



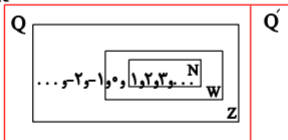
مجموعه‌های اعداد

کارت ۱ فصل ۱

* برخی از مجموعه‌های اعداد عبارتند از:

- N : مجموعه‌ی اعداد طبیعی
 W : مجموعه‌ی اعداد حسابی
 Z : مجموعه‌ی اعداد صحیح
 Q : مجموعه‌ی اعداد گویا
 Q' : مجموعه‌ی اعداد گنگ
 R : مجموعه‌ی اعداد حقیقی

* **نکته:** رابطه‌ی این مجموعه‌ها با یکدیگر، همانند شکل زیر است:
 R



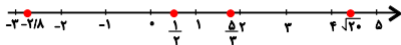
* **اعداد گنگ:** هر عدد اعشاری که تعداد ارقام اعشار آن بی‌شمار باشد و متناسب نباشد. مانند:
 $\sqrt{2}, \pi, 0/302653\dots$



حوزه تخصصی،

*** نکته:** متناظر با هر عدد

نقطه‌ای روی محور اعداد حقیقی وجود دارد:





مجموعه‌های اعداد

کارت ۱
فصل ۱

۱) کدام گزینه‌ی زیر نادرست است؟

$$Q \cap Z \subset Z \quad (۲) \quad N \subset Z \subset Q \subset R \quad (۱)$$

$$R - Z = Q \quad (۴) \quad Z \cap N = N \quad (۳)$$

۲) کدام مجموعه‌ی زیر، مجموعه‌ی

اعداد طبیعی را نمایش نمی‌دهد؟

$$W - (W - N) \quad (۲) \quad N - Q' \quad (۱)$$

$$W \cup N \quad (۴) \quad (W \cap Z) - \{0\} \quad (۳)$$

پاسخ ۱: گزینه‌ی «۴»؛ اگر از اعداد حقیقی، اعداد صحیح را حذف کنیم، مجموعه‌ی اعداد گویای غیرصحیح و اعداد گنگ به دست می‌آید.

پاسخ ۲: گزینه‌ی «۴»

$$1) N - Q' = N$$

$$2) W - (W - N) = W - \{0\} = N$$

$$3) (W \cap Z) - \{0\} = W - \{0\} = N$$

$$4) W \cup N \xrightarrow{N \subset W} W$$

بنابراین گزینه‌ی «۴» مجموعه‌ی اعداد طبیعی را نشان نمی‌دهد.



بازه‌ها

کارت ۲

فصل ۱

*** بازه:** زیرمجموعه‌هایی از R را که شامل تمام اعداد حقیقی بین دو عدد مشخص‌اند، «بازه» یا «فاصله» می‌نامیم و به صورت‌های زیر تعریف می‌کنیم:

*** بازه‌ی باز از a تا b :** مجموعه‌ی اعداد حقیقی بین a و b که خود a و b را شامل نمی‌شود و به صورت (a, b) نمایش می‌دهیم.

*** بازه‌ی بسته از a تا b :** مجموعه‌ی اعداد حقیقی بین a و b که خود a و b را نیز شامل می‌شود و به صورت $[a, b]$ نمایش می‌دهیم.

*** بازه‌ی نیمه باز از a تا b :** مجموعه‌ی اعداد حقیقی بین a و b که فقط شامل یکی از دو نقطه‌ی a و b می‌شود و به صورت $[a, b)$ یا $(a, b]$ نمایش می‌دهیم.

*** نکته:** برای نمایش مجموعه‌ی $\{x \in R \mid x > a\}$ از نماد $(a, +\infty)$ استفاده می‌کنیم. $(+\infty)$ در انتهای بازه،



نشان دهنده‌ی یک عدد حقیقی
به دو مثال زیر توجه کنید:

$$1) \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\} = (-\infty, a]$$

$$2) \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$$



بازه‌ها

۱) درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

$$۱) [-1,2) \subset [-1,2] \quad ۲) \emptyset \subset (-1,1) \quad ۳) 2 \in (2,3)$$

۲) اگر عدد حقیقی m متعلق به بازه $(1,5)$ باشد، آنگاه عدد $2m+1$ در کدام بازه قرار می‌گیرد؟

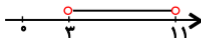
پاسخ ۱: درست است؛ زیرا هر یک از بازه‌های باز و نیمه‌باز، زیرمجموعه‌ی بازه‌ی بسته هستند. (۲) درست است؛ زیرا تهی زیرمجموعه‌ی هر مجموعه‌ای است. (۳) نادرست است؛ در بازه‌ی $(۲ و ۳)$ ، عدد ۲ وجود ندارد.

