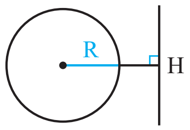
راهبرد حل مسئله

مؤلف درس، سؤال‌های تألیفی و انتخاب سؤال‌های این فصل: سینا محمدپور

مفاهیم اولیه و زاویه‌ها در دایره

❖ در حل سؤالات مبحث مفاهیم اولیه که عموماً مرتبط با بررسی وضعیت یک خط و یک دایره می‌باشد، به‌ترتیب زیر عمل می‌کنیم:



مرحلهٔ ۱ به‌دست آوردن فاصلهٔ خط تا مرکز دایرهٔ مذکور (OH) .

مرحلهٔ ۲ محاسبهٔ طول شعاع دایره (R).

مرحلهٔ ۳ مقایسهٔ فاصلهٔ خط تا مرکز دایره با طول شعاع دایره.

مرحلهٔ ۴

$OH > R \Rightarrow$ خط و دایره هیچ نقطهٔ مشترکی ندارند

$OH = R \Rightarrow$ خط و دایره در یک نقطه مشترک‌اند

$OH < R \Rightarrow$ خط و دایره در دو نقطه مشترک‌اند

نکته

موضوع دیگری که جز مفاهیم اولیه شمرده می‌شود و دانستن آن برای شما واجب است این است که شعاع یک دایره بر خط مماس بر دایره در نقطهٔ تماس عمود است.

❖ در حل سؤالات مبحث زاویهٔ مرکزی عموماً به‌ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

مرحلهٔ ۱ رجوع به تعریف زاویهٔ مرکزی

مرحلهٔ ۲ مشخص نمودن زوایای مرکزی و کمان‌های متناظر با این زوایا

مرحلهٔ ۳ محاسبهٔ زوایا با استفاده از اندازهٔ کمان‌ها (یا بالعکس)

نکته

در سؤالاتی که با محاسبهٔ طول یک وتر روبه‌رو هستیم، باید به ارتباط بین کمان‌ها و وترهای متناظر آن‌ها توجه داشت و قضیهٔ زیر در روند حل این سؤالات بسیار کاربردی است.

قضیه

در یک دایره، کمان‌های نظیر دو وتر مساوی با هم برابرند و بالعکس.

ضمناً به این نکته توجه داشته باشید که اضلاع زاویهٔ مرکزی با یکدیگر مساوی و برابر با شعاع دایره هستند.

❖ در حل سؤالات مبحث زاویهٔ محاطی در این کتاب، عموماً به‌ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

مرحلهٔ ۱ رجوع به تعریف زاویهٔ محاطی

مرحلهٔ ۲ مشخص نمودن زوایای محاطی و کمان‌های روبه‌رو به این زوایا

مرحلهٔ ۳ محاسبهٔ زوایا با استفاده از اندازهٔ کمان‌ها (یا بالعکس)

نکته

در حل سؤالات این مبحث به ارتباط بین زاویهٔ مرکزی و محاطی روبه‌رو به یک کمان، دقت داشته باشید.

❖ در حل سؤالات مبحث زاویهٔ ظلی، عموماً به‌ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

مرحلهٔ ۱ رجوع به تعریف زاویهٔ ظلی

مرحلهٔ ۲ مشخص نمودن زوایای ظلی و کمان‌های روبه‌رو به این زوایا

مرحلهٔ ۳ محاسبهٔ زوایا با استفاده از اندازهٔ کمان‌ها (یا بالعکس)

نکته

در حل سؤالات ترکیبی این مبحث، به ارتباط بین زاویهٔ محاطی و ظلی روبه‌رو به یک کمان دقت داشته باشید.

❖ در حل سؤالات مبحث زاویهٔ بین دو وتر، عموماً به‌ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

مرحلهٔ ۱ مشخص نمودن زوایا و کمان‌های مرتبط با این زوایا.

مرحلهٔ ۲ محاسبهٔ زوایا با استفاده از اندازهٔ کمان‌ها (یا بالعکس)

البته توجه به این نکته که زاویهٔ ایجاد شده، حاصل از برخورد وترها درون دایره است یا بیرون دایره، الزامی است.

نکته

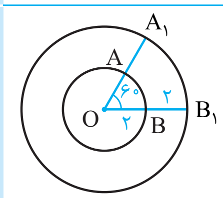
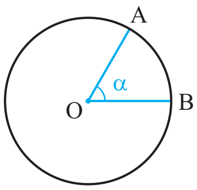
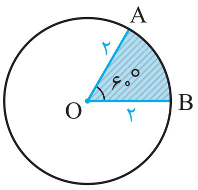
در حل سؤالات ترکیبی این مبحث، به زوایای محاطی، ظلی و مرکزی روبه‌رو به کمان‌هایی که دو وتر روی دایره جدا نموده‌اند، دقت داشته باشید.

۱. مفاهیم اولیه و زاویه‌ها در دایره

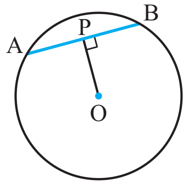
مفاهیم اولیه

	مرجع
۱. یک خط و یک دایره نسبت به هم چه وضعیتی می‌توانند داشته باشند؟ (با رسم شکل توضیح دهید)	مرتبط با صفحه‌های ۱۰ تا ۱۱ کتاب درسی
۲. با انتخاب گزینهٔ مناسب، گزارهٔ زیر را تکمیل کنید. در حالتی که خط و دایره.................. اصطلاحاً گفته می‌شود خط بر دایره مماس است. الف) هیچ نقطهٔ اشتراکی نداشته باشند. ب) تنها در یک نقطه مشترک باشند.	مرتبط با صفحه‌های ۱۰ تا ۱۱ کتاب درسی
۳. جاهای خالی را با عبارات مناسب پُر کنید. الف) اگر خط و دایره دو نقطهٔ اشتراک داشته باشند، خط و دایره را .... می‌نامند. در این حالت خط را نسبت به دایره .... می‌نامیم. ب) در صفحه، یک خط و دایره بر هم ....؛ اگر و تنها اگر این خط بر شعاع دایره در نقطهٔ تماس عمود باشد.	مرتبط با صفحه‌های ۱۰ تا ۱۱ کتاب درسی

زاویه‌ها در دایره

۴. واژه‌های زیر را تعریف کنید. الف) زاویهٔ مرکزی ب) وتر دایره	مرتبط با صفحه‌های ۱۱ تا ۱۳ کتاب درسی
۵. با توجه به شکل و اندازه‌های مربوطه، طول کمان‌های زیر را مشخص کنید. الف) طول $\overset{\frown}{AB}$ ب) طول $\overset{\frown}{A_۱B_۱}$ 	مرتبط با کاردرکلاس ۲ صفحه ۱۳ کتاب درسی
۶. اگر زاویهٔ مرکزی قطاعی از دایرهٔ $C(O,R)$ برحسب درجه مساوی α باشد: الف) نشان دهید طول کمان AB برابر است با: $L=\frac{\pi R}{۱۸۰}\alpha$. ب) اگر $\alpha=۳۰°$ و $R=۱$ باشد، طول کمان AB را به‌دست آورید. 	مرتبط با صفحه‌های ۱۱ تا ۱۳ کتاب درسی
۷. با توجه به شکل مقابل، مساحت قطاع هاشورخورده را به‌دست آورید. 	مرتبط با کار در کلاس ۲ صفحه ۱۳ کتاب درسی
۸. ثابت کنید در یک دایره، کمان‌های نظیر دو وتر مساوی، با هم برابرند.	**امتحان نهایی ــ نوبت شهریور ۹۵** مرتبط با صفحه‌های ۱۱ تا ۱۴ کتاب درسی
۹. ثابت کنید در هر دایره، قطر عمود بر هر وتر، آن وتر و کمان‌های نظیر آن وتر را نصف می‌کند.	**مشهد – هیات امنایی شهید جباریان (۷ تکرار)** مرتبط با فعالیت ۳ صفحه ۱۳ کتاب درسی

۱۰. با توجه به شکل روبه‌رو اگر در دایرهٔ $C(O,10)$، $OP = 6$ باشد، آن‌گاه طول AP و AB را به‌دست آورید.



امتحان نهایی ــ نوبت دی ۹۳
مرتبط با صفحه‌های ۱۱ تا ۱۳ کتاب درسی

۱۱. ثابت کنید در هر دایره، خطی که مرکز دایره را به وسط کمان نظیر یک وتر از آن وتر وصل می‌کند بر آن وتر عمود است.

یزد – روش نوین
(۵ تکرار)
مرتبط با صفحهٔ ۱۱ تا ۱۳ کتاب درسی

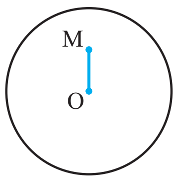
۱۲. ثابت کنید در یک دایره، از دو وتر نابرابر، آن که بزرگ‌تر است به مرکز دایره نزدیک‌تر است.

تهران – شهدای هفتم تیر
(۱۴ تکرار)
مرتبط با تمرین ۸ صفحهٔ ۱۷ کتاب درسی

۱۳. ثابت کنید کوچک‌ترین وتری که از یک نقطه واقع در درون یک دایره می‌توان رسم کرد، وتری است که بر قطر گذرنده از آن نقطه، عمود است.

تهران – فاطمیه
(۶ تکرار)
مرتبط با صفحه‌های ۱۱ تا ۱۳ کتاب درسی

۱۴. در شکل مقابل، $OM = 3$ و $C(O,5)$، اندازهٔ کوتاه‌ترین وتری که از نقطهٔ M می‌گذرد را بیابید.



مرتبط با صفحه‌های ۱۱ تا ۱۳ کتاب درسی

۱۵. ثابت کنید در یک دایره، وترهای مساوی از مرکز دایره به یک فاصله‌اند.

کرمانشاه – هماهنگ استانی
(۸ تکرار)
مرتبط با صفحه‌های ۱۱ تا ۱۳ کتاب درسی

۱۶. زاویهٔ محاطی را تعریف کنید.

مرتبط با صفحهٔ ۱۲ کتاب درسی

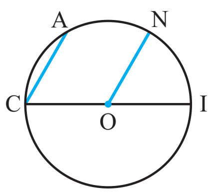
۱۷. ثابت کنید اندازهٔ هر زاویهٔ محاطی برابر با نصف کمان روبه‌روی آن است.

