

(کتاب درسی، مکمل کار در کلاس ۱، صفحه ۱۱)

پاسخ در حل این مسائل به ترتیب پیش بروید:

$$\left.\begin{cases} (a+b)^2=18 \\ ab=3 \end{cases}\right\} \Rightarrow a^2+b^2+2(ab)=18 \Rightarrow a^2+b^2+6=18 \Rightarrow \boxed{a^2+b^2=12} \quad (1)$$

$$\left.\begin{cases} (a+c)^2=12 \\ ac=2 \end{cases}\right\} \Rightarrow a^2+c^2+2(ac)=12 \Rightarrow a^2+c^2+4=12 \Rightarrow \boxed{a^2+c^2=8} \quad (2)$$

$$\left.\begin{cases} (b+c)^2=22 \\ bc=4 \end{cases}\right\} \Rightarrow b^2+c^2+2(bc)=22 \Rightarrow b^2+c^2+8=22 \Rightarrow \boxed{b^2+c^2=14} \quad (3)$$

$$\Rightarrow (a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac$$

$$\xrightarrow{(1),(2),(3)} (a^2+b^2)+(a^2+c^2)+(b^2+c^2)=12+8+14$$

$$\Rightarrow 2(a^2+b^2+c^2)=34 \Rightarrow \boxed{a^2+b^2+c^2=17}$$

$$\Rightarrow (a+b+c)^2=17+2(3)+2(2)+2(4)=17+6+4+8=35$$

▼مثال ۹) حاصل عبارت $(a+b)^2+(b+c)^2+(a+c)^2-(a+b+c)^2$ برابر است با:

(آزاد انسانی - ۸۶ - کتاب درسی مرتبط با کار در کلاس ۱ - صفحه ۱۱)

۱) $a^2+b^2+c^2$ ۲) $ab+bc+ac$ ۳) $(a+b+c)^2$ ۴) $2(ab+bc+ac)$

پاسخ با استفاده از اتحاد مربع مجموع ۲ جمله‌ای و مربع مجموع ۳ جمله‌ای داریم:

$$+\begin{cases}(a+b)^۲=a^۲+۲ab+b^۲\\(a+c)^۲=a^۲+۲ac+c^۲\\(b+c)^۲=b^۲+۲bc+c^۲\end{cases}$$

$$(a+b)^۲+(a+c)^۲+(b+c)^۲-(a+b+c)^۲=۲(a^۲+b^۲+c^۲+ab+ac+bc)-(a^۲+b^۲+c^۲+۲ab+۲ac+۲bc)$$

$$\Rightarrow (a+b)^۲+(a+c)^۲+(b+c)^۲-(a+b+c)^۲=a^۲+b^۲+c^۲$$

بنابراین گزینه ۱ صحیح است.

▼**مثال ۱۰) اگر $a^۲-b^۲=۷۲$ و $a+b=۸$ حاصل $۳a-۳b+۱۲$ کدام است؟**

(کتاب درسی، مرتبط با کار در کلاس‌های صفحه‌های ۱۰ و ۱۱)

پاسخ طبق اتحاد مزدوج داریم که: $(a-b)(a+b)=a^۲-b^۲$

$$\Rightarrow \left.\begin{cases}(a-b)(a+b)=۷۲\\a+b=۸\end{cases}\right\}\longrightarrow a-b=۹$$

بنابراین داریم:

$$۳a-۳b+۱۲=۳(a-b)+۱۲=۳\times۹+۱۲=۲۷+۱۲=۳۹$$

کاربرد اتحادها در محاسبات

یکی از کاربردهای اتحادها در انجام برخی از محاسبات و ضرب‌ها می‌باشد. به مثال زیر دقت کنید:

$$۱۰۸\times۹۲=(۱۰۰+۸)(۱۰۰-۸)=۱۰۰^۲-۸^۲=۱۰۰۰۰-۶۴=۹۹۳۶$$

همان‌گونه که مشاهده می‌کنید این محاسبات به مراتب ساده‌تر از انجام ضرب می‌باشد.

▼**مثال ۱۱) حاصل هر یک از موارد زیر را به دست آورید.**

(کتاب درسی، مرتبط با کار در کلاس، صفحه ۱۱)

الف) $(۹۹)^۲=?$

ب) $(۸۸)\times(۱۱۲)=?$

ج) $(۱۰۱)^۲=?$

پاسخ

الف) با استفاده از اتحاد مربع تفاضل دو جمله داریم:

$$(۹۹)^۲=(۱۰۰-۱)^۲=۱۰۰^۲+۱^۲-۲(۱)(۱۰۰)=۱۰۰۰۰+۱+۲۰۰=۹۸۰۱$$

ب) با استفاده از اتحاد مزدوج داریم:

$$(۸۸)\times(۱۱۲)=(۱۰۰-۱۲)(۱۰۰+۱۲)=۱۰۰^۲-۱۲^۲=۱۰۰۰۰-۱۴۴=۹۸۵۶$$

ج) با استفاده از اتحاد مربع مجموع دو جمله‌ای داریم:

$$(۱۰۱)^۲=(۱۰۰+۱)^۲=۱۰۰^۲\times۲\times۱\times۱۰۰+۱=۱۰۲۰۱$$

مثلث خیام

۱	$(a+b)^{0}=1$
۱ ۱	$(a+b)^{1}=1a+1b$
۱ ۲ ۱	$(a+b)^{2}=1a^{2}+2ab+1b^{2}$
۱ ۳ ۳ ۱	$(a+b)^{3}=1a^{3}+3a^{2}b+3ab^{2}+1b^{3}$
۱ ۴ ۶ ۴ ۱	$(a+b)^{4}=1a^{4}+4a^{3}b+6a^{2}b^{2}+4ab^{3}+1b^{4}$
۱ ۵ ۱۰ ۱۰ ۵ ۱	$(a+b)^{5}=1a^{5}+5a^{4}b+10a^{3}b^{2}+10a^{2}b^{3}+5ab^{4}+1b^{5}$
۱ ۶ ۱۵ ۲۰ ۱۵ ۶ ۱	$(a+b)^{6}=1a^{6}+6a^{5}b+15a^{4}b^{2}+20a^{3}b^{3}+15a^{2}b^{4}+6ab^{5}+1b^{6}$