پاسخ ۲:

$$1 < m < 5 \xrightarrow{\times 2} 2 < 2m < 10 \xrightarrow{+1} 3 < 2m+1 < 11$$

$$\longrightarrow 2m+1 \in (3,11)$$

بنابراین بازه‌ی موردنظر $(۱ و ۳)$ است که به صورت زیر روی محور اعداد حقیقی نمایش داده می‌شود:





مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

کارت ۳ فصل ۱

*** مجموعه‌های متناهی:** مجموعه‌هایی که تعداد اعضای آن‌ها را با یک عدد حسابی می‌توان نشان داد، مجموعه‌های متناهی می‌نامیم.

*** مجموعه‌های نامتناهی:** مجموعه‌هایی که تعداد اعضای آن‌ها را نمی‌توان با یک عدد بیان کرد، مجموعه‌های نامتناهی می‌نامیم.

* نکات:

(۱) مجموعه‌های R, Q', Q, Z, W, N همگی نامتناهی هستند.

(۲) مجموعه‌ی تهی، یک مجموعه‌ی متناهی است.

(۳) اگر مجموعه‌ی A ، مجموعه‌ای متناهی باشد، هر زیرمجموعه از آن هم متناهی است.



(۴) اگر مجموعه A ، یک زیرمجموعه ی نامتناهی داشته باشد، آنگاه A ، مجموعه ای نامتناهی است.



مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

کارت ۳ فصل ۱

- (۱) متناهی یا نامتناهی بودن مجموعه‌های زیر را مشخص کنید.
- (۱) مجموعه انسان‌های روی زمین
 - (۲) بازه‌ی $(0,4)$
 - (۳) مجموعه‌ی اعداد اول
 - (۴) مجموعه‌ی اعداد صحیح ۱۴ رقمی
- (۲) اگر A مجموعه‌ی اعداد طبیعی فرد و B مجموعه‌ی اعداد اول باشد، کدام مجموعه متناهی و غیرتهی است؟

(سراسری انسانی فارغ از کشور- ۹۱)

$B - A$ (۲)	$A - B$ (۱)
$A - (A \cup B)$ (۴)	$A \cap B$ (۳)

- پاسخ ۱:** (۱) متناهی (۲) نامتناهی
 (۳) نامتناهی (۴) متناهی
- پاسخ ۲:** گزینه‌ی «۲»؛ چون مجموعه‌ی اعداد اول، غیر از ۲ فرد هستند، مجموعه‌ی $B - A$ برابر $\{۲\}$ می‌شود که مجموعه‌ای متناهی و غیرتهی است.



1) $A - B =$ مجموعه‌ی اعداد طبیعی فراتر از به جز
 اعداد اول → نامتناهی

3) $A \cap B =$ مجموعه‌ی اعداد اول به جز
 → نامتناهی

$$4) A - (A \cup B) = \emptyset$$



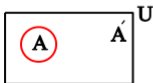
مجموعه‌ی مرجع و
متمم یک مجموعه

کارت ۴
فصل ۱

*** مجموعه‌ی مرجع:** در هر مبحث، مجموعه‌ای که همه‌ی مجموعه‌های مورد بحث، زیرمجموعه‌ی آن باشند، مجموعه‌ی مرجع می‌نامیم و آن را با نماد U نمایش می‌دهیم. به عنوان مثال، R در مجموعه‌ی اعداد حقیقی، مجموعه‌ی مرجع در نظر گرفته می‌شود.

*** متمم یک مجموعه:** هرگاه U مجموعه‌ی مرجع و $A \subseteq U$ باشد، آن‌گاه مجموعه‌ی $U - A$ را متمم A می‌نامیم و آن را با نماد A' نمایش می‌دهیم. به عبارت دیگر A' شامل عضوهای U است که در A نیستند.

*** تذکره:** باتوجه به شکل زیر داریم:



$$1) A \cap A' = \emptyset$$

$$2) A - A' = A$$

$$3) A \cup A' = U$$

$$4) (A')' = A$$



$$1) B' \subset A'$$

* نکته: اگر $A \subset B$ باشد، آنگاه:

$$2) A - B = \emptyset$$



مجموعه‌ی مرجع و

متمم یک مجموعه

کارت ۴

فصل ۱

۱) اگر $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ مجموعه‌ی مرجع و $A = \{2, 3, 5, 7\}$ زیرمجموعه‌ی آن باشد، آنگاه مجموعه‌ی A' کدام است؟

۲) اگر $A \subset B$ و U مجموعه‌ی مرجع آن‌ها باشد، کدام گزینه صحیح است؟

$$A \cup B = U \quad (۲)$$

$$A' \cup B' = U \quad (۱)$$

$$A \cap B = B \quad (۴)$$

$$A' \cup B = U \quad (۳)$$

پاسخ ۱: بنابر تعریف متمم یک مجموعه، مجموعه‌ی A' شامل عضوهای U است که در A نیستند، بنابراین: $A' = \{1, 4, 6, 8\}$

U



پاسخ ۲: گزینه‌ی «۳»؛
باتوجه به نمودار
ون داریم:

گزینه‌ی «۱» نادرست است؛ زیرا

$$A \subset B \Rightarrow B' \subset A' \Rightarrow A' \cup B' = A'$$

گزینه‌ی «۲» نادرست است؛ زیرا

$$A \subset B \Rightarrow A \cup B = B$$



گزینه‌ی «۳» با توجه به نمودار زیر درست است.