قزوین – نمونه دولتی علامه جعفری
(۱۲ تکرار)
مرتبط با صفحه‌های ۱۱ تا ۱۴ کتاب درسی

۱۸. با استفاده از تعریف زاویهٔ محاطی، نشان دهید مجموع زاویه‌های داخلی هر مثلث 180° است.

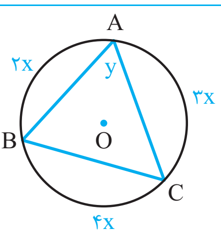
امتحان نهایی – نوبت دی ۹۵
(۸ تکرار)
مرتبط با صفحهٔ ۱۲ کتاب درسی

۱۹. در دایره به مرکز O و به قطر CI، داریم $CA \parallel ON$. ثابت کنید $\overset{\frown}{AN} = \overset{\frown}{NI}$.



البرز – پژوهندگان علم
(۵ تکرار)
مرتبط با صفحه‌های ۱۱ تا ۱۴ کتاب درسی

۲۰. در شکل زیر اندازهٔ زاویه‌های x و y را به‌دست آورید.

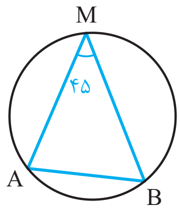


تهران – غیردولتی اردیبهشت
(۴ تکرار)
مرتبط با صفحه‌های ۱۱ تا ۱۴ کتاب درسی

۲۱. دایرهٔ $C(O,R)$ مفروض است. وتر AB به‌طول $\sqrt{۲}$ سانتی‌متر داده شده است. با توجه به شکل، اگر $A\widehat{M}B = ۴۵^\circ$ باشد، آن‌گاه مطلوب است محاسبهٔ:

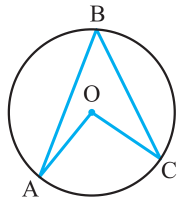
الف) شعاع دایره

ب) فاصلهٔ مرکز دایره از وتر AB



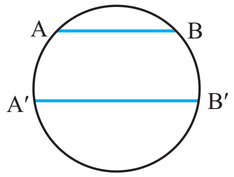
گرمسار – شهید ثانی
(۳ تکرار)
مرتبط با صفحه‌های ۱۱ تا ۱۴ کتاب درسی

۲۲. در دایره به مرکز O، اگر $A\widehat{O}C = (۳\alpha + ۱۲)^\circ$ و $A\widehat{B}C = (\alpha + ۱۶)^\circ$ باشد، مقدار α و اندازهٔ زاویه‌های مرکزی $A\widehat{O}C$ و محاطی $A\widehat{B}C$ را تعیین کنید.



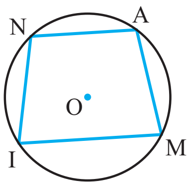
تهران – غیردولتی ندای آزادی
(۳ تکرار)
مرتبط با صفحه‌های ۱۱ تا ۱۴ کتاب درسی

۲۳. ثابت کنید در هر دایره کمان‌های محصور بین دو وتر موازی با هم برابرند.



کهنوج – فرهیختگان
(۳ تکرار)
مرتبط با کار در کلاس ۱
صفحهٔ ۱۵ کتاب درسی

۲۴. در شکل مقابل، تمامی رئوس چهارضلعی $AMIN$ بر روی یک دایره واقع‌اند. اگر $AM = NI$ باشد، آن‌گاه ثابت کنید $AN \parallel MI$.

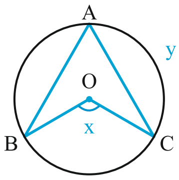


تهران – غیردولتی سما
(۴ تکرار)
مرتبط با صفحه‌های ۱۱ تا ۱۴ کتاب درسی

۲۵. در شکل روبه‌رو $AB = AC$ می‌باشد. در این صورت:

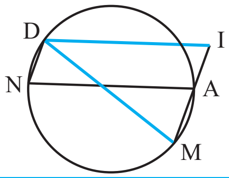
الف) اگر $\widehat{y} = ۱۶۰^\circ$، آنگاه $\widehat{x}$ را به‌دست آورید.

ب) اگر $\widehat{x} = ۱۳۰^\circ$ باشد، اندازهٔ کمان $\widehat{y}$ را به‌دست آورید.



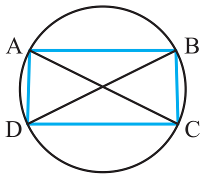
اراک – نمونه دولتی شهید مطهری
(۳ تکرار)
مرتبط با صفحه‌های ۱۱ تا ۱۴ کتاب درسی

۲۶. در شکل روبه‌رو چهارضلعی $DIAN$ یک متوازی‌الاضلاع است و نقطه‌های A، I و M بر یک خط راست قرار دارند. ثابت کنید $DM = DI$.



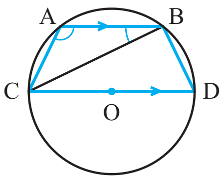
خرم آباد – هماهنگ استانی
(۶ تکرار)
مرتبط با صفحه‌های ۱۱ تا ۱۴ کتاب درسی

۲۷. در شکل مقابل اگر $AD = BC$ باشد، ثابت کنید $AC = BD$.



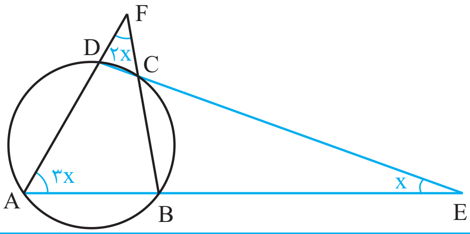
سمنان – نمونه رشد
(۶ تکرار)
مرتبط با صفحه‌های ۱۱ تا ۱۴ کتاب درسی

۲۸. در شکل زیر، وتر AB با قطر CD موازی است، در مثلث ABC، مقدار $\widehat{A} - \widehat{B}$ را به‌دست آورید.



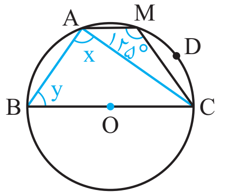
مرتبط با صفحه‌های ۱۱ تا ۱۴ کتاب درسی

۲۹. با توجه به شکل، x را به‌دست آورید.



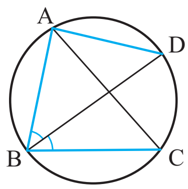
تهران – غیردولتی اردیبهشت
(۵ تکرار)
مرتبط با صفحه‌های ۱۱ تا ۱۴ کتاب درسی

۳۰. اندازهٔ x و y را در شکل زیر تعیین کنید.



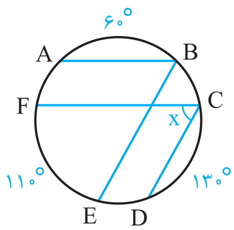
مرتبط با صفحه‌های ۱۱ تا ۱۴ کتاب درسی

۳۱. نقاط A ، B، C و D روی محیط یک دایره قرار دارند. اگر $B\widehat{A}C = ۷۰^\circ$ و BD نیمساز زاویهٔ B باشد، حاصل $B\widehat{A}D - A\widehat{B}D$ را به‌دست آورید.



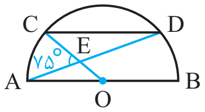
مرتبط با صفحه‌های ۱۱ تا ۱۴ کتاب درسی

۳۲. در شکل زیر، $\widehat{EF} = ۱۱۰^\circ$ ، $\widehat{AB} = ۶۰^\circ$ ، $\widehat{CD} = ۱۳۰^\circ$ ، $CD \parallel BE$ و $AB \parallel FC$ می‌باشد. زاویهٔ $F\widehat{C}D$ چه‌قدر است؟



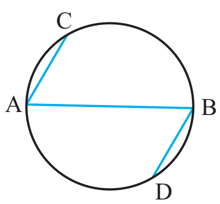
تهران – غیردولتی نور
(۴ تکرار)
مرتبط با صفحه‌های ۱۱ تا ۱۴ کتاب درسی

۳۳. در شکل مقابل، O مرکز نیم‌دایره است و $AB \parallel CD$. اندازهٔ کمان CD را به‌دست آورید.



مرتبط با تمرین ۴
صفحهٔ ۱۷ کتاب درسی

۳۴. در شکل مقابل، AB قطری از دایره است و وترهای AC و BD موازی‌اند. ثابت کنید $AC = BD$.



مرتبط با تمرین ۵
صفحهٔ ۱۷ کتاب درسی

۳۵. با انتخاب گزینهٔ مناسب، جملهٔ زیر را تکمیل کنید.
زاویه‌ای که رأس آن روی دایره قرار دارد و یکی از اضلاع آن مماس بر دایره و ضلع دیگر آن شامل وتری از دایره باشد، زاویهٔ .... نامیده می‌شود.

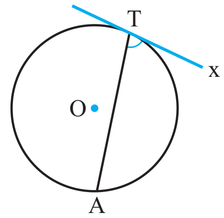
الف) ظلی ب) محاطی

مرتبط با صفحه‌های ۱۱ تا ۱۵ کتاب درسی

۳۶. ثابت کنید اندازهٔ هر زاویهٔ ظلی برابر نصف کمان روبه‌روی آن است.

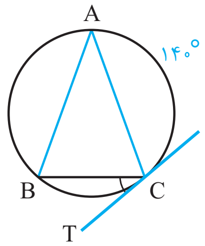
بناب – نمونه ولیعصر
(۱۱ تکرار)
مرتبط با صفحه‌های ۱۱ تا ۱۵ کتاب درسی

۳۷. اگر اندازهٔ زاویهٔ ظلی ATx مساوی $(۲\alpha-۶)^\circ$ و اندازهٔ کمان $\overset{\frown}{AT}$ برابر $(۳\alpha+۳۳)^\circ$ باشد، مقدار α و اندازهٔ زاویهٔ ATx را بیابید.



نمونه دولتی چمران
(۲ تکرار)
مرتبط با صفحه‌های ۱۱ تا ۱۵ کتاب درسی

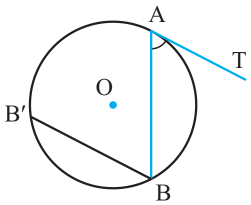
۳۸. در شکل روبه‌رو، $AB=AC$ ، CT مماس بر دایره در نقطهٔ C و $\overset{\frown}{AC}=۱۴۰^\circ$ است. اندازهٔ زاویهٔ BCT را بیابید.



