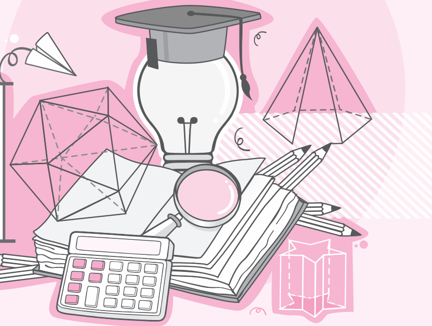
۱ ترسیم‌های هندسی و استدلال



۱ ترسیم‌های هندسی

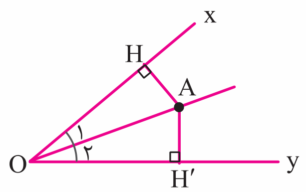
برخی خواص نیمساز و ترسیم آن

هر نقطه که روی نیمساز یک زاویه قرار داشته باشد، از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است و هر نقطه که از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله باشد، روی نیمساز آن زاویه قرار دارد.

▼مثال ۱) ویژگی فوق را ثابت کنید. (کتاب درسی، مکمل و مشابه فعالیت صفحهٔ ۱۱)

پاسخ الف) فرض کنید نقطهٔ A روی نیمساز زاویهٔ xOy باشد.

از A، دو عمود AH و AH' را به‌ترتیب بر نیم‌خط‌های Ox، Oy رسم می‌کنیم.



$$\left.\begin{array}{l} OA = OA \\ \hat{O}_۱ = \hat{O}_۲ \\ \hat{H} = \hat{H'} = ۹۰^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle OAH \overset{\text{(وتر و یک زاویهٔ حاده)}}{\cong} \triangle OAH' \Rightarrow AH = AH'$$

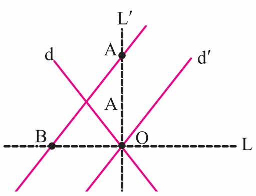
ب) فرض کنید طول عمودهای رسم شده از نقطهٔ A بر نیم‌خط‌های Ox و Oy، یعنی AH و AH' برابر یکدیگر باشند.

$$\left.\begin{array}{l} OA = OA \\ AH = AH' \\ \hat{H} = \hat{H'} = ۹۰^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle OAH \overset{\text{(وتر و یک ضلع قائمه)}}{\cong} \triangle OAH' \Rightarrow \hat{O}_۱ = \hat{O}_۲$$

▼مثال ۲) دو خط d و d' در نقطهٔ O متقاطع‌اند. اگر خط Δ، موازی یکی از این دو خط باشد، آن‌گاه چند نقطه روی Δ می‌توان یافت که از d و d' به یک فاصله باشند؟ (کتاب درسی، مکمل و مشابه فعالیت صفحهٔ ۱۱)

۱) هیچ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

پاسخ مطابق شکل، دو خط L و L'، نیمساز زاویه بین خطوط d و d' هستند. تمام نقاط واقع بر دو خط L و L'، از خطوط d و d' به یک فاصله‌اند، پس نقاط A و B که محل تلاقی خط Δ با این دو خط است، از خطوط d و d' به یک فاصله هستند.



بنابراین گزینه ۳ صحیح است.

▼مثال ۳) مکان هندسی نقاطی از صفحه که از چهار ضلع مستطیل $ABCD\,(AB > BC)$ به یک فاصله باشند کدام است؟

(کتاب درسی، مکمل و مرتبط با فعالیت صفحهٔ ۱۱- آزمون کانون - ۷ آذر ۹۳)