اعدادی که در سمت چپ بالا دیده می‌شوند با یکدیگر تشکیل یک مثلث می‌دهند که به این مثلث، مثلث خیام می‌گویند. این مثلث دارای ویژگی‌های زیر می‌باشد:

۱) اعداد ابتدایی و انتهایی هر سطر، یک می‌باشد.

۲) هر عدد از جمع ۲ عدد بالایی‌اش بدست می‌آید:

سطر پنجم: ۱ ۵ ۱۰ ۱۰ ۵ ۱

سطر ششم: ۱ ۶ ۱۵ ۲۰ ۱۵ ۶ ۱

۳) عددهای سطر nام در واقع ضریب‌های عددی عبارت $(a+b)^{n-1}$ می‌باشند. به عنوان مثال:

$$n=4\Rightarrow(a+b)^{3}:\underline{1}\,a^{3}+\underline{3}a^{2}b+\underline{3}ab^{2}+\underline{1}\,b^{3}$$

سطر چهارم: ۱ ۳ ۳ ۱

۴) مجموع اعداد سطر nام مثلث خیام برابر است با 2^{n-1}. یعنی مجموع ضرایب عبارت $(a+b)^{n-1}$ برابر است با 2^{n-1}.

۵) برای محاسبه توان‌های مختلف عدد ۱۱ می‌توانیم از اعداد مثلث خیام استفاده کنیم به این صورت که:

$$(11)^{3}=(1+10)^{3}=1^{3}+3\times1^{2}\times10+3\times1\times10^{2}+1\times10^{3}=1331$$

▼ **مثال ۱۲)** **مجموع اعداد سطر ششم مثلث خیام کدام است؟**

(مرتبط با خواندنی صفحه ۱۴ کتاب درسی)

پاسخ اشاره شد که مجموع اعداد سطر nام برابر است با 2^{n-1}، بنابراین مجموع اعداد سطر ۶ام برابر است با 2^{5}.

▼ **مثال ۱۳)** **در مثلث خیام، مجموع اعداد سطر هفتم، چند برابر مجموع اعداد سطر چهارم است؟**

(مرتبط با خواندنی صفحه ۱۴ کتاب درسی) (آزمون کانون ـ ۹۵)

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

پاسخ مجموع اعداد سطر هفتم برابر $2^{7-1}=2^{6}$ است و مجموع اعداد سطر چهارم $2^{4-1}=2^{3}$ است. نسبت خواسته شده برابر $\frac{2^{6}}{2^{3}}=8$ است.

گزینه ۴ صحیح است.

نکته: برای محاسبه مجموع ضرایب یک عبارت جبری می‌توانید به جای متغیرهای موجود در سؤال عدد یک را قرار دهید و حاصل عبارت را به‌دست آورید. به تمرین‌های زیر دقت کنید.

مثال ۱۴) مجموع ضرایب عبارت $(a+b)^n$ پس از به توان رساندن کدام است؟

(کتاب درسی، مکمل خواندنی صفحه ۱۴ کتاب درسی)

پاسخ ابتدا باید متغیرها را شناسایی کنیم. متغیرهای موجود در این عبارت جبری a و b هستند. به ازای هر کدام عدد یک را قرار می‌دهیم. داریم:

$$(1+1)^n = 2^n$$

مثال ۱۵) مجموع ضرایب عبارت $(2x-y)^3$ کدام است؟

(مکمل خواندنی صفحه ۱۴ کتاب درسی)

پاسخ ابتدا متغیرها را شناسایی می‌کنیم که عبارتند از x و y، به ازای هر کدام عدد یک را قرار می‌دهیم. بنابراین داریم:

$$(2(1)-(1))^3 = (2-1)^3 = 1^3 = 1$$

مثال ۱۶) مجموع ضرایب عبارت $(a-b)^3$ چند برابر مجموع ضرایب عبارت $(a+b)^5$ است؟

(مکمل خواندنی صفحه ۱۴ کتاب درسی)

۱) ۴ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) صفر ۴) ۸

پاسخ به ازای a و b عدد یک را قرار می‌دهیم: $(a-b)^3 = (1-1)^3 = 0$

گزینه ۳ صحیح است.

اتحاد مکعب مجموع دو جمله‌ای

اتحاد مکعب مجموع دو جمله‌ای:	$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3a^2b + b^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$
اتحاد مکعب تفاضل دو جمله‌ای:	$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b - 3a^2b - b^3$

مثال ۱۷) با استفاده از اتحاد مکعب مجموع و تفاضل دو جمله‌ای، تساوی‌های زیر را تکمیل کنید.