گزینه‌ی «۴» نادرست است؛ زیرا

$$A \subset B \Rightarrow A \cap B = A$$

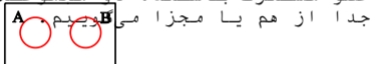


مجموعه‌های مجزا

کارت ۵
فصل ۱

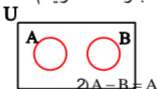
* $n(A)$: تعداد اعضای مجموعه‌ی A را با نماد $n(A)$ نشان می‌دهیم.

* **دو مجموعه‌ی جدا از هم:** به هر دو مجموعه، مثل A و B در شکل زیر، که فاقد عضو مشترک باشند، دو مجموعه‌ی



* **تذکره:** مجموعه‌های (A', A) و $(B - A, A - B)$ همواره جدا از هم هستند.

* **نکات:** باتوجه به شکل زیر برای دو مجموعه‌ی مجزا داریم:



$$1) A \cap B = \emptyset$$

$$3) B - A = B$$

$$5) B \subset A'$$

$$2) A - B = A$$

$$4) A \subset B'$$

۶) برای تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه‌ی جدا از هم داریم:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$



مجموعه‌های مجزا

کارت ۵
فصل ۱

۱) اگر R را مجموعه‌ی مرجع در نظر بگیریم، کدام گزینه دو مجموعه‌ی مجزا را نشان می‌دهد؟

$$R, Q \quad (۲) \quad W, N \quad (۱)$$

$$R, Q' \quad (۴) \quad Q', Z \quad (۳)$$

۲) اگر A و B ، دو مجموعه‌ی مجزا باشند و داشته باشیم $n(A \cup B) = 16$ و $n(B - A) = 7$ ، تعداد عضوهای مجموعه‌ی A را بیابید.

پاسخ ۱: گزینه‌ی «۳»؛ در دو مجموعه‌ی مجزا، اشتراک تهی است.

$$1) W \cap N = N$$

$$2) R \cap Q = Q$$

$$3) Q' \cap Z = \emptyset$$

$$4) R \cap Q' = Q'$$

بنابراین فقط مجموعه‌های Z و Q' ، مجزا هستند.

پاسخ ۲:

$$B = B - A \Rightarrow n(B) = n(B - A) = 7$$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) \Rightarrow 16 = n(A) + 7 \Rightarrow n(A) = 9$$

بنابراین مجموعه‌ی A ، ۹ عضو دارد.



تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه

کارت ۶ فصل ۱

*** تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه:** اگر A و B دو زیرمجموعه‌ی دلخواه از مجموعه‌ی مرجع U متناهی باشند، آنگاه تعداد اعضای اجتماع دو مجموعه را با $n(A \cup B)$ نمایش می‌دهیم و خواهیم داشت:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

*** نکته:**



باتوجه به شکل فوق، به نتایج زیر می‌رسیم:

$$1) n(A \cup B) = n(A - B) + n(B - A) + n(A \cap B)$$

$$2) n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$$

*** تذکره:** اگر A زیرمجموعه‌ای دلخواه از مجموعه‌ی مرجع U باشد، تعداد



کانون
فرهنگی
آموزشی دست
ملم چی

اعضای A' از فرمول زیر
می آید.

$$n(A') = n(U) - n(A)$$



تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه

کارت ۶ فصل ۱

(۱) در یک کلاس ۳۰ نفری، ۱۵ نفر فوتبال و ۱۰ نفر والیبال و ۵ نفر هم فوتبال و هم والیبال بازی می‌کنند. چند نفر در این کلاس، فوتبال یا والیبال بازی می‌کنند؟

(۲) اجتماع دو مجموعه‌ی A و B دارای ۳۸ عضو است. مجموعه‌های (A-B) و (B-A) به ترتیب ۹ و ۱۴ عضو دارند. مجموعه‌ی A چند عضو دارد؟

پاسخ ۱: اگر مجموعه‌ی A را دانش‌آموزان فوتبالیست و مجموعه‌ی B را دانش‌آموزان والیبالیست در نظر بگیریم، خواهیم داشت:

$$n(A) = 15, n(B) = 10, n(A \cap B) = 5$$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 10 + 15 - 5 = 20$$

پاسخ ۲:



$$n(A \cup B) = n(A - B) + n(B - A) + n(A \cap B) \rightarrow$$

$$38 = 9 + 14 + n(A \cap B) \Rightarrow n(A \cap B) = 15$$

$$n(A) = n(A - B) + n(A \cap B) = 9 + 15 = 24$$



الگوی خطی

کارت ۷

فصل ۱

*** الگو:** الگو یک ساختار منظم از اشکال، تصاویر، صداها، نمادها، وقایع و یا اعداد است که ممکن است تکرار شونده یا رشدکننده و یا ترکیبی از این دو باشد.