امتحان نهایی – خرداد ۹۶
(۴ تکرار)
مرتبط با صفحه‌های ۱۱ تا ۱۵ کتاب درسی

۳۹. زاویهٔ ظلی TAB در دایره‌ای به مرکز O داده شده است. به کمک خط BB' که موازی خط مماس AT رسم شده است ثابت کنید که:

$$T\hat{A}B=\frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}$$

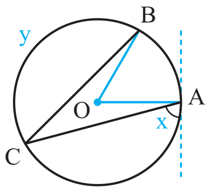


خرم آباد–هماهنگ استانی
(۳ تکرار)
مرتبط با صفحه‌های ۱۱ تا ۱۵ کتاب درسی

۴۰. از نقطهٔ A به فاصلهٔ ۶ از مرکز دایره‌ای به شعاع ۳، دو مماس بر آن دایره رسم شده است. زاویهٔ بین دو مماس را به‌دست آورید.

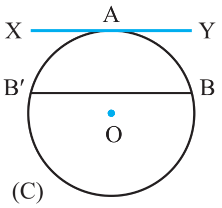
مرتبط با صفحه‌های ۱۱ تا ۱۵ کتاب درسی

۴۱. اگر $AC=BC$ و $A\hat{O}B=۶۰^\circ$ ، آن‌گاه مقادیر x و y را بیابید.



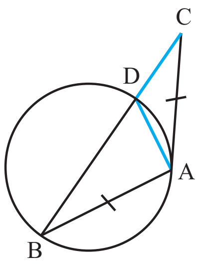
مرتبط با صفحه‌های ۱۱ تا ۱۵ کتاب درسی

۴۲. خط XY در نقطهٔ A بر دایرهٔ (C) مماس است، وتر BB' از دایره را موازی XY رسم کرده‌ایم. ثابت کنید: $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{AB'}$.



امتحان نهایی – شهریور ۹۳
(۴ تکرار)
مرتبط با صفحه‌های ۱۱ تا ۱۵ کتاب درسی

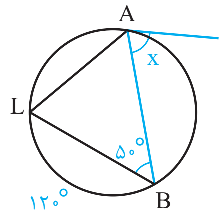
۴۳. در شکل زیر مماس AC و وتر AB مساوی‌اند. خط BC دایره را در نقطهٔ D قطع کرده است. ثابت کنید مثلث ADC متساوی‌الساقین است.



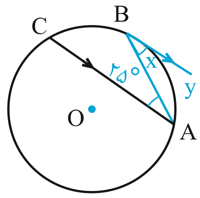
شیراز – فرزانگان
(۵ تکرار)
مرتبط با صفحه‌های ۱۱ تا ۱۵ کتاب درسی

۴۴. x و y را در هریک از شکل‌های زیر تعیین کنید.

الف)

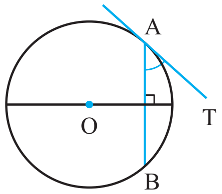


ب)



نهران- حضرت زهرا(س)
(۵ تکرار)
مرتبط با صفحه‌های ۱۱ تا ۱۵ کتاب درسی

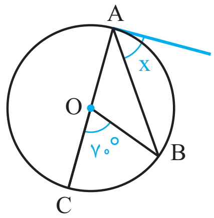
۴۵. زاویهٔ ظلی در دایرهٔ به مرکز O داده شده است. با استفاده از ویژگی قطر عمود بر وتر، ثابت کنید که $T\widehat{A}B = \dfrac{\widehat{AB}}{۲}$.



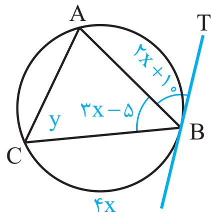
عجب‌شیر- ملاصدرا
(۴ تکرار)
مرتبط با صفحه‌های ۱۱ تا ۱۵ کتاب درسی

۴۶. در شکل‌های زیر x و y را پیدا کنید.

الف)

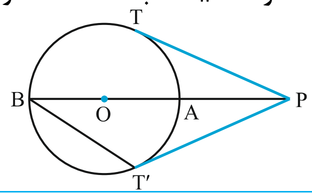


ب)



گرگان- عمار یاسر
(۳ تکرار)
مرتبط با صفحه‌های ۱۱ تا ۱۵ کتاب درسی

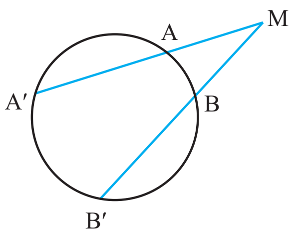
۴۷. در شکل زیر PT و PT' بر دایره مماس بوده و AB قطر دایره است. اگر $PT \parallel BT'$ باشد، آنگاه اندازهٔ کمان $\widehat{TAT'}$ را به‌دست آورید.



مرتبط با صفحه‌های ۱۱ تا ۱۵ کتاب درسی

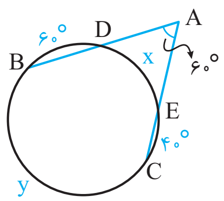
۴۸. در شکل مقابل ثابت کنید.

$$\widehat{M} = \frac{\widehat{A'B'} - \widehat{AB}}{۲}$$



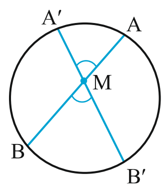
مشهد- غیرانتفاعی فرهیختگان
(۱۰ تکرار)
مرتبط با فعالیت ۱
صفحهٔ ۱۵ کتاب درسی

۴۹. در شکل زیر، کمان‌های BD و CE به‌ترتیب ۶۰ و ۴۰ درجه و $\widehat{A} = ۶۰^\circ$ است. x و y را بیابید.



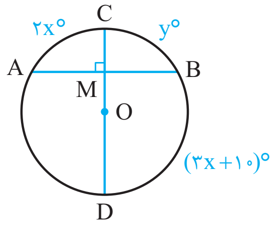
قزوین- نمونه دولتی علامه جعفری
(۴ تکرار)
مرتبط با صفحه‌های ۱۱ تا ۱۶ کتاب درسی

۵۰. ثابت کنید اندازهٔ زاویهٔ بین دو وتر متقاطع درون دایره برابر است با نصف مجموع اندازهٔ کمان‌هایی از دایره که به اضلاع زاویه و امتداد اضلاع زاویه محدودند، یعنی $\widehat{M} = \dfrac{\widehat{AA'} + \widehat{BB'}}{۲}$.



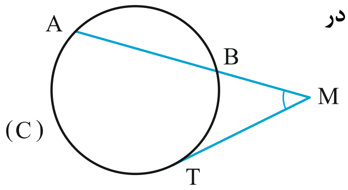
یزد- نمونه دولتی ملک ثابت
(۱۰ تکرار)
مرتبط با فعالیت ۲
صفحهٔ ۱۶ کتاب درسی

۵۱. در شکل مقابل قطر CD بر وتر AB عمود است. مقادیر x و y را بیابید.



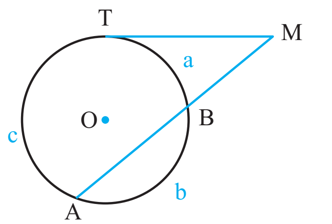
تهران – سرزمین پارس
(۷ تکرار)
مرتبط با صفحه‌های ۱۱ تا ۱۶ کتاب درسی

۵۲. خط مماس بر دایرهٔ (C) در نقطهٔ T، امتداد وتر AB از این دایره را در نقطهٔ M قطع کرده است. ثابت کنید: $A\hat{M}T = \frac{\widehat{AT} - \widehat{BT}}{۲}$.



مرتبط با تمرین ۱
صفحهٔ ۱۶ کتاب درسی

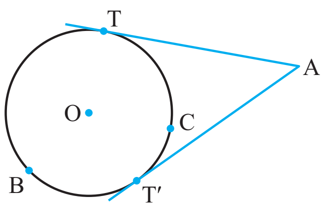
۵۳. خط مماس بر دایره در نقطهٔ T و امتداد وتر AB در نقطهٔ M متقاطع‌اند. با فرض $\widehat{TB} = a$، $\widehat{BA} = b$، $\widehat{AT} = c$ و $\frac{a}{۱} = \frac{b}{۴} = \frac{c}{۵}$. اندازهٔ زاویهٔ M را تعیین کنید.



امتحان نهایی – خرداد ۹۴
(۶ تکرار)
مرتبط با صفحه‌های ۱۱ تا ۱۶ کتاب درسی

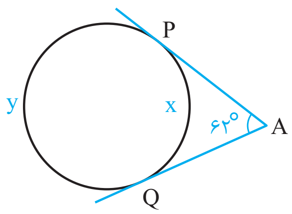
۵۴. ثابت کنید زاویهٔ بین دو خط مماس رسم شده از نقطهٔ A خارج دایره بر آن (AT′, AT) برابر قدرمطلق نصف تفاضل دو کمان ایجاد شده بین نقاط T و T′ است.

$$T\hat{A}T' = \left|\frac{\widehat{TBT'} - \widehat{TCT'}}{۲}\right|$$



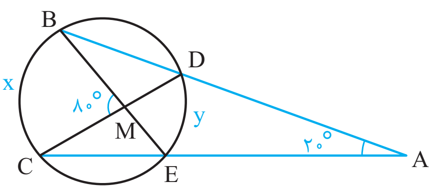
مرتبط با تمرین ۱
صفحهٔ ۱۶ کتاب درسی

۵۵. x و y را بیابید.