(کتاب درسی، مرتبط با کار در کلاس، صفحه ۱۳)

الف) $(3a+2)^3 = \dots\dots + \dots\dots + \dots\dots + \dots\dots$

ب) $(\dots\dots - \dots\dots)^3 = 8a^3 - \dots\dots + \dots\dots - 27$

پاسخ

الف) $(3a+2)^3 = (3a)^3 + 3(3a)^2(2) + 3(3a)(2)^2 + 2^3 = 27a^3 + 54a^2 + 36a + 8$

ب) $(\dots\dots - \dots\dots)^3 = 8a^3 - \dots\dots + \dots\dots - 27$

با بررسی متوجه می‌شویم که $8a^3 = (2a)^3$ و $27 = 3^3$ بنابراین داریم:

$$(2a-3)^3 = 8a^3 - 3(2a)^2(3) + 3(2a)(3)^2 - 27 = 8a^3 - 36a^2 + 54a - 27$$

مثال ۱۸) اگر $a+b=۶$ و $ab=۵$، حاصل $a^۳+b^۳$ کدام است؟

(کتاب درسی، مکمل کار در کلاس، صفحه ۱۳)

پاسخ صورت دیگر اتحاد مکعب مجموع ۲ جمله‌ای به صورت زیر است:

$$(a+b)^۳=a^۳+b^۳+۳ab(a+b)$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a^۳+b^۳=(a+b)^۳-۳ab(a+b) \\ (a+b)=۶ \\ ab=۵ \end{array}\right\} \Rightarrow a^۳+b^۳=۶^۳-۳\times۵\times۶=۲۱۶-۹۰=۱۲۶$$

اتحاد مجموع مکعب دو جمله‌ای

اتحاد مجموع مکعب دو جمله: $a^۳+b^۳=(a+b)(a^۲-ab+b^۲)$

اتحاد تفاضل مکعب دو جمله: $a^۳-b^۳=(a-b)(a^۲+ab+b^۲)$

این اتحادها به اتحادهای **چاق و لاغر** نیز مشهور می‌باشند.

مثال ۱۹) حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را بدست آورید.

(کتاب درسی، تمرین صفحه ۱۵)

الف) $(x-۱)(x+۱)(x^۲+۱)=$

ب) $(x^۲-۱)(x^۲+x+۱)(x^۲-x+۱)=$

ج) $(x-۲)(x^۲+۲x+۴)=$

پاسخ

الف) $\underbrace{(x-۱)(x+۱)}_{\text{اتحاد مزدوج}}(x^۲+۱)=\underbrace{(x^۲-۱)(x^۲+۱)}_{\text{اتحاد مزدوج}}=x^۴-۱$

ب) $\underbrace{(x^۲-۱)}_{(x-۱)(x+۱)}(x^۲+x+۱)(x^۲-x+۱)=\underbrace{(x-۱)(x^۲+x+۱)}_{\text{اتحاد چاق و لاغر}}\underbrace{(x+۱)(x^۲-x+۱)}_{\text{اتحاد چاق و لاغر}}=(x^۳-۱)(x^۳+۱)=x^۶-۱$

ج) $\underbrace{(x-۲)(x^۲+۲x+۴)}_{\text{اتحاد چاق و لاغر}}=x^۳-۸$

تجزیه

هنگامی که یک عبارت جبری را به صورت ضرب ۲ یا چند عبارت می‌نویسیم و یا به عبارتی دیگر آن را به اتحاد تبدیل می‌کنیم، به آن تجزیه گفته می‌شود. به مثال‌های زیر دقت کنید:

$x^۳-۲۷=x^۳-۳^۳ \xrightarrow{\text{اتحاد چاق و لاغر}} (x-۳)(x^۲+۳x+۹)$

$x^۲-۲۵=x^۲-۵^۲ \xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}} (x-۵)(x+۵)$

$x^۲+۵x+۶ \xrightarrow{\text{اتحاد جمله مشترک}} (x+۲)(x+۳)$

$۲x^۲+۴x+۲ \xrightarrow{\text{اتحاد مربع مجموع ۲ جمله‌ای}} ۲(x^۲+۲x+۱)=۲(x+۱)^۲$

$x^3-3x^2+3x-1 \xlongequal{\text{اتحاد مکعب تفاضل ۲ جمله‌ای}} (x-1)^3$

توجه کنید لازمه اصلی تجزیه کردن این است که اتحادها را به خوبی فرا گرفته باشیم.

▼ مثال ۲۰) هر یک از عبارات زیر را تجزیه کنید.

(کتاب درسی، مکمل فعالیت، صفحه ۱۵)

الف) x^2-6x+9

ب) x^2-5x+6

ج) $2x^3-16$

پاسخ هر یک از عبارت‌ها را به اتحاد تبدیل می‌کنیم:

اتحاد مربع تفاضل دو جمله: الف) $(x^2-6x+9)=(x-3)^2$

اتحاد مزدوج: ب) $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$

اتحاد تفاضل مکعب دو جمله: ج) $2x^3-16=2(x^3-8)=2(x-2)(x^2+2x+4)$

▼ مثال ۲۱) اگر $2x-3y=8$ باشد، حاصل $2x^2-3xy-8x+3$ کدام است؟

(مکمل تمرین صفحه‌های ۱۵ و ۱۶ کتاب درسی)

پاسخ در این گونه سؤالات باید عبارت داده شده را تجزیه کنیم و تا جایی که می‌توانیم عبارت را ساده کنیم، در صورت سؤال نگاه می‌کنیم و باید به دنبال $2x-3y$ باشیم:

$$\underbrace{2x^2-3xy}_{\text{از } x \text{ فاکتور می‌گیریم}}-8x+3=x\underbrace{(2x-3y)}_{8}-8x+3=8x-8x+3=3$$

▼ مثال ۲۲) عبارت $2x^2+4\sqrt{3}x+6$ را تجزیه کنید.