*** راهبرد مل:** برای یافتن یک مدل ریاضی برای طرح داده شده، باید رابطه‌ای بین شماره‌ی هر مرحله (اندیس جمله) و مقدار آن (مقدار جمله) بیابیم که این رابطه در تمامی مراحل (شکلها) ثابت است. این رابطه جمله‌ی عمومی الگو می‌باشد.

*** الگوی خطی:** اگر جمله‌ی عمومی الگو به صورت $t_n = an + b$ باشد (a و b اعداد حقیقی دلخواه و ثابت هستند)، آن را الگوی خطی می‌نامیم.

*** نکته‌ی ۱:** در الگوی خطی، میزان تغییر جملات متوالی برابر ضریب n ، یعنی عدد a است.



*** نکته ۲:** در تمام الگوها n (شماره مرحله) باید عدد طبیعی باشد.



الگوی خطی

کارت ۷
فصل ۱

۱) در شکل زیر تعداد نقاط در طرح هفتم کدام است؟



(۱)

(۲)

(۳)

۲) در یک الگوی خطی، جملات پنجم و دوازدهم به ترتیب ۲۱ و ۵۶ می‌باشند. جمله عمومی الگو را بیابید.

پاسخ ۱: اگر جمله اول را با t_1 و جمله دوم را با t_2 و ... نمایش دهیم، داریم:

$$\left. \begin{array}{l} t_2 = t_1 + 1 \times 5 \\ t_3 = t_1 + 2 \times 5 \end{array} \right\} \Rightarrow t_7 = t_1 + 6 \times 5 \Rightarrow t_7 = 4 + 30 = 34$$

پاسخ ۲: جمله عمومی دنباله را با $t_n = an + b$ نمایش می‌دهیم، بنابراین:



$$t_5 = 5a + b$$

$$t_{12} = 12a + b$$

$$\xrightarrow{t_{12} - t_5} 7a = 56 - 21 \Rightarrow a = 5$$

$$t_5 = 5a + b = 21 \Rightarrow 25 + b = 21 \Rightarrow b = -4$$

جمله ی عمومی $t_n = 5n - 4$



الگوهای غیر خطی

کارت ۸ فصل ۱

*** الگوهای غیرخطی:** به الگوهایی که اختلاف هر دو جمله‌ی متوالی آن‌ها، مقدار ثابتی نیست، الگوهای غیرخطی می‌گوییم.

معروفترین این الگوها، الگوهای مربعی و مثلثی است.

*** الگوی مربعی:** $a_n = n^2 \Rightarrow$ (شماره‌ی جمله) $=$ مقدار هر جمله

*** الگوی مثلثی:** هر الگویی که هر جمله‌ی آن، مساوی مجموع شماره‌ی همان جمله و اعداد طبیعی قبل از آن باشد را یک الگوی مثلثی می‌نامیم و جمله‌ی عمومی آن به صورت زیر است:

$$a_n = \frac{n(n+1)}{2} = 1+2+3+\dots+n$$

*** دو الگوی بسیار مهم:**

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

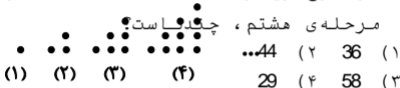
$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$



الگوهای غیر خطی

کارت ۸
فصل ۱

۱) در طرح زیر، تعداد نقطه‌ها در



۲) در الگوی زیر، جمله‌ی هفتم کدام است؟

2, 6, 12, 20, ...

پاسخ ۱: گزینه‌ی «۱»

$$\begin{array}{ccccccc}
 a_1 & a_2 & a_3 & \dots & & & a_8 \\
 \downarrow & \downarrow & \downarrow & & & & \downarrow \\
 1 & 1+2 & 1+2+3 & & & & 1+2+\dots+8
 \end{array}$$

$$a_n = \frac{n(n+1)}{2} \Rightarrow a_8 = \frac{8(8+1)}{2} = 36$$

الگوی
مثلثی
است
پاسخ ۲:

$$\begin{array}{cccc}
 a_1 & a_2 & a_3 & \dots \\
 \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\
 1+1 & 2+4 & 3+9 &
 \end{array}$$



بنابراین جمله ی عمومی الگو برابر

$$a_n = n + n^2$$

است با :

پس جمله ی هفتم برابر است با : $7 + 49 = 56$



دنباله

کارت ۹
فصل ۱

*** دنباله:** هر تعداد عدد را که پشت سرهم قرار می‌گیرند، یک دنباله می‌نامیم. این اعداد، جملات دنباله نامیده می‌شوند.

*** تذکره:** ممکن است جملات یک دنباله فاقد الگو باشند.

*** جمله عمومی:** دنباله‌ها را به شکل زیر نمایش می‌دهند:

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

که در آن a_1 جمله اول، a_2 جمله دوم و به همین ترتیب a_n جمله n ام یا جمله عمومی نامیده می‌شود.