تهران – آیت‌الله سعیدی
(۵ تکرار)
مرتبط با صفحه‌های ۱۱ تا ۱۷ کتاب درسی

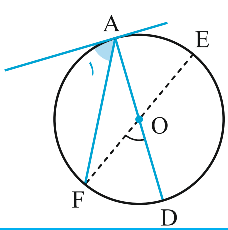
۵۶. در شکل زیر $\hat{x}$ و $\hat{y}$ را به‌دست آورید. (با ذکر دلیل)



گرمسار – شهید ثانی
(۴ تکرار)
مرتبط با صفحه‌های ۱۱ تا ۱۷ کتاب درسی

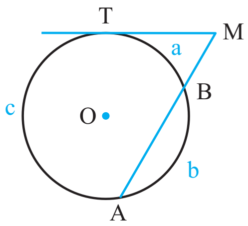
۵۷. در شکل زیر، O مرکز دایره و $\hat{A}_۱ = ۵۶^\circ$ است. کمان AE چند درجه است؟

۱) ۶۸　　۲) ۶۶
۳) ۶۴　　۴) ۶۴



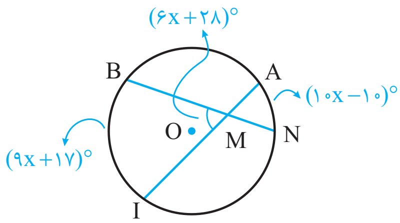
تهران – حضرت زهرا (س)
(۲ تکرار)
مرتبط با صفحه‌های ۱۱ تا ۱۷ کتاب درسی

۵۸. در شکل زیر MT در نقطهٔ T بر دایره مماس است. اگر $\widehat{M}=۶۰^\circ$ و $b=۱۰۰^\circ$ باشد، اندازه کمان‌های a و c را به‌دست آورید.



تبریز - نمونه آذری
(۵ تکرار)
مرتبط با صفحه‌های ۱۱ تا ۱۷ کتاب درسی

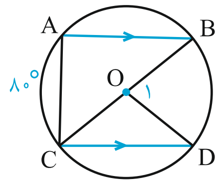
۵۹. در شکل زیر، x و اندازهٔ زاویهٔ $B\widehat{M}I$ را تعیین کنید.



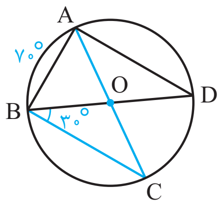
تهران - رضوان
(۴ تکرار)
مرتبط با صفحه‌های ۱۱ تا ۱۷ کتاب درسی

۶۰. در هر شکل، اندازه‌های خواسته شده را به‌دست آورید.

الف) $\widehat{AB}$
ب) $\widehat{O}_1$
ج) $\widehat{A}$

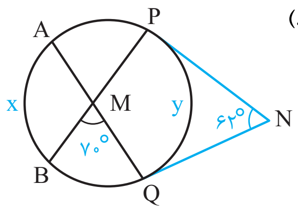


الف) $\widehat{D}$
ب) $\widehat{AD}$
ج) $\widehat{ABC}$



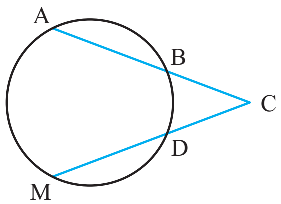
مرتبط با صفحه‌های ۱۱ تا ۱۷ کتاب درسی

۶۱. در شکل مقابل x و y را بیابید. (MP و MQ مماس بر دایره هستند.)



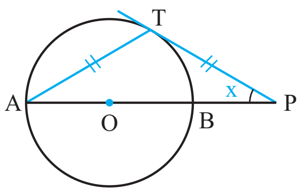
آمل - نمونه دولتی دکتر جمشیدنژاد
(۴ تکرار)
مرتبط با صفحه‌های ۱۱ تا ۱۷ کتاب درسی

۶۲. در شکل مقابل $\frac{\widehat{BD}}{۱}=\frac{\widehat{AB}}{۲}=\frac{\widehat{MD}}{۳}=\frac{\widehat{AM}}{۴}$ اندازهٔ زاویهٔ MCB چند درجه است؟



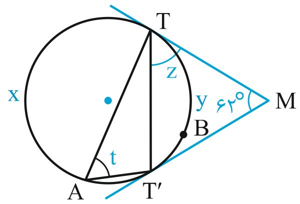
مرتبط با صفحه‌های ۱۱ تا ۱۷ کتاب درسی

۶۳. در شکل مقابل مماس PT مساوی AT و O مرکز دایره است. اندازهٔ زاویهٔ $\widehat{P}$ چند درجه است؟



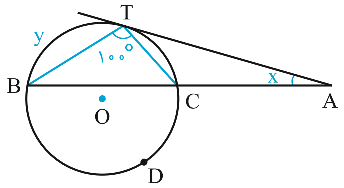
مرتبط با صفحهٔ ۱۱ تا ۱۷ کتاب درسی

۶۴. مقادیر x ، y ، z و t را در شکل مقابل به‌دست آورید. (MT و MT′ مماس بر دایره و $\widehat{M}=۶۲^\circ$)



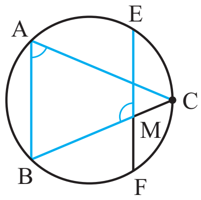
مرتبط با صفحه‌های ۱۱ تا ۱۷ کتاب درسی

۶۵. در شکل مقابل x و y را بیابید. $(T\widehat{B}C = 2T\widehat{A}C)$



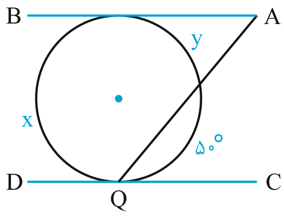
مرتبط با صفحه‌های ۱۱ تا ۱۵ کتاب درسی

۶۶. در شکل زیر، C وسط کمان EF می‌باشد. مقدار $B\widehat{M}E + B\widehat{A}C$ را بیابید.



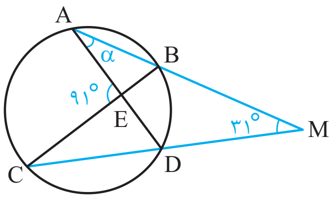
مرتبط با صفحه‌های ۱۱ تا ۱۷ کتاب درسی

۶۷. در شکل مقابل، $AB \parallel DC$، اندازهٔ کمان‌های x و y را به‌دست آورید.



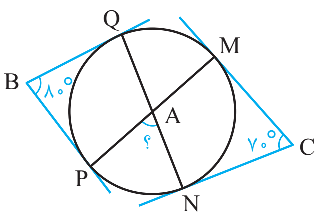
مرتبط با صفحه‌های ۱۱ تا ۱۷ کتاب درسی

۶۸. در شکل مقابل اندازهٔ زاویهٔ α را به‌دست آورید.



مرتبط با تمرین ۲
صفحهٔ ۱۷ کتاب درسی

۶۹. در شکل مقابل، اضلاع زاویه‌های B و C بر دایره مماس‌اند. اندازهٔ زاویهٔ A چند درجه است؟

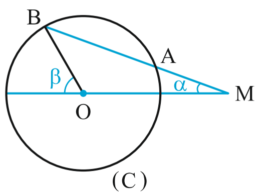


مرتبط با تمرین ۳
صفحهٔ ۱۷ کتاب درسی

۷۰. خط d مفروض است. مرکزهای همهٔ دایره‌هایی که شعاع آنها مقدار ثابت R است و بر این خط مماس هستند، روی چه شکلی قرار دارند؟ این شکل چه وضعیتی نسبت به d دارد؟

مرتبط با صفحه‌های ۱۰ و ۱۱ کتاب درسی

۷۱. دایرهٔ $C(O,R)$ مفروض است. از نقطهٔ M در خارج دایره خطی چنان رسم کرده‌ایم که دایره را در دو نقطهٔ A و B قطع کرده است و $MA = R$. نشان دهید: $\beta = 3\alpha$.



مرتبط با تمرین ۶
صفحهٔ ۱۷ کتاب درسی

۷۲. دو خط m و n در نقطهٔ A متقاطع‌اند. چه تعداد دایره می‌توان رسم کرد که مرکز آن روی خط n و شعاع آن ۲ سانتی‌متر بوده و بر خط m مماس باشد. (با ذکر دلیل)

مرتبط با صفحه‌های ۱۰ و ۱۱ کتاب درسی

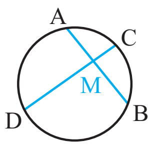
راهبرد حل مساله

رابطه‌های طولی در دایره

❖ در حل سؤالات مربوط به روابط طولی وترها و مماس‌های متقاطع از روابطی که به تفکیک در زیر آمده استفاده می‌کنیم:

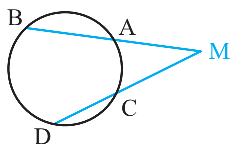
❶ دو وتر درون دایره یکدیگر را قطع می‌کنند:

$$MA \cdot MB = MC \cdot MD$$



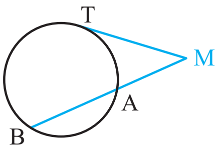
❷ دو وتر بیرون از دایره یکدیگر را قطع می‌کنند:

$$MA \cdot MB = MC \cdot MD$$



❸ خط مماس بر دایره و امتداد یک وتر، یکدیگر را قطع می‌کنند:

$$MT^{۲} = MA \cdot MB$$

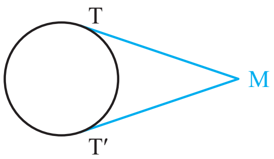


❖ در حل سؤالات مربوط به رسم مماس بر دایره باید به نکات زیر توجه کنیم:

❶ روش رسم خط مماس بر دایره از نقطه‌ای بیرون از آن تنها با استفاده از خط‌کش و پرگار را مطالعه کنید.

❷ استفاده از این قضیه که مماس‌های مرسوم به یک دایره از هر نقطه خارج آن با هم برابرند.

$$MT = MT'$$



❸ استفاده از قضیهٔ فیثاغورس نه‌تنها در حل سؤالات این مبحث بلکه به‌طور کلی برای حل سؤالات مربوط به رابطه‌های طولی در دایره بسیار کاربردی است.

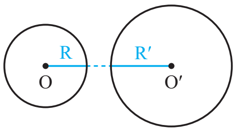
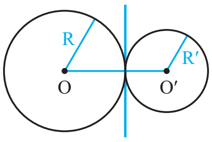
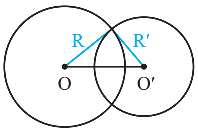
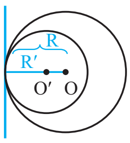
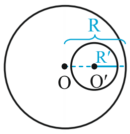
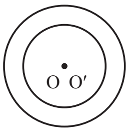
❖ در حل سؤالات مبحث حالت‌های دو دایره نسبت به هم و مماس مشترک‌ها عموماً به‌ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

مرحله ۱ مشخص نمودن شعاع‌های دو دایره و خط‌المرکزین آنها

مرحله ۳ محاسبهٔ طول شعاع‌ها و خط‌المرکزین

مرحله ۳ مقایسهٔ حاصل جمع و همچنین قدرمطلق تفاضل طول شعاع‌های دو دایره با طول خط‌المرکزین.