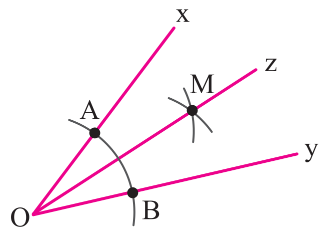
۱) خطی به موازات AB ۲) خطی به موازات BC

۳) محل تقاطع دو قطر مستطیل ۴) تهی

پاسخ نقاطی از صفحه که از دو ضلع یک مستطیل به یک فاصله باشند، روی نیمساز زاویهٔ حاصل از برخورد آن دو ضلع قرار دارند. بنابراین نقاطی از صفحه که از چهارضلع مستطیل $ABCD$ به یک فاصله باشند، باید روی محل تلاقی نیمسازهای چهار زاویهٔ آن مستطیل قرار داشته باشند که با توجه به آن که نیمسازهای زاویه‌های یک مستطیل، همرس نیستند، چنین نقطه‌ای وجود ندارد.
بنابراین گزینه ۴ صحیح است.

▼مثال ۴) **زاویه‌ی xOy مفروض است. به کمک خط‌کش و پرگار، نیمساز این زاویه را رسم کنید.** (کتاب درسی، مکمل و مشابه فعالیت صفحهٔ ۱۲)

پاسخ ابتدا دهانهٔ پرگار را کمی باز کرده و به مرکز O، کمان دلخواه رسم می‌کنیم تا نیم‌خط‌های Ox و Oy را به ترتیب در نقاط A و B، قطع کند. سپس دهانهٔ پرگار را به مقداری بیش‌تر از نصف طول AB باز کرده و یک‌بار به مرکز A و بار دیگر به مرکز B کمان‌هایی رسم می‌کنیم تا همدیگر را در نقطه‌ی M قطع کنند. از نقطه‌ی M به O وصل کرده و OM را از سمت M امتداد می‌دهیم. با توجه به آن‌که دو مثلث OAM و OBM به حالت تساوی سه‌ضلع هم‌نهشت هستند، بنابراین نیم‌خط Oz (شامل نقطهٔ M) نیمساز زاویه‌ی xOy است.

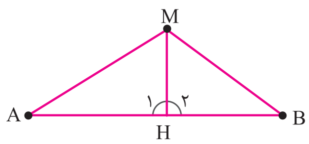


برخی خواص عمود منصف و ترسیم آن

ویژگی عمود منصف یک پاره‌خط: هر نقطه که روی عمود منصف یک پاره‌خط باشد، از دو سر آن پاره‌خط به یک فاصله است و هر نقطه که از دو سر یک پاره‌خط به یک فاصله باشد، روی عمود منصف آن پاره‌خط قرار دارد.

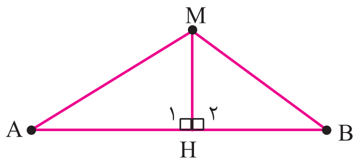
▼مثال ۵) **ویژگی فوق را ثابت کنید.** (کتاب درسی،مکمل و مشابه فعالیت صفحهٔ ۱۳)

پاسخ الف) نقطهٔ M را روی عمود منصف پاره‌خط AB در نظر می‌گیریم. از M به A و B وصل می‌کنیم.



$$\left.\begin{array}{l} MH = MH \\ \hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90^\circ \\ AH = BH \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle AMH \overset{(ض ز ض)}{\cong} \triangle BMH \Rightarrow MA = MB$$

ب) فرض کنید نقطه‌ی M از نقاط A و B به یک فاصله باشد.
از نقطه M به نقاط A و B و H (وسط AB) وصل می‌کنیم. چون $MA = MB$، پس مثلث MAB متساوی‌الساقین است و در نتیجه $\hat{A} = \hat{B}$.

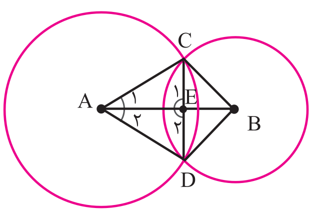


$$\left.\begin{array}{l} MA = MB \\ \hat{A} = \hat{B} \\ AH = BH \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle MAH \overset{(ض ز ض)}{\cong} \triangle MBH \overset{\text{از طرفی}}{\Rightarrow} \left.\begin{array}{l} \hat{H}_1 = \hat{H}_2 \\ \hat{H}_1 + \hat{H}_2 = 180^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90^\circ$$

پس MH عمود منصف پاره‌خط AB است.