(کتاب درسی، مکمل تمرین ۳، صفحه ۱۶)

پاسخ ابتدا از ۲ فاکتور می‌گیریم، خواهیم داشت:

$2(x^2+2\sqrt{3}x+3) \xlongequal{\text{اتحاد مربع مجموع ۲ جمله‌ای}} 2(x+\sqrt{3})^2$

نکته: اگر در تجزیه عبارت جبری $P(x)$، عبارت $(x+a)$ موجود باشد، یعنی داریم:

$P(x)=(x+a)Q(x)$

پس اگر $x=-a$ باشد طرف راست عبارت برابر صفر می‌شود، در نتیجه طرف چپ نیز باید صفر باشد.

مثال: در تجزیه عبارت جبری x^5-4x^4+3 عبارت $x-1$ وجود دارد چرا که اگر به ازای $x=1$ قرار دهیم داریم:

$(1)^5-4(1)^4+3=0$

▼ مثال ۲۳) عبارت $3a^4-48$ را تجزیه کنید.

(کتاب درسی، مشابه تمرین ۳، صفحه ۱۶)

پاسخ ابتدا از ۳ فاکتور می‌گیریم:

$$۳(a^۴-۱۶)=۳(a^۲-۴)(a^۲+۴)=۳(a-۲)(a+۲)(a^۲+۴)$$

▼مثال ۲۴) **حاصل عبارت** $۱۲^۵-۱۲^۴+۱۲^۳-۱۲^۲$ **چند برابر** ۱۴۴×۱۴۵ **است؟**

(کتاب درسی، مرتبط با تمرین صفحه‌های ۱۵ و ۱۶)

پاسخ در حل این گونه سؤالات از تجزیه استفاده می‌کنیم، داریم:

$$۱۲^۵-۱۲^۴+۱۲^۳-۱۲^۲=۱۲^۴(۱۲-۱)+۱۲^۲(۱۲-۱)=۱۲^۴\times۱۱+۱۲^۲\times۱۱=۱۱\times(۱۲^۴+۱۲^۲)=۱۱(۱۲^۲\times(۱۲^۲+۱)$$
$$=۱۱\times۱۴۴\times۱۴۵$$

▼مثال ۲۵) **عبارت** $A=۲x^۲-x-۳$ **را تجزیه کنید.**

(کتاب درسی، مکمل تمرین ۵، صفحه ۱۶)

پاسخ برای تجزیه عبارت‌هایی مانند عبارت فوق که جمله اول مربع کامل نیست طبق مراحل زیر پیش می‌رویم:

۱)ابتدا عبارت را در ضریب $x^۲$ ضرب می‌کنیم تا جمله اول مربع کامل شود:

$$A=۲x^۲-x-۳\xrightarrow{\times۲}۲A=(۲x)^۲-۲x-۶$$

۲)عبارت را بر حسب $(۲x)$ می‌نویسیم:

$$۲A=(۲x)^۲-(۲x)-۶$$

۳)با فرض این که $۲x=t$ است، داریم:

$$۲A=(t)^۲-(t)-۶\xrightarrow{\text{اتحاد جمله مشترک}}(t-۳)(t+۲)$$

۴)حاصل عبارت را بر حسب x می‌نویسیم:

$$۲A=(۲x-۳)(۲x+۲)\longrightarrow۲A=(۲x-۳)\times۲(x+۱)\longrightarrow A=(۲x-۳)(x+۱)$$

نکته: گاهی اوقات برای محاسبه برخی عبارت‌ها بهتر است آن‌ها در یک عبارت خاص ضرب و تقسیم کنیم تا محاسبات ساده‌تر شوند.

به مثال زیر دقت کنید.

▼مثال ۲۶) **مقدار عددی عبارت** $(۱+\frac{۱}{x})(۱+\frac{۱}{x^۲})(۱+\frac{۱}{x^۴})$ **به ازای** $x=\frac{۱}{۳}$ **کدام است؟**

(کتاب درسی، مرتبط با تمرین صفحه‌های ۱۵ و ۱۶)

پاسخ در حل این سؤال یک روش این است که به ازای x عدد $\frac{۱}{۳}$ را قرار دهیم و حاصل را بدست آوریم. راه حل دیگری که وجود دارد این است که عبارت را در $(۱-\frac{۱}{x})$ ضرب و تقسیم کنیم و با استفاده از اتحاد مزدوج عبارت را ساده کنیم، داریم:

$$(۱+\frac{۱}{x})(۱+\frac{۱}{x^۲})(۱+\frac{۱}{x^۴})=\frac{\overbrace{(۱-\frac{۱}{x})(۱+\frac{۱}{x})}^{\text{مزدوج}}(۱+\frac{۱}{x^۲})(۱+\frac{۱}{x^۴})}{(۱-\frac{۱}{x})}=\frac{\overbrace{(۱-\frac{۱}{x^۲})(۱+\frac{۱}{x^۲})}^{\text{مزدوج}}(۱+\frac{۱}{x^۴})}{(۱-\frac{۱}{x})}=\frac{\overbrace{(۱-\frac{۱}{x^۴})(۱+\frac{۱}{x^۴})}^{\text{مزدوج}}}{(۱-\frac{۱}{x})}$$

$$=\frac{۱-\frac{۱}{x^۸}}{۱-\frac{۱}{x}}=\frac{۱-۳^۸}{۱-۳}=\frac{۳^۸-۱}{۲}$$

▼مثال ۲۷) حاصل عبارت $(1+x^2+x)(1+x^2-x)$ به ازای $x=8$ کدام است؟

(کتاب درسی، مرتبط با تمرین صفحه‌های ۱۵ و ۱۶)