*** نکته ۱:** به دست آوردن جمله عمومی دنباله از روی چند جمله‌ای اول در حالت کلی ممکن نیست. به عنوان مثال دو دنباله‌ی زیر در پنج‌جمله‌ی اول یکسان‌اند.

$$n^3, (n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)+n^3$$



*** نکته ۱۹:** در بعضی از موارد هر جمله‌ی دنباله با دو جمله‌ی قبل از خود رابطه‌ی معینگی دارد؛ به عنوان مثال در دنباله‌ی $1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots$ ($n \geq 3$) هر جمله برابر مجموع دو جمله‌ی قبلتر از خودش است.



دنباله

کارت ۹
فصل ۱

۱) مجموع جمله‌های دوم، سوم و ششم دنباله‌ی a_n با جمله‌ی عمومی $a_n = n^2 - 6n$ را بیابید.

۲) کدام گزینه، جمله‌ی عمومی دنباله‌ی $2, 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots$ را نشان می‌دهد؟

(۱) $(-1)^n \times 2^{1-n}$

(۲) $(-1)^{n+1} \times 2^{2-n}$

(۳) $(-2)^n$

(۴) $(-1)^n \times 2^{2-n}$

پاسخ ۱:

$$a_2 = -8, a_3 = -9, a_6 = 0$$

$$a_2 + a_3 + a_6 = -8 - 9 = -17$$

پاسخ ۲: گزینه‌ی «۴»؛ در این دنباله، جمله‌ی اول $a_1 = -2$ است، که به ازای $n=1$ ، فقط در گزینه‌های ۳ و ۴ به $a_1 = -2$ می‌رسیم.

یکی از گزینه‌های ۳ و ۴ می‌تواند درست باشد، به ازای $n=2$ ، $a_2 = 1$ که فقط در گزینه‌ی «۴» به $a_2 = 1$



می‌رسیم؛ بنابراین گزینه «۴» ،
 جمله‌ی عمومی دنباله را نشان
 می‌دهد.



جمله‌ی عمومی دنباله‌ی حسابی

کارت ۱۰
فصل ۱

*** دنباله‌ی حسابی:** دنباله‌ای که در آن هر جمله (به جز جمله‌ی اول) با اضافه شدن عددی ثابت به جمله‌ی قبلی از خودش به دست می‌آید، یک دنباله‌ی حسابی نامیده می‌شود و به این عدد ثابت، قدر نسبت دنباله می‌گویند. جملات یک دنباله‌ی حسابی به صورت زیر است:

$$t_1, t_1 + d, t_1 + 2d, t_1 + 3d, \dots$$

که در آن t_1 جمله‌ی اول و d قدر نسبت دنباله نامیده می‌شود. جمله‌ی عمومی یک دنباله‌ی حسابی (جمله‌ی n ام) از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$t_n = t_1 + (n-1)d$$

*** تذکره:** برای اثبات حسابی بودن یک دنباله باید ثابت کنیم به ازای هر $n \in \mathbb{N}$:

$$t_{n+1} - t_n = (d) \text{ مقدار ثابت}$$

*** نکته:** دنباله‌ی حسابی یک دنباله‌ی خطی است، یعنی جمله‌ی عمومی آن



د a ،

به صورت $t_n = an + b$ است که
قدرنسبت دنباله می باشد.



جمله‌ی عمومی دنباله‌ی حسابی

کارت ۱۰
فصل ۱

۱) کدام گزینه، یک دنباله‌ی حسابی را نشان می‌دهد؟

(۱) $1, 3, 5, 8, \dots$ (۲) $2, 4, 8, 16, \dots$

(۳) $4, 7, 10, 13, \dots$ (۴) $-1, 2, -4, 8, \dots$

۲) اگر $t_n = -6n + 13$ جمله‌ی عمومی دنباله‌ی حسابی باشد، قدرنسبت و جمله‌ی اول را بیابید.