▼مثال ۶) **دو دایره به مرکزهای A و B، همدیگر را در نقاط C و D قطع کرده‌اند. ثابت کنید AB، عمود منصف CD است.** (کتاب درسی، مکمل و مشابه فعالیت صفحهٔ ۱۳)

پاسخ مطابق شکل از نقاط C و D، به نقاط A و B وصل می‌کنیم. اگر AB و CD، همدیگر را در نقطه‌ی E قطع کنند، داریم:



$$\left.\begin{array}{l} AC = AD \ (\text{شعاع دایره ی بزرگ}) \\ BC = BD \ (\text{شعاع دایره ی کوچک}) \\ AB = AB \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle ABC \overset{(ض ض ض)}{\cong} \triangle ABD \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{A}_2$$

$$\left.\begin{array}{l} AC = AD \\ \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \\ AE = AE \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle ACE \overset{(ض ز ض)}{\cong} \triangle ADE \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} CE = CD \\ \hat{E}_1 = \hat{E}_2 = 90^\circ \end{array}\right.$$

بنابراین AB، عمودمنصف CD است.

▼مثال ۷) خط d و نقاط A و B در یک صفحه قرار دارند. تعداد نقاط واقع بر خط d که از نقاط A و B به یک فاصله هستند، کدام نمی‌تواند باشد؟

(کتاب درسی، مکمل و مشابه فعالیت صفحهٔ ۱۳)

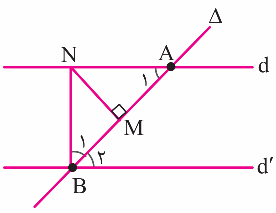
۱) هیچ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

پاسخ *نقاطی از صفحه که از نقاط A و B به یک فاصله باشند، روی عمود منصف پاره‌خط AB قرار دارند. حال اگر عمود منصف پاره‌خط AB و خط d متقاطع باشند، مسئله یک جواب دارد. در صورتیکه عمودمنصف پاره‌خط AB بر خط d منطبق باشد، مسئله بی‌شمار جواب و سرانجام در صورتی که عمودمنصف پاره‌خط AB موازی d و غیر منطبق بر آن باشد، مسئله فاقد جواب است.*

بنابراین گزینه ۳ صحیح است.

▼مثال ۸) خط Δ، خطوط موازی d و d' را به ترتیب در نقاط A و B قطع می‌کند. اگر در نقطهٔ M وسط پاره‌خط AB، خطی بر Δ عمود کنیم به گونه‌ای که d را در نقطهٔ N قطع کند، ثابت کنید AB نیمساز یکی از زاویه‌هایی است که NB با خط d' می‌سازد.

(کتاب درسی، مکمل و مشابه فعالیت صفحهٔ ۱۳)

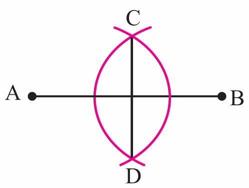


پاسخ *مطابق شکل MN عمود منصف پاره‌خط AB است، پس $NA = NB$ و در نتیجه در مثلث متساوی‌الساقین ANB، $\hat{A}_1 = \hat{B}_1$ می‌باشد. از طرفی بنا به قضیهٔ خطوط موازی و مورب داریم:*

$$\left.\begin{array}{l} d \parallel d' \\ AB \text{ مورب} \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{B}_2$$

بنابراین $\hat{B}_1 = \hat{B}_2$ است، یعنی AB نیمساز زاویهٔ بین خط d' و NB می‌باشد.