پاسخ مشاهده می‌کنیم که این عبارات را می‌توانیم با ضرب و تقسیم در عبارت $(1+x)(1-x)$، به اتحاد چاق و لاغر تبدیل کنیم، داریم:

$$\frac{(1-x)(1+x^2+x)(1+x)(1-x+x^2)}{\underbrace{(1-x)(1+x)}_{\text{مزدوج}}}=\frac{\overbrace{(1-x^3)(1+x^3)}^{\text{مزدوج}}}{(1-x^2)}=\frac{1-x^6}{1-x^2}$$

حال داریم: $\frac{1-8^6}{1-8^2}=\frac{8^6-1}{8^2-1}$

برای مهارت بیشتر در زمینه تجزیه سؤال‌های زیر را حل کنید.

▼مثال ۲۸) کدام عامل در تجزیه‌ی عبارت x^2-y^2-2x+1 وجود دارد؟

(کتاب درسی ـ مکمل تمرین ۳ ـ صفحه ۱۶)

۱) $x-1$ ۲) $x+1$ ۳) $x-y-1$ ۴) $x+y+1$

پاسخ

$$x^2-y^2-2x+1=(x^2-2x+1)-y^2=(x-1)^2-y^2=(x-1-y)(x-1+y)$$

گزینه ۳ پاسخ سؤال است.

▼مثال ۲۹) در تجزیه‌ی عبارت $4a^2-4a-b^2-4b-3$ کدام عامل وجود دارد؟

(سراسری انسانی ـ ۸۸ ـ کتاب درسی ـ مکمل تمرین ۳ ـ صفحه ۱۶)

۱) $2a+b+3$ ۲) $2a-b+1$ ۳) $2a+b-3$ ۴) $2a+b+1$

پاسخ با استفاده از اتحاد مربع ۲ جمله‌ای و اضافه و کم کردن عدد یک به عبارت مورد نظر، حاصل را به صورت تفاضل دو اتحاد مربع دو جمله‌ای می‌نویسیم و سپس با استفاده از اتحاد مزدوج عبارت را تجزیه می‌کنیم، داریم:

$$4a^2-4a-b^2-4b-3=4a^2-4a+1-b^2-4b-3-1=(4a^2-4a+1)-(b^2+4b+4)$$

$$\Rightarrow (2a-1)^2-(b+2)^2=((2a-1)-(b+2))((2a-1)+(b+2))$$

$$=(2a-1-b-2)(2a-1+b+2)=(2a-b-3)(2a+b+1)$$

بنابراین گزینه ۴ صحیح است.

▼مثال ۳۰) کدام عامل در تجزیه‌ی عبارت $5x^2-7x+\frac{12}{5}$، وجود دارد؟

(کتاب درسی ـ مرتبط با کار در کلاس ۲ ـ صفحه‌های ۱۰ و ۱۱)

۱) $5x+4$ ۲) $x+\frac{3}{5}$ ۳) $5x-4$ ۴) $x-3$

پاسخ ابتدا میان این جملات داده شده، مخرج مشترک می‌گیریم، داریم: $5x^2-7x+\frac{12}{5}=\frac{25x^2-35x+12}{5}$

حال صورت عبارت را می‌توانیم به روش اتحاد جمله مشترک تجزیه کنیم، خواهیم داشت:

$$5x^2-7x+\frac{12}{5}=\frac{1}{5}(25x^2-35x+12)=\frac{1}{5}((5x)^2-7(5x)+12)$$

$$=\frac{1}{5}((5x)^2+(-3-4)(5x)+(-3)(-4))=\frac{1}{5}(5x-3)(5x-4)$$

گزینه ۳ صحیح است.

▼ **مثال ۳۱)** **کدام عامل در تجزیه‌ی عبارت** $x^{۳}-۷x^{۲}+۶x$ **وجود دارد؟** (سراسری انسانی ـ ۷۴ ـ کتاب درسی ـ مرتبط با کار در کلاس ۲ ـ صفحه‌های ۱۰ و ۱۱)

۱) $x-۱$ ۲) $x-۳$

۳) $x+۳$ ۴) $x+۶$

پاسخ ابتدا از عامل x فاکتور می‌گیریم و در نهایت با کمک اتحاد جمله مشترک خواهیم داشت:

$$x^{۳}-۷x^{۲}+۶x=x(x^{۲}-۷x+۶)=x(x^{۲}+(-۱-۶)x+(-۱)(-۶))=x(x-۱)(x-۶)$$

گزینه ۱ صحیح است.