پاسخ ۱: گزینه‌ی «۳»؛ در دنباله‌ی حسابی تفاضل هر جمله از جمله قبل از خودش مقدار ثابتی است، بنابراین:

دنباله‌ی حسابی نیست. $\rightarrow 8 - 5 = 3 \neq 5 - 3 = 2$

دنباله‌ی حسابی نیست. $\rightarrow 8 - 4 = 4 \neq 4 - 2 = 2$

دنباله‌ی حسابی است. $\rightarrow 10 - 7 = 3 = 13 - 10 = 3$

دنباله‌ی حسابی نیست. $\rightarrow -4 - (-2) = -2 \neq -1 - (-1) = 0$



پاسخ ۱۱: ضریب n قدرنسبت را $d = -6$ و برای پیدا کردن جمله ی اول، $n = 1$ را قرار می دهیم:

$$t_1 = -6(1) + 13 \Rightarrow t_1 = 7$$



واسطه‌ی حسابی

بین دو عدد

کارت ۱۱

فصل ۱

*** واسطه‌ی حسابی بین دو عدد:** اگر a ، b و c سه جمله‌ی متوالی از یک دنباله‌ی حسابی باشند، آنگاه $c - b = b - a$ ، بنابراین باید $b = \frac{a+c}{2}$. در این صورت b را واسطه‌ی حسابی بین a و c می‌گوییم.

*** نکته:** سه جمله‌ی متوالی یک دنباله‌ی حسابی را می‌توانیم به صورت $a-d, a, a+d$ نمایش دهیم.

*** نکته ۱:** اگر دو جمله‌ی t_m و t_n از یک دنباله‌ی حسابی موجود باشد، آنگاه قدرنسبت از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$d = \frac{t_m - t_n}{m - n}$$

*** نکته ۲:** (۱) اگر عدد a را با جملات دنباله‌ی حسابی t_n جمع کنیم، دنباله‌ی به وجود آمده حسابی است. (با همان قدرنسبت و جمله‌ی اول $(t_1 + a$



(۲) اگر عدد a را در جملات دنباله‌های حسابی a_n ضرب کنیم، دنباله‌ی به وجود آمده نیز حسابی است. (با جمله‌ی اول a_1 و قدرنسبت ad)



واسطه‌ی حسابی بین دو عدد

کارت ۱۱
فصل ۱

- (۱) اعداد $2P+3$ ، $3P+4$ و $5P-1$ سه جمله‌ی متوالی یک دنباله‌ی حسابی هستند، قدرنسبت این دنباله را بیابید.
- (۲) جمله‌ی اول یک دنباله‌ی حسابی -۱ و جمله‌ی سوم آن ۹ است. جمله‌ی پانزدهم این دنباله را بیابید.

پاسخ ۱: اگر a ، b و c سه جمله‌ی متوالی یک دنباله‌ی حسابی باشند، آنگاه:

$$b = \frac{a+c}{2}$$

$$\Rightarrow 3P+4 = \frac{5P-1+2P+3}{2} \Rightarrow 6P+8 = 7P+2 \Rightarrow P=6$$

$$d = t_2 - t_1 = 3P+4 - 2P - 3 = P+1 \Rightarrow d = 7$$

پاسخ ۲:

$$d = \frac{t_m - t_n}{m-n} = \frac{9 - (-1)}{3-1} = \frac{10}{2} = 5$$

$$t_n = t_1 + (n-1)d = -1 + 5(n-1) = 5n - 6$$

$$t_{15} = 5 \times (15) - 6 = 69$$

پس:



تعداد جملات دنباله‌ی حسابی متناهی

کارت ۱۲
فصل ۱

*** تعداد جملات:** برای یافتن تعداد جملات یک دنباله‌ی حسابی متناهی، ابتدا باید قدرنسبت را بیابیم و سپس با توجه به جمله‌ی اول و آخر، تعداد جملات را پیدا کنیم.
فرمول زیر خلاصه‌ی راهکار بالاست:

$$\text{تعداد جملات} = \frac{\text{جمله‌ی اول} - \text{جمله‌ی آخر}}{\text{قدرنسبت}}$$

*** نکته‌ی ۱:** اگر بقدرنسبت خواهیم بین دو عدد a و b ، تعداد n واسطه‌ی حسابی قرار دهیم، به طوری که با آنها دنباله‌ی حسابی تشکیل دهند، جمله‌ی اول را a و جمله‌ی $n+2$ را b در نظر می‌گیریم، پس قدرنسبت برابر می‌شود با:

$$d = \frac{t_{n+2} - t_1}{n+2-1} = \frac{b-a}{n+1}$$

*** نکته‌ی ۲:** اگر t_m ، t_n ، t_p و t_q جملاتی از یک دنباله‌ی حسابی باشند و داشته باشیم:

$$m+n = p+q$$



بازگشت به

آنگاه رابطه‌ی زیر همواره
است:

$$t_m + t_n = t_p + t_q$$



تعداد جملات دنباله‌ی حسابی متناهی

کارت ۱۲
فصل ۱

- ۱) بین دو عدد ۲۰ و ۸۳، شش واسطه‌ی حسابی قرار داده ایم، قدرنسبت دنباله‌ی به وجود آمده کدام است؟
 (۱) ۸ (۲) ۹ (۳) ۱۰ (۴) ۱۱
- ۲) در دنباله‌ی حسابی -۲ و ۵ و ... و ۸۹ چند جمله وجود دارد؟

پاسخ ۱: گزینه‌ی «۲»؛ طبق فرمول داریم:

$$d = \frac{b-a}{n+1} = \frac{83-20}{6+1} = \frac{63}{7} = 9$$

بنابراین قدرنسبت دنباله، برابر ۹ است.