▼مثال ۹) پاره‌خط AB مفروض است. به کمک خط‌کش و پرگار، عمود منصف این پاره‌خط را رسم کنید. (کتاب درسی، مکمل و مشابه فعالیت صفحهٔ ۱۴)



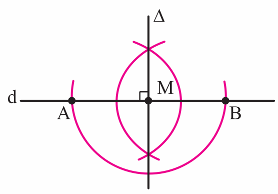
پاسخ *دهانهٔ پرگار را بیش از نصف طول AB باز کرده و یک بار به مرکز A و بار دیگر به مرکز B، دو کمان رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در نقاط C و D قطع کنند.*

چون نقاط C و D هر دو از A و B به یک فاصله هستند، پس روی عمود منصف پاره‌خط AB قرار دارند، بنابراین عمود منصف پاره‌خط AB با وصل‌کردن نقاط C و D به یکدیگر حاصل می‌شود.

> **نکته:** با استفاده از ویژگی عمود منصف یک پاره‌خط، می‌توان خطوطی عمود بر یک خط دلخواه و یا موازی یک خط دلخواه رسم کرد.

▼مثال ۱۰) خط d و نقطهٔ M واقع بر آن مفروض هستند. با کمک خط‌کش و پرگار، خطی رسم کنید که از M بگذرد و بر d عمود باشد.

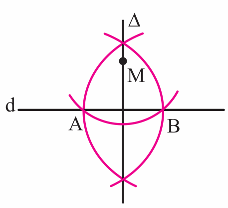
(کتاب درسی،مکمل و مشابه کار در کلاس، صفحهٔ ۱۴)



پاسخ *ابتدا به مرکز M، کمانی رسم می‌کنیم تا خط d را در دو نقطهٔ A و B قطع کند. سپس عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم می‌نماییم. با توجه به آن‌که $MA = MB$ است، واضح است که این عمود منصف از نقطهٔ M گذشته و در این نقطه بر خط d عمود است.*

▼مثال ۱۱) خط d و نقطهٔ M خارج آن مفروض هستند. با کمک خط‌کش و پرگار، خطی رسم کنید که از M بگذرد و بر d عمود باشد.

(کتاب درسی، مکمل و مشابه کار در کلاس، صفحهٔ ۱۵)

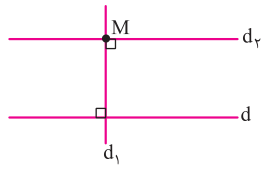


پاسخ *ابتدا به مرکز M، کمانی رسم می‌کنیم تا خط d را در دو نقطهٔ A و B قطع کند (دهانهٔ پرگار باید بیش‌تر از فاصلهٔ نقطهٔ M تا خط d باز شود) سپس عمود منصف پاره خط AB را رسم می‌کنیم. با توجه به آن‌که $MA = MB$ ، این عمود منصف از نقطهٔ M می‌گذرد و بر خط d که پاره‌خط AB واقع برآن است، عمود می‌باشد.*

▼**مثال ۱۲)** خط d و نقطه‌ی M خارج آن مفروض‌اند. با کمک خط‌کش و پرگار خطی موازی d رسم کنید که از نقطه‌ی M عبور کند.

(کتاب درسی، مکمل و مشابه کار در کلاس، صفحهٔ ۱۵)

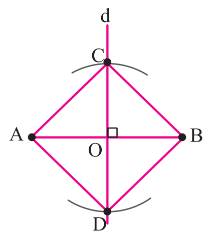
پاسخ ابتدا به کمک مثال ۱۱ خط d_1 را از نقطه‌ی M بر d عمود رسم می‌کنیم. سپس به کمک مثال ۱۰، خط d_2 را در نقطه‌ی M بر خط d_1 عمود رسم می‌کنیم. از آن‌جا که دو خط d و d_2 هر دو بر d_1 عمود هستند، پس d_2 موازی d می‌باشد و چون از نقطه‌ی M عبور می‌کند، پس جواب مسئله است.



▼**مثال ۱۳)** مربعی رسم کنید که پاره‌خط AB، یکی از قطرهای آن باشد.