حالت‌هایی که دو دایرهٔ $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ با فرض $OO' = d$ می‌توانند نسبت به هم داشته باشند، به قرار زیر است:

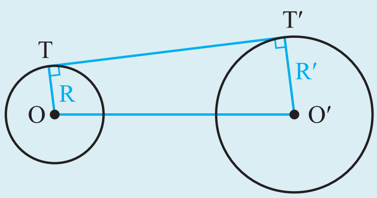
دو دایرهٔ برون هم (متخارج)	$d > R + R'$	
دو دایرهٔ مماس برون	$d = R + R'$	
دو دایرهٔ متقاطع	$\lvert R - R' \rvert < d < R + R'$	
دو دایرهٔ مماس درون	$d = \lvert R - R' \rvert$	
دو دایرهٔ متداخل	$d < \lvert R - R' \rvert$	
دو دایرهٔ هم‌مرکز	$d = 0$	

نکته

در حل سؤالات مربوط به طول مماس مشترک داخلی و خارجی دو دایره از روابط زیر که با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس حاصل شده‌اند، استفاده می‌کنیم:

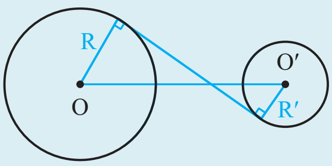
❶ طول مماس مشترک خارجی دو دایرهٔ $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ با فرض $OO' = d$ به قرار زیر است:

$$TT' = \sqrt{d^2 - (R - R')^2}$$



❷ طول مماس مشترک داخلی دو دایره:

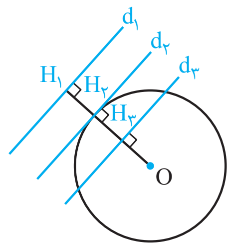
$$TT' = \sqrt{d^2 - (R + R')^2}$$



۱. دایره

پاسخ تشریحی:
سینا محمدپور

۱. همان‌طور که در شکل مشاهده می‌کنید، این دو نسبت به هم می‌توانند ۳ حالت داشته باشند:



حالت ۱: خط و دایره هیچ نقطهٔ اشتراکی نداشته باشند؛ این حالت زمانی رخ می‌دهد که فاصلهٔ خط از مرکز دایره بیشتر از شعاع دایره باشد. (خط d_1) $OH_1 > R$

حالت ۲: خط و دایره تنها در یک نقطه مشترک باشند؛ این حالت زمانی رخ می‌دهد که فاصلهٔ خط تا مرکز دایره با شعاع دایره برابر باشد. (خط d_2) $OH_2 = R$

حالت ۳: خط و دایره دو نقطهٔ اشتراک داشته باشند؛ این حالت زمانی رخ می‌دهد که فاصلهٔ خط از مرکز دایره کمتر از شعاع دایره باشد. (خط d_3) $OH_3 < R$

---

۲. در حالتی که خط و دایره تنها در یک نقطه مشترک باشند، اصطلاحاً گفته می‌شود خط بر دایره مماس است. بنابراین گزینهٔ «ب» صحیح است.

---

۳. الف) متقاطع ـ قاطع

ب) مماس‌اند.

---

۴. الف) زاویه‌ای است که رأس آن بر مرکز دایره واقع است.

ب) پاره‌خطی که دو سر آن روی دایره باشد.

۵.

$$\frac{\text{طول کمان}}{\text{محیط دایره}} = \frac{\text{اندازهٔ کمان}}{۳۶۰^\circ}$$

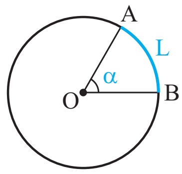
$$\Rightarrow \begin{cases} \text{الف)}\ \dfrac{۶۰}{۳۶۰} = \dfrac{\text{طول } \overset{\frown}{AB}}{۴\pi} \Rightarrow \text{طول } \overset{\frown}{AB} = \dfrac{۲}{۳}\pi \\ \text{ب)}\ \dfrac{۶۰}{۳۶۰} = \dfrac{\text{طول } \overset{\frown}{A_1B_1}}{۸\pi} \Rightarrow \text{طول } \overset{\frown}{A_1B_1} = \dfrac{۴}{۳}\pi \end{cases}$$

---

۶. الف) با توجه به این‌که محیط دایره یک کمان به اندازهٔ °۳۶۰ است، لذا داریم:

$$\frac{\text{طول کمان } AB}{\text{محیط دایره}} = \frac{\text{اندازهٔ کمان } AB}{۳۶۰^\circ}$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha}{۳۶۰} = \frac{L}{۲\pi R} \Rightarrow L = \frac{\pi R}{۱۸۰}\alpha$$

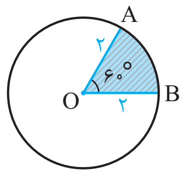


ب)

$$\alpha = ۳۰^\circ\ ,\ R = ۱ \Rightarrow L = \frac{\pi(۱)}{۱۸۰} \times (۳۰) = \frac{\pi}{۶}$$

---

۷. می‌دانیم مساحت قطاعی از دایره که زاویهٔ مرکزی آن قطاع برابر α و شعاع آن برابر R باشد، از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود:



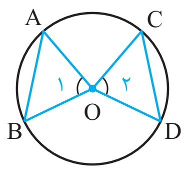
$$S = \frac{\pi R^2 \alpha}{۳۶۰}$$

لذا داریم:

$$S_{\text{قطاع هاشور خورده}} = \frac{\pi(۲)^2(۶۰)}{۳۶۰} = \frac{۲\pi}{۳}$$

---

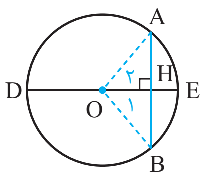
۸. با توجه به برابری وترهای مربوطه داریم:



$$\begin{cases} OA = OC \\ OB = OD \\ AB = CD \end{cases} \xrightarrow{\text{(ضضض)}} \overset{\triangle}{OAB} \cong \overset{\triangle}{OCD}$$

$$\text{اجزای متناظر}:\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \Rightarrow \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$$

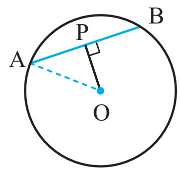
۹.



$$\begin{cases} OA = OB \ \text{شعاع دایره} \\ OH = OH \ \text{مشترک} \\ O\hat{H}A = O\hat{H}B = ۹۰^\circ \end{cases} \xrightarrow{\text{(وتر و یک ضلع)}} \overset{\triangle}{OHA} \cong \overset{\triangle}{OHB}$$

$$\xrightarrow[\text{متناظر}]{\text{اجزای}} \begin{cases} AH = BH = \dfrac{۱}{۲}AB \\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \Rightarrow \overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{BE} \end{cases}$$

۱۰.



ابتدا با رسم شعاع OA و استفاده از رابطهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ OPA داریم:

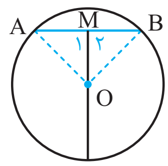
$$OP^۲ + AP^۲ = OA^۲ \xrightarrow[OP=۶]{OA=۱۰} ۶^۲ + AP^۲ = ۱۰^۲$$

$$\Rightarrow AP^۲ = ۶۴ \Rightarrow AP = ۸$$

از طرفی می‌دانیم خطی که از مرکز دایره گذشته و بر وتری از دایره عمود باشد، آن وتر را نصف می‌کند. بنابراین:

$$AP = PB \Rightarrow AB = ۲AP \Rightarrow AB = ۲ \times ۸ = ۱۶$$

۱۱.



با توجه به این‌که نقطهٔ M وسط AB قرار دارد، می‌توان نتیجه گرفت که:

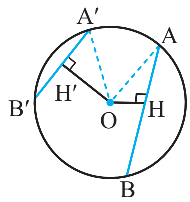
$$\begin{cases} OA = OB = R \\ OM = OM \\ AM = BM \end{cases} \xrightarrow{(\text{ض ض ض})} \overset{\triangle}{AMO} \cong \overset{\triangle}{BMO}$$

$$\Rightarrow \widehat{M}_۱ = \widehat{M}_۲$$

از طرفی می‌دانیم؛ $\widehat{M}_۱ + \widehat{M}_۲ = ۱۸۰^\circ$. بنابراین:

$$\widehat{M}_۱ = \widehat{M}_۲ = ۹۰^\circ$$

۱۲.



با رسم شعاع‌های OA و OA' و استفاده از قضیهٔ فیثاغورس در دو مثلث قائم‌الزاویهٔ OHA و $OH'A'$ داریم:

$$OH^۲ + AH^۲ = OA^۲ \Rightarrow OH^۲ + (\frac{AB}{۲})^۲ = OA^۲$$

$$\Rightarrow OH^۲ + \frac{AB^۲}{۴} = r^۲ \qquad (۱)$$

$$OH'^۲ + A'H'^۲ = OA'^۲ \Rightarrow OH'^۲ + \left(\frac{A'B'}{۲}\right)^۲ = OA'^۲$$

$$\Rightarrow OH'^۲ + \frac{A'B'^۲}{۴} = r^۲ \qquad (۲)$$

با مقایسه رابطهٔ (۱) و (۲) داریم:

$$OH^۲ + \frac{AB^۲}{۴} = OH'^۲ + \frac{A'B'^۲}{۴}$$

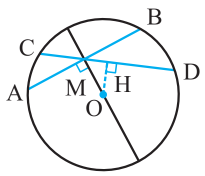
$$\Rightarrow OH^۲ - OH'^۲ = \frac{A'B'^۲}{۴} - \frac{AB^۲}{۴}$$

حال اگر $AB > A'B'$ آنگاه سمت راست تساوی منفی می‌شود. بنابراین سمت چپ نیز باید همین علامت را داشته باشد. در نتیجه:

$$OH^۲ - OH'^۲ < ۰ \Rightarrow OH^۲ < OH'^۲ \Rightarrow OH < OH'$$

بنابراین وتری که بزرگ‌تر است، به مرکز دایره نزدیک‌تر است.