پاسخ ۲: قدرنسبت دنباله $d = -2 - 5 = -7$ است و جمله‌ی اول $t_1 = 89$ می‌باشد، پس:

$$t_n = t_1 + (n-1)d \Rightarrow -2 = 89 + (n-1)(-7)$$

$$\Rightarrow -91 = (-7)(n-1) \Rightarrow n-1 = 13 \Rightarrow n = 14$$

یا می‌توان طبق فرمول درسامه عمل کرد:



$$= \frac{-2}{-7} + 1 = \frac{-91}{-7} + 1 = 14$$

تعداد جملات = 14



جمله‌ی عمومی دنباله‌ی هندسی

کارت ۱۳
فصل ۱

*** دنباله‌ی هندسی:** دنباله‌ای است که در آن هر جمله (به جز جمله‌ی اول) از ضرب جمله‌ی قبل از خودش در عددی ثابت به دست می‌آید. این عدد ثابت را قدرنسبت دنباله می‌نامیم. جملات یک دنباله‌ی هندسی به صورت زیر است:

$$t_1, t_1r, t_1r^2, t_1r^3, \dots$$

که در آن t_1 جمله‌ی اول و r قدرنسبت دنباله نامیده می‌شود. جمله‌ی n (جمله‌ی عمومی) دنباله‌ی هندسی از رابطه‌ی مقابل به دست می‌آید:

$$t_n = t_1r^{n-1}$$

*** تذکر:** برای اثبات، هندسی بودن یک دنباله، باید ثابت کنیم به ازای هر $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{t_{n+1}}{t_n} = (r) \text{ مقدار ثابت}$$



*** نکته:** جمله‌ی عمومی یک دنباله‌ی

هندسی، به شکل $t_n = A(B)^n$ در نظر گرفته می‌شود که در آن عدد B (پایه‌ی عبارت به توان n) قدرنسبت است.



جمله‌ی عمومی دنباله‌ی هندسی

کارت ۱۳ فصل ۱

۱) کدام یک از دنباله‌های زیر، یک دنباله‌ی هندسی است؟

(۱) $3, 6, 9, 12, \dots$ (۲) $2, 5, 9, 14, \dots$

(۳) $3, 6, 12, 24, \dots$ (۴) $2, 6, 18, 36, \dots$

۲) اگر $t_n = \frac{2^{2-n}}{3}$ ، جمله‌ی عمومی یک دنباله‌ی هندسی باشد، مجموع جمله‌ی اول و قدرنسبت این دنباله را بیابید.

پاسخ ۱: گزینه‌ی «۳»؛ در دنباله‌ی هندسی، نسبت هر دو جمله‌ی متوالی مقدار ثابتی است. با بررسی گزینه‌ها، فقط در گزینه‌ی «۳» مشاهده می‌کنیم که نسبت هر دو جمله‌ی متوالی مقدار ثابتی است:

$$\frac{6}{3} = \frac{12}{6} = \frac{24}{12} = 2$$

پاسخ ۲:



$$\left. \begin{aligned} t_1 &= \frac{2}{3} \\ t_2 &= \frac{2^{(2-2)}}{3} = \frac{1}{3} \end{aligned} \right\} \Rightarrow r = \frac{t_2}{t_1} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}$$

$$t_1 + r = \frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{7}{6}$$



واسطه‌ی هندسی

کارت ۱۴

بین دو عدد

فصل ۱

*** واسطه‌ی هندسی بین دو عدد:** اگر a ، b و c سه جمله‌ی متوالی از یک دنباله‌ی

هندسی باشند، آنگاه: $\frac{b}{a} = \frac{c}{b}$.

بنابراین خواهیم داشت:

$$b^2 = ac \Rightarrow b = \sqrt{ac}$$

در این صورت b را واسطه‌ی هندسی بین a و c می‌گوییم.

*** تلیجه:** سه جمله‌ی متوالی یک دنباله‌ی

هندسی را می‌توانیم به

صورت ar ، a و $\frac{a}{r}$ نمایش دهیم.