(کتاب درسی، مکمل و مشابه کار در کلاس، صفحهٔ ۱۵)

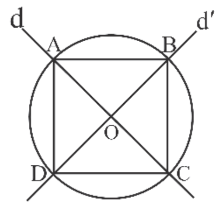
پاسخ می‌دانیم در یک مربع، قطرها عمود منصف یکدیگرند. پس برای رسم این مربع، ابتدا عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم می‌کنیم. محل برخورد خط d (عمود منصف پاره‌خط AB) و پاره‌خط AB را نقطه‌ی O می‌نامیم. واضح است که O وسط پاره‌خط AB می‌باشد. حال به مرکز O و به شعاع OA، دایره‌ای رسم می‌کنیم تا خط d را در دو نقطه‌ی C و D قطع کند. نقاط A و B را به نقاط C و D وصل می‌کنیم. چهارضلعی $ACBD$ جواب مسئله است.



▼**مثال ۱۴)** می‌دانیم چند ضلعی‌ای که قطرهایش با هم برابر و منصف هم باشد، مستطیل است. مستطیلی رسم کنید که طول قطر آن ۶ سانتی‌متر باشد.

(کتاب درسی، مکمل و مشابه تمرین ۲، صفحهٔ ۱۶)

پاسخ دو خط متقاطع d و d' را که در نقطهٔ O یکدیگر را قطع می‌کنند، در نظر می‌گیریم. به مرکز O و به شعاع ۳ سانتی‌متر، دایره‌ای رسم می‌کنیم تا خط d را در نقاط A و C و خط d' را در نقاط B و D قطع نماید. چهارضلعی $ABCD$ مستطیل است و جواب مسئله می‌باشد. واضح است که به ازای هر دو خط متقاطع دلخواه، یک مستطیل با طول قطر ۶ سانتی‌تر قابل رسم است، پس مسئله بی‌شمار جواب دارد.

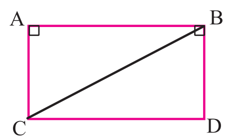


▼**مثال ۱۵)** چند مستطیل متمایز می‌توان رسم کرد که طول یک ضلع آن ۴ و طول قطر آن ۵ باشد؟

(کتاب درسی، مکمل و مشابه تمرین ۲ صفحهٔ ۱۶)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) بی‌شمار

پاسخ طول و عرض مستطیل به همراه قطر آن، یک مثلث قائم‌الزاویه ایجاد می‌کند. بنابراین در مثلث ABC داریم:



$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow 5^2 = 4^2 + AC^2 \Rightarrow AC = 3$$

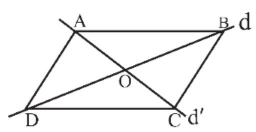
با توجه به قضیه فیثاغورس طول ضلع دیگر مستطیل برابر ۳ به دست می‌آید. با توجه به آن که $4 > 3$، پس در این مستطیل، تنها حالت ممکن آن است که طول برابر ۴ و عرض برابر ۳ باشد. یعنی با اطلاعات داده شده، یک و تنها یک مستطیل قابل رسم است.

بنابراین گزینه ۱ صحیح است.

▼**مثال ۱۶)** می‌دانیم چهارضلعی‌ای که قطرهایش منصف یکدیگر باشند، متوازی الاضلاع است. متوازی الاضلاعی رسم کنید که طول قطرهای آن ۴ و ۷ باشد.

(کتاب درسی، مکمل و مشابه تمرین ۱، صفحهٔ ۱۵)

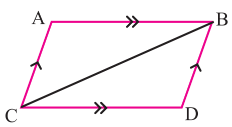
پاسخ دو خط متقاطع d و d' را که همدیگر را در نقطهٔ O قطع می‌کنند، در نظر می‌گیریم. روی خط d و در دو طرف نقطهٔ O، نقاط A و C را به فاصلهٔ ۳/۵ واحد از O جدا می‌کنیم. همچنین روی خط d' و در دو طرف نقطهٔ O، نقاط B و D را به فاصلهٔ ۲ واحد از O جدا می‌کنیم. $ABCD$ متوازی الاضلاع است و جواب مسئله می‌باشد. واضح است که به ازای هر دو خط متقاطع دلخواه، یک متوازی الاضلاع قابل رسم است، پس مسئله بی‌شمار جواب دارد.