۱۳.



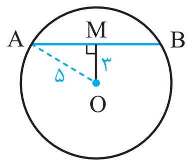
مطابق شکل وتر AB در نقطهٔ M بر قطر گذرنده از M عمود است. حال کافیست ثابت کنیم که وتر AB از هر وتر دیگری که از نقطهٔ M می‌گذرد کوتاه‌تر است. برای این کار وتر دلخواه CD را از M می‌گذرانیم، داریم:

$$\overset{\triangle}{OMH}: \text{وتر مثلث } OM \Rightarrow OM > OH$$

حال بنا بر رابطه‌ای که در سؤال ۱۲ به‌دست آوردیم، داریم:

$$\xrightarrow[\text{نزدیک‌تر است}]{\text{وتر } CD \text{ به مرکز دایره}} CD > AB$$

۱۴.



می‌دانیم کوتاه‌ترین وتری که از نقطهٔ M می‌گذرد، وتری است که در این نقطه بر OM عمود باشد. حال با رسم این وتر و استفاده از رابطهٔ فیثاغورس داریم:

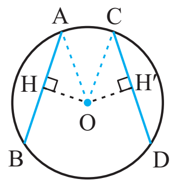
$$\overset{\triangle}{OMA}: \text{قائم‌الزاویه} \Rightarrow OM^۲ + AM^۲ = OA^۲$$

$$\Rightarrow ۳^۲ + AM^۲ = ۵^۲ \Rightarrow AM = ۴$$

از طرفی OM، وتر AB را نصف می‌کند، بنابراین:

$$AM = MB \Rightarrow AB = ۲AM \Rightarrow AB = ۲ \times ۴ = ۸$$

۱۵.



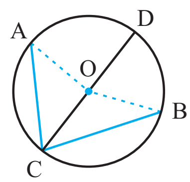
$$\begin{cases} AB = CD \Rightarrow \dfrac{AB}{۲} = \dfrac{CD}{۲} \Rightarrow AH = CH' \\ OA = OC \\ O\hat{H}A = O\hat{H'}C = ۹۰^\circ \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{(وتر و یک ضلع)}} \overset{\triangle}{OHA} \cong \overset{\triangle}{OH'C} \xrightarrow[\text{متناظر}]{\text{اجزای}} OH = OH'$$

---

۱۶. زاویه‌ای است که رأس آن روی دایره و اضلاع آن شامل دو وتر از دایره باشد.

۱۷.

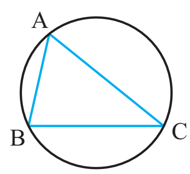


$$\left.\begin{array}{l} OA = OC \Rightarrow A\hat{C}D = \frac{۱}{۲} A\hat{O}D \\ OB = OC \Rightarrow D\hat{C}B = \frac{۱}{۲} D\hat{O}B \\ A\hat{O}B = A\hat{O}D + D\hat{O}B = \overset{\frown}{AB} \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow A\hat{C}D + D\hat{C}B = A\hat{C}B = \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}$$

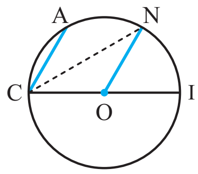
توجه: درحالتی‌که اضلاع زاویه به گونه‌ای باشند که قطر دایره درون زاویه قرار نگیرد نیز اثبات مشابه همین حالت صورت می‌گیرد.

۱۸.



$$\begin{cases} \hat{A} = \dfrac{\overset{\frown}{BC}}{۲} \\ \hat{B} = \dfrac{\overset{\frown}{AC}}{۲} \\ \hat{C} = \dfrac{\overset{\frown}{AB}}{۲} \end{cases} \Rightarrow \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \frac{\overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{AB}}{۲} = \frac{۳۶۰^\circ}{۲} = ۱۸۰^\circ$$

۱۹.



$$\begin{cases} ON \parallel CA \Rightarrow N\hat{O}I = A\hat{C}I \\ N\hat{O}I = \overset{\frown}{NI} \\ A\hat{C}I = \dfrac{\overset{\frown}{AI}}{۲} \end{cases}$$

$$N\hat{O}I = A\hat{C}I \Rightarrow \overset{\frown}{NI} = \frac{\overset{\frown}{AI}}{۲} \Rightarrow \overset{\frown}{AI} = ۲\overset{\frown}{NI}$$

$$\Rightarrow \overset{\frown}{AN} + \overset{\frown}{NI} = ۲\overset{\frown}{NI} \Rightarrow \overset{\frown}{AN} = \overset{\frown}{NI}$$

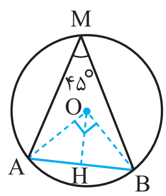
۲۰.

$$\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{CA} = ۳۶۰^\circ \Rightarrow ۲x + ۴x + ۳x = ۳۶۰^\circ$$

$$\Rightarrow ۹x = ۳۶۰^\circ \Rightarrow x = ۴۰^\circ$$

$$B\hat{A}C = y = \frac{\overset{\frown}{BC}}{۲} \Rightarrow y = \frac{۴x}{۲} \Rightarrow y = ۸۰^\circ$$

۲۱.



الف)

$$\begin{cases} OA = OB \\ A\hat{O}B = ۹۰^\circ \end{cases} \Rightarrow \text{شعاع دایره} = OA = \frac{\sqrt{۲}}{۲} AB$$

$$= \frac{\sqrt{۲}}{۲} \times \sqrt{۲} = ۱$$

ب)

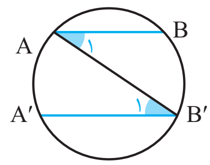
$$OH = \frac{\sqrt{۲}}{۲} OA \Rightarrow OH = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \times ۱ = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

.۲۲

$$A\hat{O}C = ۲A\hat{B}C \Rightarrow ۳\alpha + ۱۲ = ۲(\alpha + ۱۶) \Rightarrow \alpha = ۲۰$$

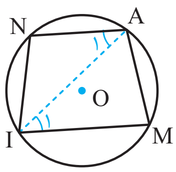
$$\Rightarrow \begin{cases} A\hat{O}C = ۳(۲۰) + ۱۲ = ۷۲^\circ \\ A\hat{B}C = ۲۰ + ۱۶ = ۳۶^\circ \end{cases}$$

.۲۳



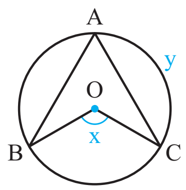
$$\begin{cases} AB \parallel A'B' \Rightarrow \hat{A}_۱ = \hat{B}'_۱ \\ \hat{A}_۱ = \dfrac{\overset{\frown}{BB'}}{۲} \\ \hat{B}'_۱ = \dfrac{\overset{\frown}{AA'}}{۲} \end{cases} \Rightarrow \overset{\frown}{AA'} = \overset{\frown}{BB'}$$

.۲۴



$$\begin{cases} AM = NI \Rightarrow \overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{NI} \\ \hat{I}_۱ = \dfrac{\overset{\frown}{AM}}{۲} \\ \hat{A}_۱ = \dfrac{\overset{\frown}{NI}}{۲} \end{cases} \Rightarrow \hat{A}_۱ = \hat{I}_۱ \Rightarrow AN \parallel MI$$

.۲۵



الف)

$$\begin{cases} AB = AC \Rightarrow \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AC} = y = ۱۶۰^\circ \\ x = \overset{\frown}{BC} \\ \overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{BC} = ۳۶۰^\circ \end{cases}$$

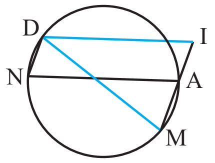
$$\Rightarrow x + ۳۲۰ = ۳۶۰ \Rightarrow \hat{x} = ۴۰^\circ$$

ب)

$$\begin{cases} \hat{x} = ۱۳۰^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{BC} = ۱۳۰^\circ \\ \overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{BC} = ۳۶۰^\circ \end{cases} \Rightarrow ۱۳۰^\circ + ۲y = ۳۶۰^\circ$$

$$\Rightarrow ۲y = ۲۳۰^\circ \Rightarrow y = ۱۱۵^\circ$$

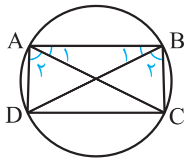
.۲۶



$$\begin{cases} DI \parallel NA \Rightarrow \hat{I} = N\hat{A}M \\ DN \parallel IA \Rightarrow \hat{N} = N\hat{A}M \\ \hat{M} = \hat{N} = \dfrac{\overset{\frown}{AD}}{۲} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \hat{M} = \hat{I} \Rightarrow M\overset{\Delta}{D}I : DM = DI$$

.۲۷

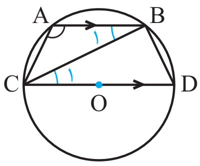


$$\begin{cases} AD = BC \Rightarrow \overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BC} \\ \hat{A}_۱ = \dfrac{\overset{\frown}{BC}}{۲} \\ \hat{B}_۱ = \dfrac{\overset{\frown}{AD}}{۲} \\ \hat{A}_۲ = \hat{B}_۲ = \dfrac{\overset{\frown}{CD}}{۲} \end{cases} \Rightarrow \hat{A}_۱ = \hat{B}_۱$$

$$\Rightarrow \hat{A}_۱ + \hat{A}_۲ = \hat{B}_۱ + \hat{B}_۲ \Rightarrow \hat{A} = \hat{B}$$

$$\Rightarrow \overset{\frown}{BCD} = \overset{\frown}{ADC} \Rightarrow AC = BD$$

.۲۸

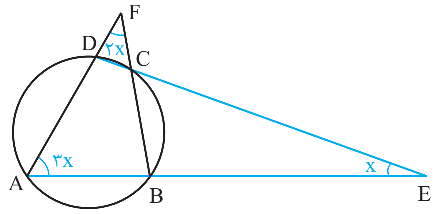


$$\begin{cases} AB \parallel CD \Rightarrow \hat{B}_۱ = \hat{C}_۱ \\ \hat{C}_۱ = \dfrac{\overset{\frown}{BD}}{۲} \\ \hat{A} = \dfrac{\overset{\frown}{BD} + \overset{\frown}{DC}}{۲} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \hat{A} - \hat{B}_۱ = \hat{A} - \hat{C}_۱ = \dfrac{\overset{\frown}{CD}}{۲} = ۹۰^\circ$$

۲۹. زوایای $\widehat{CDF}$ و $\widehat{BCD}$ به‌ترتیب زوایای خارجی مثلث‌های ADE و FCD می‌باشند. بنابراین:

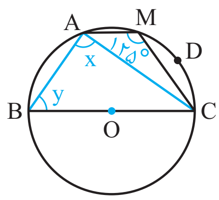
$$\begin{cases} \widehat{CDF} = \hat{A}+\hat{E} = ۳x+x = ۴x \\ \widehat{BCD} = \hat{F}+\widehat{CDF} = ۲x+۴x = ۶x \end{cases}$$



از طرفی داریم: $\hat{A}+\widehat{BCD} = \frac{\overset{\frown}{BCD}}{۲} + \frac{\overset{\frown}{BAD}}{۲} = ۱۸۰°$

$\Rightarrow ۳x+۶x = ۹x = ۱۸۰° \Rightarrow x = ۲۰°$

۳۰.