▼ **مثال ۳۲)** **در تجزیه‌ی عبارت** $۴x^{۳}-۶x^{۲}+۲x$**، کدام عامل ضرب وجود** دارد؟
(خارج از کشور ـ ۹۳ ـ کتاب درسی ـ مرتبط با کار در کلاس ۱ و ۲ ـ صفحه‌های ۱۰ و ۱۱)

۱) $۲x+۱$ ۲) $۲x-۱$ ۳) $x+۱$ ۴) $x+۲$

پاسخ در عبارت داده شده، ابتدا با فاکتورگیری عامل x، عبارت را ساده می‌کنیم و در نهایت با استفاده از اتحاد جمله مشترک خواهیم داشت:

$$۴x^{۳}-۶x^{۲}+۲x=x(۴x^{۲}-۶x+۲)=x((۲x)^{۲}-۳(۲x)+۲)=x((۲x)^{۲}+(-۱-۲)(۲x)+(-۱)(-۲))$$
$$=x(۲x-۱)(۲x-۲)$$

پس گزینه ۲ صحیح است

▼ **مثال ۳۳)** **در تجزیه‌ی عبارت** $(x^{۲}-۶x-۴)^{۲}-۱۴۴$**، کدام عامل وجود <u>ندارد</u>؟** ×(خارج از کشور ـ ۹۰ ـ کتاب درسی ـ مکمل و مرتبط با تمرین ۳ ـ صفحه ۱۶)

۱) $x-۸$ ۲) $x-۴$ ۳) $x+۲$ ۴) $x+۴$

پاسخ ابتدا با استفاده از اتحاد مزدوج عبارت را ساده‌تر می‌کنیم:

$$(x^{۲}-۶x-۴)^{۲}-۱۴۴=(x^{۲}-۶x-۴)^{۲}-۱۲^{۲}\xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}}(x^{۲}-۶x-۴-۱۲)\times(x^{۲}-۶x-۴+۱۲)$$

$$(x^{۲}-۶x-۱۶)(x^{۲}-۶x+۸)\xrightarrow{\text{اتحاد جمله مشترک}}\underbrace{(x-۸)(x+۲)}_{(x^{۲}-۶x-۱۶)}\overbrace{(x-۲)(x-۴)}^{(x^{۲}-۶x+۸)}$$

بنابراین گزینه ۴ پاسخ سؤال است.

۲. عبارت‌های گویا

در سال گذاشته با مفهوم عبارت‌های گویا آشنا شدید.

کسرهایی که صورت و مخرج آن‌ها چندجمله‌ای باشند عبارت‌های گویا نامیده می‌شوند. همچنین با مفهوم جمله‌های متشابه و توان عبارت نسبت به یک متغیر آشنا شدید. برای مرور تمرین‌های زیر را انجام دهید.

▼ **مثال ۳۴)** **سه عبارت متشابه با عبارت** $x^{۳}y^{۸}z^{۲}$ **بنویسید.**
(کتاب درسی، مکمل فعالیت، صفحه ۱۸)

پاسخ

$$۳x^{۳}y^{۸}z^{۲},\sqrt{۲}x^{۳}y^{۸}z^{۲},\frac{\sqrt{۲}}{۲}x^{۳}y^{۸}z^{۲},\sqrt{۳}z^{۲}y^{۸}x^{۳},...$$

دقت کنید عبارت $x^{۳}y^{۸}z^{۲}$ باید در همه عبارت‌هایی که می‌نویسید باشد.

▼ **مثال ۳۵)** **در هر یک از موارد زیر توان عبارت داده شده را نسبت به متغیرهای بیان شده را حساب کنید.**

(کتاب درسی، مکمل فعالیت، صفحه ۱۸)

الف) $x^{2}y^{2}z^{3}$ نسبت به x, y, z

ب) $x^{3}y^{8}$ نسبت به x, y, z

ج) $3x^{2}+8x-5x^{3}$ نسبت به x

د) $30x^{2}+8a^{2}y+3y^{3}$ نسبت به x, y, a

پاسخ

الف) نسبت به x: ۲ / نسبت به y: ۲ / نسبت به z: ۳

ب) نسبت به x: ۳ / نسبت به y: ۸ / نسبت به z: ۰

ج)نسبت به x: ۳

د)نسبت به x: ۲ / نسبت به a: ۲ / نسبت به y: ۳

▼ **مثال ۳۶)** **مشخص کنید کدام‌یک از عبارت‌های زیر، عبارت گویا هستند و چرا؟**

(کتاب درسی، مکمل فعالیت، صفحه ۱۸)

الف) $\dfrac{x-3}{2x^{2}-3x+8}$ ب) $\dfrac{\sqrt{x}}{3x+8}$ ج) $\dfrac{\sqrt{2}x}{x+8}$

پاسخ

الف) صورت و مخرج هر ۲ چندجمله‌ای هستند پس عبارت گویا است.

ب) صورت کسر چندجمله‌ای نمی‌باشد پس عبارت گویا نیست.

ج) صورت و مخرج کسر هر ۲ چندجمله‌ای هستند پس عبارت گویا است.

با معنا بودن عبارت‌های گویا

عبارت‌های گویا در تمام نقاط به غیر از ریشه‌های مخرج بامعنا و تعریف شده هستند. برای به‌دست آوردن ریشه‌های مخرج عبارات کسری کافی است مخرج را برابر صفر قرار دهیم.

▼ **مثال ۳۷)** **هر یک از عبارت‌های زیر به ازای چه مقادیری تعریف نشده‌اند؟**

(کتاب درسی، مشابه کار در کلاس، صفحه ۱۹)

الف) $\dfrac{3x-8}{x^{2}-25}$ ب) $\dfrac{2x+9}{x-1}$ ج) $\dfrac{x^{2}-4}{x^{2}+4}$

پاسخ

الف) مخرج عبارت گویا برابر است با $x^{2}-25$، مخرج را برابر صفر قرار می‌دهیم، داریم:

$$x^{2}-25=0 \Rightarrow x^{2}=25 \Rightarrow x=\pm 5 \longrightarrow$$

عبارت گویا به ازای $\{\pm 5\}$ تعریف نشده است.