▼**مثال ۱۷)** متوازی‌الاضلاعی رسم کنید که طول ضلع‌های آن ۳ و ۵ و طول قطر آن برابر ۶ باشد.

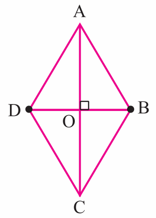
(کتاب درسی، مکمل تمرین ۱- صفحهٔ ۱۵)

پاسخ ابتدا مثلث ABC را که در آن $AB = 5$ ، $AC = 3$ و $BC = 6$ می‌باشد، رسم می‌کنیم (ابتدا پاره‌خط $AB = 5$ را رسم کرده و سپس به مرکز A و به شعاع ۳ و به مرکز B و به شعاع ۶، دو کمان رسم می‌کنیم تا همدیگر را در نقطهٔ C قطع کنند). حال از نقطهٔ B، خطی موازی AC و از نقطهٔ C، خطی موازی AB رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در نقطهٔ D قطع کنند. چهارضلعی $ABDC$، متوازی‌الاضلاع است و جواب مسئله می‌باشد.



▼مثال ۱۸) لوزی‌ای رسم کنید که طول ضلع آن ۵ و طول یکی از قطرهای آن برابر ۶ باشد.

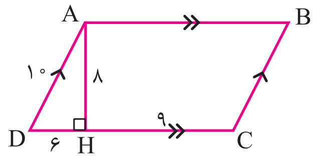
(کتاب درسی،مکمل و مشابه تمرین ۳، صفحهٔ ۱۶)



پاسخ می‌دانیم در لوزی، قطرها عمود منصف یکدیگرند. حال در مثلث OAB، با فرض $AB=5$ و $OB=3$ با کمک قضیهٔ فیثاغورس، $OA=4$ به دست می‌آید. بنابراین برای رسم لوزی، ابتدا مثلث OAB را با داشتن طول سه‌ضلع آن رسم می‌کنیم. سپس AO را از سمت O به اندازهٔ خودش امتداد می‌دهیم تا نقطهٔ C به دست آید و به‌طور مشابه، BO را از سمت O به اندازهٔ خودش امتداد می‌دهیم تا نقطهٔ D حاصل شود. چهارضلعی $ABCD$ جواب مسئله است.

▼مثال ۱۹) متوازی‌الاضلاعی رسم کنید که طول دو ضلع آن ۱۵ و ۱۰ و طول ارتفاع وارد بر ضلع بزرگ‌تر آن برابر ۸ باشد.

(کتاب درسی، مکمل تمرین ۱، صفحهٔ ۱۵)



پاسخ مطابق شکل در مثلث ADH داریم:

$$AD^2=AH^2+DH^2 \Rightarrow 10^2=8^2+DH^2 \Rightarrow DH=6$$

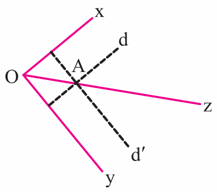
حال مثلث ADH با داشتن طول سه‌ضلع آن، قابل رسم است. DH را از سمت H به اندازهٔ ۹ واحد امتداد می‌دهیم تا نقطهٔ C به دست آید. از C خطی موازی DA و از A، خطی موازی DC رسم می‌کنیم تا همدیگر را در نقطهٔ B قطع کنند. چهارضلعی $ABCD$ جواب مسئله است.

رسم خط عمود بر یک خط و رسم خط موازی با یک خط

مجموعهٔ نقاطی از صفحه که از یکی از خطوط صفحه به فاصلهٔ معلومی باشند، دو خط موازی با آن خط هستند که در طرفین آن خط قرار دارند.