$\widehat{BAC} = \frac{\overset{\frown}{BC}}{۲} \Rightarrow x = \frac{۱۸۰°}{۲} = ۹۰°$

$\widehat{AMC} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲} + \frac{\overset{\frown}{BC}}{۲} \Rightarrow ۱۲۵° = \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲} + ۹۰°$

$\Rightarrow \overset{\frown}{AB} = ۷۰°$

از طرفی داریم:

$\widehat{ABC} = \frac{\overset{\frown}{AMC}}{۲} = \frac{\overset{\frown}{BAC} - \overset{\frown}{AB}}{۲}$

$\Rightarrow \widehat{ABC} = \frac{۱۸۰° - ۷۰°}{۲} = ۵۵°$

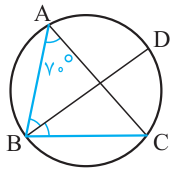
۳۱. BD نیمساز زاویهٔ B است. $\Rightarrow \widehat{DBC} = \widehat{DBA} \Rightarrow \overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{CD}$

حال به محاسبهٔ عبارت خواسته شده می‌پردازیم:

$\widehat{BAD} - \widehat{ABD} = \frac{\overset{\frown}{BCD}}{۲} - \frac{\overset{\frown}{AD}}{۲}$

$\Rightarrow \widehat{BAD} - \widehat{ABD} = \frac{\overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{CD}}{۲} - \frac{\overset{\frown}{AD}}{۲} = \frac{\overset{\frown}{BC}}{۲}$

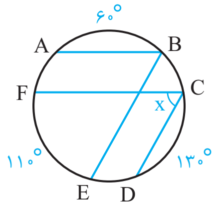
$\Rightarrow \widehat{BAD} - \widehat{ABD} = \frac{\overset{\frown}{BC}}{۲} = \widehat{BAC} = ۷۰°$



۳۲. اگر کمان AF را برابر α بگیریم، در این صورت با توجه به توازی وترها:

$AB \parallel CF \Rightarrow \overset{\frown}{AF} = \overset{\frown}{BC} = \alpha$

$CD \parallel BE \Rightarrow \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{ED} = \alpha$



حال از آن‌جایی که مجموع کمان‌های دایره برابر با ۳۶۰ درجه است، بنابراین:

$\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{CD} + \overset{\frown}{DE} + \overset{\frown}{EF} + \overset{\frown}{FA} = ۳۶۰°$

$= \overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{CD} + \overset{\frown}{EF} + ۳\alpha = ۳۶۰°$

$\Rightarrow ۶۰° + ۱۳۰° + ۱۱۰° + ۳\alpha = ۳۶۰°$

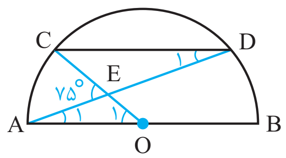
$\Rightarrow ۳\alpha = ۶۰° \Rightarrow \alpha = ۲۰° \Rightarrow \overset{\frown}{FD} = ۱۱۰ + ۲۰ = ۱۳۰°$

$\Rightarrow \widehat{FCD} = x = \frac{\overset{\frown}{FED}}{۲} = \frac{۱۳۰°}{۲} = ۶۵°$

۳۳. می‌دانیم $\widehat{AEC}$ زاویهٔ خارجی مثلث AEO می‌باشد. پس داریم:

$\widehat{AEC} = \hat{A}_۱ + \hat{O}_۱ = ۷۵° \Rightarrow \frac{\overset{\frown}{BD}}{۲} + \overset{\frown}{AC} = ۷۵° \quad (۱)$

از طرفی داریم:



$CD \parallel AB \Rightarrow \hat{A}_۱ = \hat{D}_۱ = \frac{\overset{\frown}{BD}}{۲} = \frac{\overset{\frown}{AC}}{۲}$

$\Rightarrow \overset{\frown}{BD} = \overset{\frown}{AC} \quad (۲)$

حال با مقایسهٔ رابطه‌های (۱) و (۲) داریم:

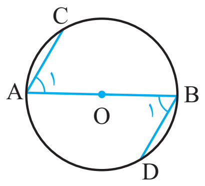
$\frac{\overset{\frown}{BD}}{۲} + \overset{\frown}{AC} = ۷۵° \xrightarrow{(۲)} \frac{\overset{\frown}{AC}}{۲} + \overset{\frown}{AC} = \frac{۳}{۲}\overset{\frown}{AC} = ۷۵°$

$\Rightarrow \overset{\frown}{AC} = ۵۰° \Rightarrow \overset{\frown}{BD} = ۵۰°$

$\overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{BD} + \overset{\frown}{CD} = ۱۸۰° \Rightarrow ۵۰° + ۵۰° + \overset{\frown}{CD} = ۱۸۰°$

$\Rightarrow \overset{\frown}{CD} = ۸۰°$

۳۴.



$$AC \parallel BD \Rightarrow \hat{A}_{۱} = \hat{B}_{۱} = \frac{\overset{\frown}{CB}}{۲} = \frac{\overset{\frown}{AD}}{۲}$$

$$\Rightarrow \overset{\frown}{CB} = \overset{\frown}{AD} \quad (۱)$$

$$\overset{\frown}{ACB} = \overset{\frown}{BDA} = ۱۸۰^{\circ} \quad (۲)$$

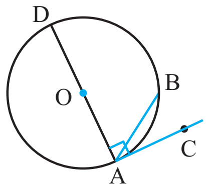
اکنون با مقایسهٔ روابط (۱) و (۲) داریم:

$$\xrightarrow{(۱),(۲)} \overset{\frown}{ACB} - \overset{\frown}{CB} = \overset{\frown}{BDA} - \overset{\frown}{AD}$$

$$\Rightarrow \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD} \Rightarrow AC = BD$$

۳۵. زاویه‌ای که رأس آن روی دایره قرار دارد و یکی از اضلاع آن مماس بر دایره و ضلع دیگر آن شامل وتری از دایره باشد، زاویهٔ ظلی نامیده می‌شود. بنابراین گزینهٔ «الف» صحیح است.

۳۶.

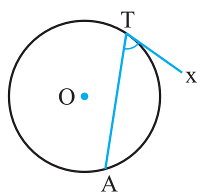


اگر قطری از دایره را رسم کنیم که شامل نقطهٔ A از زاویهٔ ظلی CAB باشد، داریم:

$$\begin{cases} D\hat{A}C = ۹۰^{\circ} \Rightarrow D\hat{A}C = \frac{۱}{۲}\overset{\frown}{DBA} \\ D\hat{A}B = \frac{\overset{\frown}{BD}}{۲} \\ B\hat{A}C = D\hat{A}C - D\hat{A}B \end{cases}$$

$$\Rightarrow B\hat{A}C = \frac{\overset{\frown}{BD} + \overset{\frown}{BA}}{۲} - \frac{\overset{\frown}{BD}}{۲} = \frac{\overset{\frown}{BA}}{۲}$$

۳۷.



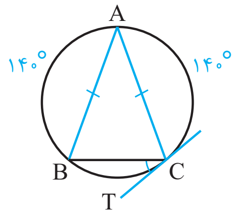
بنا بر تعریف زاویهٔ ظلی داریم:

$$A\hat{T}x = \frac{\overset{\frown}{TA}}{۲} \Rightarrow \overset{\frown}{TA} = ۲A\hat{T}x$$

$$\Rightarrow (۳\alpha + ۳۳)^{\circ} = ۲(۲\alpha - ۶)^{\circ} \Rightarrow \alpha = ۴۵^{\circ}$$

$$\Rightarrow A\hat{T}x = ۲(۴۵^{\circ}) - ۶^{\circ} = ۸۴^{\circ}$$

۳۸.



$$AB = AC \Rightarrow \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AC} = ۱۴۰^{\circ}$$

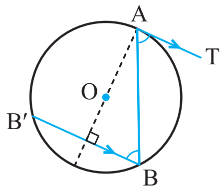
$$\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{BC} = ۳۶۰^{\circ} \Rightarrow ۲۸۰^{\circ} + \overset{\frown}{BC} = ۳۶۰^{\circ}$$

$$\Rightarrow \overset{\frown}{BC} = ۸۰^{\circ}$$

$$B\hat{C}T = \frac{\overset{\frown}{BC}}{۲} \Rightarrow B\hat{C}T = ۴۰^{\circ}$$

۳۹. در صورتی که از A به مرکز دایره (O) وصل کنیم، خواهیم داشت:

$$\begin{cases} AO \perp AT \\ BB' \parallel AT \end{cases} \Rightarrow AO \perp BB'$$



در نتیجه قطر AO کمان $\overset{\frown}{B'AB}$ را نصف می‌کند. پس داریم:

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \overset{\frown}{AB'} = \overset{\frown}{AB} \\ \hat{B} = \frac{\overset{\frown}{AB'}}{۲} \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{B} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲} \\ \left.\begin{array}{l} AT \parallel BB' \\ AB \text{ مورب} \end{array}\right\} \Rightarrow T\hat{A}B = \hat{B} \end{array}\right\} \Rightarrow T\hat{A}B = \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}$$

۴۰. ابتدا اثبات می‌کنیم دو مثلث قائم‌الزاویهٔ OTA و $OT'A$ با یکدیگر همنهشت‌اند:

$$\left.\begin{array}{l} OT = OT' \\ OA = OA \\ \hat{T} = \hat{T}' = ۹۰^{\circ} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{وتر و یک ضلع}} \overset{\Delta}{OTA} \cong \overset{\Delta}{OT'A}$$

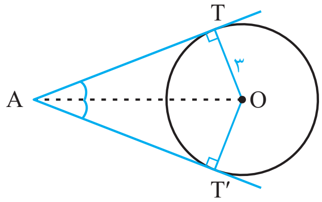
$$\Rightarrow O\hat{A}T = O\hat{A}T' \quad (*)$$

حال بنابر فرض مسأله داریم:

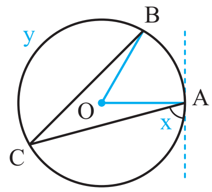
$$OT = ۳ \,,\, OA = ۶ \Rightarrow OT = \frac{۱}{۲}OA$$

می‌دانیم که در مثلث قائم‌الزاویه، ضلع روبه‌رو به زاویهٔ 30°، نصف وتر است و بالعکس. بنابراین در مثلث قائم‌الزاویهٔ $\overset{\Delta}{OTA}$ داریم:

$$O\hat{A}T = 30^\circ \xrightarrow{(*)} T\hat{A}T' = 2O\hat{A}T = 60^\circ$$



۴۱.