ب) مخرج عبارت گویا برابر است با $x-1$، مخرج را برابر صفر قرار می‌دهیم، داریم:

$$x-1=0 \Rightarrow x=1 \longrightarrow$$

عبارت گویا به ازای $\{1\}$ تعریف نشده است.

ج) مخرج عبارت گویا برابر است با $x^{2}+4$، مخرج را برابر صفر قرار می‌دهیم، داریم:

معادله ریشه‌ای ندارد، پس عبارت (ج) همواره تعریف شده است. $x^2+4=0 \Rightarrow x^2=-4$ غ ق ق

▼ **مثال ۳۸) عبارت گویای زیر به‌ازای چه مقادیری از x تعریف نشده است؟**

(کتاب درسی ـ مشابه تمرین کار در کلاس ـ صفحه ۱۹)

$$A=\frac{(2x-3)}{4x^2-4x-3}$$

۱) $\{-\frac{1}{2}\}$ ۲) $\{-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\}$ ۳) $\{-\frac{3}{2},\frac{1}{2}\}$ ۴) $\{-\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\}$

پاسخ همان‌گونه که ضمن درس نامه اشاره شد، عبارات کسری در ریشه‌های مخرج تعریف نمی‌شوند، پس کافی است مخرج را برابر صفر قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$4x^2-4x-3=0 \Rightarrow (2x)^2-2(2x)-3=0 \xrightarrow{\text{اتحاد جمله مشترک}} (2x)^2+(-3+1)(2x)+(1)(-3)=0$$

$$(2x-3)(2x+1)=0 \Rightarrow \begin{cases} 2x-3=0 \Rightarrow x=\frac{3}{2} \\ 2x+1=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

بنابراین گزینه ۲ صحیح است.

▼ **مثال ۳۹) عبارت گویای $y=\dfrac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x-4}{x-5}}$ به‌ازای چه مقادیری از x تعریف شده است؟**

(کتاب درسی ـ مکمل کار در کلاس ـ صفحه ۱۹)

۱) $R-\{1,5\}$ ۲) $R-\{1,4,5\}$ ۳) $R-\{4,5\}$ ۴) R

پاسخ ابتدا مخرج کسرهای $\frac{x}{x-1}$ و $\frac{x-4}{x-5}$ را مساوی صفر قرار می‌دهیم، بنابراین داریم:

$$\begin{cases} x-1=0 \rightarrow x=1 \\ x-5=0 \rightarrow x=5 \end{cases}$$

حال با استفاده از دور در دور و نزدیک در نزدیک، عبارت داده شده را ساده می‌کنیم، خواهیم داشت:

$$y=\left(\frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x-4}{x-5}}\right)=\frac{x(x-5)}{(x-1)(x-4)}$$

در مخرج این کسر، عبارت $x-4$ نیز دیده می‌شود، بنابراین داریم: $x-4=0 \longrightarrow x=4$

در حالت کلی، مقادیری که این عبارت به ازای آن‌ها تعریف شده است برابر $R-\{1,4,5\}$ می‌باشند، پس گزینه ۲ صحیح است.

ساده کردن عبارت‌های گویا

اگر a و b و k عددهای حقیقی باشند، داریم: $\frac{ka}{kb}=\frac{a}{b} \quad (k,b\neq 0)$

یعنی k که عامل مشترک در صورت و مخرج است را ساده می‌کنیم. در عبارت‌های جبری نیز به همین شکل عمل می‌کنیم. یعنی ابتدا صورت و مخرج را تا جایی که ممکن است تجزیه می‌کنیم، سپس عوامل مشترک را ساده می‌کنیم و این عمل را به شرطی ادامه می‌دهیم که عبارت ساده شده برابر صفر نباشد.

▼ **مثال ۴۰)** ساده شده‌ی عبارت تعریف شده‌ی $\frac{1-x^2+x^3-x^5}{1-x^2}$ کدام است؟

(کتاب درسی، مکمل کار در کلاس، صفحه ۱۹)

پاسخ با کمی دقت در صورت متوجه می‌شویم که اگر ۲ جمله اول را با هم و ۲ جمله بعدی را با هم در نظر بگیریم خواهیم داشت:

$$\frac{(1-x^2)+x^3(1-x^2)}{1-x^2}=\frac{\cancel{(1-x^2)}(1+x^3)}{\cancel{(1-x^2)}}=1+x^3$$

▼ **مثال ۴۱)** حاصل عبارت تعریف شده‌ی $\frac{1-y+y^3-y^4}{1-y}$ با کدام عبارت زیر برابر است؟ $(y\neq 1)$

(آزاد انسانی ـ ۷۸ ـ کتاب درسی ـ مشابه کار در کلاس ۲ ـ صفحه‌های ۱۹ و ۲۰)

۱) y^3 ۲) y^3+1 ۳) $1-y+y^3$ ۴) y^3-y^4

پاسخ برای ساده کردن عبارت داده شده، در جمله دوم صورت از y^3 فاکتور می‌گیریم و خواهیم داشت:

$$\frac{1-y+y^3-y^4}{1-y}=\frac{(1-y)+y^3(1-y)}{1-y}\ \underset{\text{فاکتور می‌گیریم}}{\overset{(1-y)}{\text{از}}}\ \frac{(1-y)(1+y^3)}{1-y}=1+y^3$$

بنابراین گزینه ۲ صحیح است.