*** تذکره:** در یک دنباله‌ی هندسی که جمله‌ی

اول آن مثبت است، اگر $r > 1$ باشد،

دنباله افزایشی است و

اگر $0 < r < 1$ باشد، دنباله کاهشی

است. اگر $r < 0$ باشد، دنباله

نوسانی است و اگر $r = -1$ باشد،

دنباله متناوب است.

*** نکته:** اگر دو جمله‌ی t_m و t_n ، از یک

دنباله‌ی هندسی در اختیار باشد،



آپوزٹل سطح ی

آن گاه قدرنسبت دنباله از
زیر به دست می آید:

$$r^{m-n} = \frac{t_m}{t_n}$$



واسطه‌ی هندسی

بین دو عدد

کارت ۱۴

فصل ۱

۱) اعداد 2^a ، $4\sqrt{2}$ و 2^b سه جمله‌ی متوالی از یک دنباله‌ی هندسی‌اند، مجموع $a+b$ را بیابید.

۲) در یک دنباله‌ی هندسی، جمله‌های سوم و ششم به ترتیب ۱۲ و ۹۶ هستند. جمله‌ی هشتم کدام است؟
 (۱) ۳۸۴ (۲) -۳۸۴ (۳) ۱۲۸ (۴) -۱۲۸

پاسخ ۱: اگر a ، b و c تشکیل دنباله‌ی هندسی بدهند، آنگاه خواهیم داشت:
 $b^2 = ac$. پس:

$$(4\sqrt{2})^2 = 2^a \times 2^b \Rightarrow 32 = 2^{a+b} \Rightarrow a+b=5$$

پاسخ ۲: گزینه‌ی «۲»



$$r^m = \frac{t_n}{t_1} \Rightarrow r^{6-3} = \frac{-96}{12} \Rightarrow r^3 = -8 \Rightarrow r = -2$$

$$t_3 = t_1 r^2 \Rightarrow 12 = t_1 (-2)^2 \Rightarrow t_1 = 3$$

$$t_8 = t_1 r^7 = 3 \times (-2)^7 \Rightarrow t_8 = -384$$



درج n واسطه‌ی هندسی

بین a و b

کارت ۱۵

فصل ۱

*** درج n واسطه‌ی هندسی بین a و b:** اگر بخواهیم بین دو عدد a و b، n واسطه‌ی هندسی قرار دهیم به طوری که با آن‌ها دنباله‌ی هندسی تشکیل دهند، جمله‌ی اول را a و جمله‌ی n+2 را b در نظر می‌گیریم، پس قدرنسبت برابر می‌شود با:

$$r^{m-n} = \frac{t_m}{t_n} \Rightarrow r^{n+1} = \frac{b}{a}$$

*** نکته‌ی ۱:** اگر t_m ، t_n ، t_p و t_q جمله‌ای از یک دنباله‌ی هندسی باشند و داشته باشیم:

$$m \times n = p \times q$$

آن‌گاه رابطه‌ی زیر همواره برقرار است:

$$t_m \times t_n = t_p \times t_q$$

*** نکته‌ی ۲:** دنباله‌ای هم حسابی است و هم هندسی که در آن کلیه‌ی جمله‌ها مساوی (و مخالف صفر) باشند، در این حالت، قدرنسبت دنباله‌ی حسابی $d=0$ و قدرنسبت دنباله‌ی هندسی $r=1$ خواهد بود.



*** نکته ۳:** با ضربکردن عددی حقیقی در جملات یک دنباله هندسی، قدرنسبت دنباله جدید همان قدرنسبت دنباله اولیه است.



درج n واسطه‌ی هندسی

بین a و b

کارت ۱۵

فصل ۱

۱) بین اعداد 8 و $\frac{81}{2}$ سه واسطه‌ی هندسی درج کرده ایم. قدرنسبت این دنباله را بیابید.

۲) در یک دنباله‌ی هندسی جمله‌ی دوم و هشتم به ترتیب برابر ۴ و ۹ هستند. جمله‌ی چهارم این دنباله را بیابید. (جملات همگی مثبت هستند.)

پاسخ ۱: اگر n واسطه‌ی هندسی بین دو عدد a و b درج کنیم، قدرنسبت از فرمول زیر به دست می‌آید:

$$r^{n+1} = \frac{b}{a}$$

$$r^{3+1} = \frac{81}{8} \Rightarrow r^4 = \frac{81}{16} \Rightarrow r = \frac{3}{2}, r = -\frac{3}{2}$$

پس:

پاسخ ۲: از آنجایی که $2 \times 8 = 4 \times 4$ است، بنابراین طبق درسنامه داریم:

$$t_8 \times t_2 = t_4 \times t_4 \Rightarrow (t_4)^2 = 36 \Rightarrow t_4 = \pm 6$$



چون در صورت سؤال ذکر شده جملات مثبت‌اند، پس تنها 6+ قبول است.