از آن‌جایی که دو وتر AC و BC با یکدیگر برابرند، بنابراین کمان‌های نظیر این دو وتر نیز با یکدیگر مساوی‌اند:

$$AC = BC \Rightarrow \overset{\frown}{CA} = \overset{\frown}{CB} \qquad (1)$$

$$\text{زاویهٔ ظلی}\ \hat{x} = \frac{\overset{\frown}{AC}}{2} \Rightarrow \overset{\frown}{CA} = 2x$$

$$\xrightarrow{(1)} y = \overset{\frown}{CB} = 2x \qquad (2)$$

$$\text{زاویهٔ مرکزی}\ A\hat{O}B = \overset{\frown}{AB} \Rightarrow \overset{\frown}{AB} = 60^\circ$$

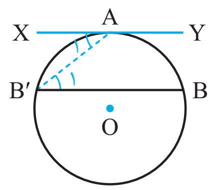
حال با توجه به این‌که مجموع کمان‌های دایره برابر با ۳۶۰ درجه است، داریم:

$$\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{CB} = 360^\circ \Rightarrow 60^\circ + 2x + y = 360^\circ$$

$$\xrightarrow{(2)} 60^\circ + 2y = 360^\circ \Rightarrow 2y = 300^\circ$$

$$\Rightarrow y = 150^\circ \Rightarrow x = 75^\circ$$

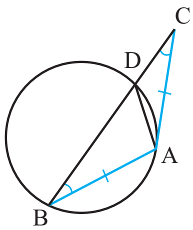
۴۲.



$$\left.\begin{array}{l} \hat{A}_1 : \text{ظلی} \Rightarrow \hat{A}_1 = \dfrac{\overset{\frown}{AB'}}{2} \\ \hat{B'}_1 : \text{محاطی} \Rightarrow \hat{B'}_1 = \dfrac{\overset{\frown}{AB}}{2} \\ XY \parallel BB' \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{B}'_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\frown}{AB'} = \overset{\frown}{AB}$$

$$\Rightarrow \overset{\frown}{AB'} = \overset{\frown}{AB}$$

۴۳.



با توجه به برابر بودن مماس AC و وتر AB داریم:

$$AB = AC \Rightarrow \hat{C} = \hat{B} \quad (1)$$

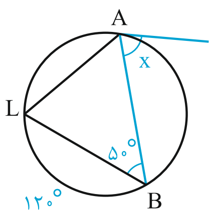
$$\left.\begin{array}{l} \text{زاویه ظلی} : D\hat{A}C \Rightarrow D\hat{A}C = \dfrac{\overset{\frown}{AD}}{2} \\ \hat{B} = \dfrac{\overset{\frown}{AD}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{B} = D\hat{A}C \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1),(2)} D\hat{A}C = \hat{C} \Rightarrow DA = DC$$

بنابراین مثلث ADC متساوی‌الساقین می‌باشد.

۴۴.

الف)

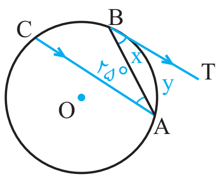


$$\hat{B} = \frac{\overset{\frown}{AL}}{2} = 50^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{AL} = 100^\circ$$

$$\overset{\frown}{AL} + \overset{\frown}{LB} + \overset{\frown}{BA} = 360^\circ \Rightarrow 100 + 120^\circ + \overset{\frown}{BA} = 360^\circ$$

$$\Rightarrow \overset{\frown}{BA} = 140^\circ \Rightarrow x = \frac{\overset{\frown}{BA}}{2} = 70^\circ$$

ب)

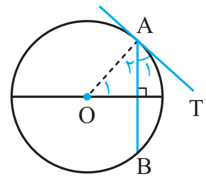


$$AC \parallel BT \Rightarrow \hat{A} = A\hat{B}T \Rightarrow x = 25^\circ$$

$$x = A\hat{B}T = \frac{\overset{\frown}{BA}}{۲}$$

$$\Rightarrow y = \overset{\frown}{BA} = ۵۰^\circ$$

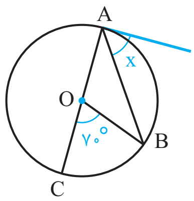
.۴۵ خط مماس بر دایره، در نقطهٔ تماس بر شعاع دایره عمود است. از طرفی می‌دانیم قطر عمود بر وتر، وتر و کمان متناظر آن را نصف می‌کند. پس داریم:



$$\left.\begin{array}{l} \text{زاویه مرکزی}: \hat{O}_۱ = \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲} \\ \left.\begin{array}{l}\hat{O}_۱ + \hat{A}_۲ = ۹۰^\circ \\ \hat{A}_۱ + \hat{A}_۲ = ۹۰^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow \hat{O}_۱ = \hat{A}_۱ \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{A}_۱ = T\hat{A}B = \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}$$

.۴۶

الف)

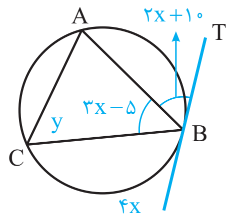


$$B\hat{O}C = \overset{\frown}{BC} = ۷۰^\circ \Rightarrow O\hat{A}B = \frac{\overset{\frown}{BC}}{۲} = ۳۵^\circ$$

از طرفی داریم:

$$O\hat{A}B + \hat{x} = ۹۰^\circ \Rightarrow x + ۳۵^\circ = ۹۰^\circ \Rightarrow x = ۵۵^\circ$$

ب)



$$T\hat{B}A = \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲} \Rightarrow \overset{\frown}{AB} = ۴x + ۲۰$$

$$\overset{\frown}{AC} = ۲\hat{B} \Rightarrow \overset{\frown}{AC} = ۶x - ۱۰$$

$$\overset{\frown}{BC} = ۴x$$

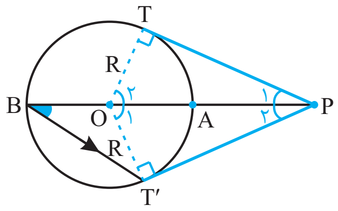
حال با توجه به این‌که محیط دایره برابر ۳۶۰° است، داریم:

$$(۴x + ۲۰) + (۶x - ۱۰) + ۴x = ۳۶۰ \Rightarrow x = ۲۵^\circ$$

$$\hat{C} = y = \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲} \Rightarrow y = \frac{۴x + ۲۰}{۲} = ۲x + ۱۰$$

$$\Rightarrow y = ۵۰ + ۱۰ \Rightarrow y = ۶۰^\circ$$

.۴۷ می‌دانیم شعاع دایره، بر خط مماس در نقطهٔ تماس عمود است. لذا به‌راحتی می‌توان ثابت کرد که دو مثلث قائم‌الزاویهٔ OTP و $OT'P$ با یکدیگر همنهشت‌اند:



$$\left.\begin{array}{l} OT = OT' = R \\ OP = OP \\ \hat{T} = \hat{T}' = ۹۰^\circ \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{وتر و یک ضلع}} \overset{\Delta}{OTP} \cong \overset{\Delta}{OT'P}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \hat{O}_۱ = \hat{O}_۲ \\ \hat{P}_۱ = \hat{P}_۲ \end{cases} (*)$$

از طرفی با توجه به فرض دیگر مسأله داریم:

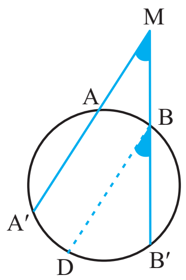
$$\left.\begin{array}{r} PT \parallel BT' \Rightarrow P\hat{B}T' = \hat{P}_۱ \\ P\hat{B}T' = \frac{\overset{\frown}{AT'}}{۲} \\ \hat{O}_۱ = \overset{\frown}{AT'} \end{array}\right\} \xrightarrow{(*)} \begin{cases} \hat{P}_۲ + \hat{O}_۱ = ۹۰^\circ \\ \hat{O}_۱ = ۲\hat{P}_۲ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \hat{O}_۱ = ۶۰^\circ , \hat{P}_۲ = ۳۰^\circ$$

بنابراین کمان TAT' برابر است با:

$$\overset{\frown}{TAT'} = T\hat{O}T' = ۲\hat{O}_۱ = ۱۲۰^\circ$$

.۴۸



ابتدا از نقطهٔ B، خطی موازی MA' رسم می‌کنیم تا دایره را در نقطهٔ D قطع کند. لذا داریم:

$$BD \parallel MA' \Rightarrow \begin{cases} \hat{M} = D\hat{B}B' \\ \overset{\frown}{DA'} = \overset{\frown}{AB} \end{cases} \quad (۱)$$

$$D\hat{B}B' = \frac{۱}{۲}\overset{\frown}{DB'} = \frac{۱}{۲}(\overset{\frown}{A'B'} - \overset{\frown}{DA'}) \quad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۲),(۱)} \hat{M} = \frac{\overset{\frown}{A'B'} - \overset{\frown}{AB}}{۲}$$