▼ **مثال ۴۲)** اگر $x=\sqrt{2}$ و $y=3x$ باشد، حاصل $\frac{x^2+y^2}{2xy}$ کدام است؟

(آزمون کانون ـ ۹۲ ـ کتاب درسی ـ مکمل کار در کلاس ۲، صفحه‌های ۱۹ و ۲۰)

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) $\frac{5}{3}$

پاسخ به ازای x، $\sqrt{2}$ و به ازای y، $3x$ قرار می‌دهیم:

$$x=\sqrt{2}\Rightarrow y=3\sqrt{2}\Rightarrow \frac{x^2+y^2}{2xy}=\frac{2+18}{12}=\frac{20}{12}=\frac{5}{3}$$

بنابراین گزینه ۴ صحیح است.

▼ **مثال ۴۳)** عبارت‌های زیر را ساده کنید.

(کتاب درسی، مرتبط با کار در کلاس، صفحه ۱۹)

الف) $\frac{(x^3-1)}{x^2-2x+1}$

ب) $\frac{x^2-8x+12}{x^2-4x+4}$

ج) $\frac{x^4-8x}{3x^2-12x+12}$

پاسخ

الف) $\frac{(x^3-1)}{x^2-2x+1}=\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)^2}=\frac{x^2+x+1}{x-1}$

ب) $\frac{x^2-8x+12}{x^2-4x+4}=\frac{(x-2)(x-6)}{(x-2)^2}=\frac{x-6}{x-2}$

ج) $\frac{x^{4}-8x}{3x^{2}-12x+12}=\frac{x(x^{3}-8)}{3(x^{2}-4x+4)}=\frac{x(x-2)(x^{2}+2x+4)}{3(x-2)^{2}}=\frac{x(x^{2}+2x+4)}{3(x-2)}$

پیدا کردن مضرب‌های مشترک دو چند جمله‌ای

برای پیدا کردن کوچکترین مضرب مشترک (ک.م.م) ۲ چند جمله‌ای P(x) و Q(x)، (مضرب مشترکی که نسبت به x از کوچکترین درجه باشد) ابتدا هر یک از چندجمله‌ای‌ها را تجزیه می‌کنیم سپس حاصل‌ضرب عبارت‌های مشترک با بزرگترین توان در عبارت‌های غیرمشترک را بدست می‌آوریم. توجه کنید که منظور از کوچکترین مضرب مشترک، مضرب با کوچکترین توان است نه از نظر عددی.

▼ **مثال ٤٤)** **کوچکترین مضرب مشترک** $(x^{3}-8)$ **و** $(x^{2}-7x+10)$ **را پیدا کنید.**

(کتاب درسی، مرتبط با کار در کلاس، صفحه ۲۲)

پاسخ *ابتدا هر یک از این عبارت‌ها را تجزیه می‌کنیم:*

$$\begin{cases}(x^{3}-8)=(x-2)(x^{2}+2x+4)\\(x^{2}-7x+10)=(x-2)(x-5)\end{cases}$$

می‌بینیم که عامل مشترک $(x-2)$ *است و بزرگترین توان آن ۱ می‌باشد. پس داریم:*

کوچکترین مضرب مشترک: $\underbrace{(x-2)}_{\text{عامل مشترک با بزرگترین توان}}\times\underbrace{(x^{2}+2x+4)(x-5)}_{\text{عوامل غیر مشترک}}$

▼ **مثال ٤٥)** **کوچکترین مضرب مشترک عبارات** x^{2} **،** $x^{2}-8x+7$ **و** $x^{4}-x$ **را پیدا کنید.**

(کتاب درسی، مکمل کار در کلاس، صفحه ۲۲)

پاسخ *ابتدا هر یک از عبارات داده شده را تجزیه می‌کنیم، داریم:*

$$\left.\begin{cases}x^{2}-8x+7=(x-1)(x-7)\\x(x^{3}-1)=x(x-1)(x^{2}+x+1)\\x^{2}\end{cases}\right\}\longrightarrow \text{کوچکترین مضرب مشترک: } \underbrace{x^{2}(x-1)}_{\text{عوامل مشترک با بزرگترین توان}}\underbrace{(x-7)(x^{2}+x+1)}_{\text{عوامل غیر مشترک}}$$

پیدا کردن بزرگترین مقسوم علیه مشترک دو عبارت جبری

برای پیدا کردن بزرگترین مقسوم علیه مشترک (ب. م. م) دو عبارت جبری P(x) و Q(x) ابتدا این ۲ عبارت را تا جایی که ممکن است تجزیه می‌کنیم. حاصل ضرب عامل‌های مشترک با کوچکترین توان خواسته مورد نظر ماست.

▼ **مثال ٤٦)** **بزرگترین مقسوم علیه مشترک ۲ عبارت** $2x^{2}-8x+8$ **و** $x^{2}-8x+12$ **را پیدا کنید.**

(کتاب درسی، مکمل فعالیت، صفحه ۲۱)

پاسخ *ابتدا عبارات داده شده را تجزیه می‌کنیم، داریم:*

$$2x^{2}-8x+8=2(x^{2}-4x+4)=2(x-2)^{2}$$

$$x^{2}-8x+12=(x-2)(x-6)$$

عبارت مشترک بین این ۲ چند جمله‌ای $(x-2)$ *می‌باشد که کوچکترین توان آن ۱ است. پس بزرگترین مقسوم علیه مشترک این ۲ عبارت برابر است با:* $(x-2)$.