▼مثال ۲۰) دو ضلع یک زاویه را در نظر بگیرید. نقطه‌ای بیابید که فاصلهٔ آن از هر ضلع زاویهٔ مورد نظر ٤ واحد باشد و سپس با کمک آن، نیمساز زاویهٔ مورد نظر را رسم کنید.

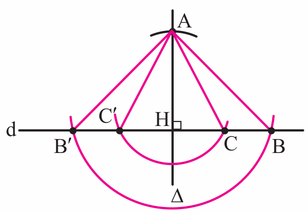
(کتاب درسی، مکمل و مشابه تمرین ۴، صفحهٔ ۱۶)



پاسخ خط d را موازی نیم‌خط Ox و به فاصلهٔ ۴ واحد از آن و خط d' را موازی نیم‌خط Oy و به فاصلهٔ ۴ واحد از آن رسم می‌کنیم. محل تلاقی خطوط d و d' (نقطهٔ A) از دو ضلع زاویه به یک فاصله است پس روی نیمساز زاویهٔ xOy قرار دارد. پس برای رسم نیمساز این زاویه، کافی است از O به A وصل کرده و آن را امتداد دهیم تا نیم خط Oz حاصل شود.

▼مثال ۲۱) از مثلث ABC، اندازهٔ ضلع‌های $AB=c$، $AC=b$ و طول ارتفاع $AH=h$ معلوم است. مثلث را رسم کنید.

(کتاب درسی، مکمل و مرتبط با کار در کلاس، صفحهٔ ۱۴)



پاسخ خط دلخواه d را در نظر می‌گیریم .در نقطه‌ای مانند H روی این خط، خط Δ را بر خط d عمود رسم می‌کنیم .سپس به مرکز H و به شعاع h_a، دایره ای رسم می‌کنیم تا خط Δ را در نقطهٔ A قطع نماید حال به مرکز A، یکبار به شعاع b و بار دیگر به شعاع c، دایره‌هایی رسم می‌کنیم به گونه‌ای که دایره اول، خط d را در نقاط B و B' و دایرهٔ دوم، خط d را در نقاط C و C' قطع نماید ازوصل کردن این ۴ نقطه به نقطهٔ A، ۴ مثلث ABC، ABC'، $AB'C$ و $AB'C'$ پدید می‌آید که دو به دو همنهشت هستند بنابراین در حالت کلی دو مثلث ABC و $AB'C$ جواب مساله است.

▼مثال ۲۲) در رسم ABC با معلومات $c=17$، $b=6$ و h_a، دو جواب متمایز پیدا شده است .طول h_a کدام عدد می‌تواند باشد؟

(کتاب درسی، مکمل و مرتبط با کار در کلاس، صفحهٔ ۱۴- آزاد ریاضی خارج از کشور- ۸۷)

۱) ۶ ۲) ۵ ۳) ۷ ۴) ۱۸

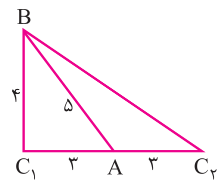
پاسخ واضح است که h_a، طول عمودی است که از نقطه A بر ضلع BC یا امتداد آن رسم می‌شود و در نتیجه از طول تمام خطوط دیگری که نقطه A را به نقاطی از پاره خط BC وصل می‌کند (از جمله $AB=c$ و $AC=b$) کوتاه‌تر است بنابراین $h_a<17$ و $h_a<6$ است، پس تنها جواب قابل قبول، $h_a=5$ می‌باشد .

بنابراین گزینه ۲ صحیح است .

▼مثال ۲۳) چند مثلث وجود دارد که طول دو ضلع آن ۳و۵ و یکی از ارتفاع ها برابر ۴ باشد؟

(کتاب درسی، مکمل و مرتبط با کار در کلاس، صفحهٔ ۱۴- آزاد ریاضی خارج از کشور- ۸۷)

۱) ۲ ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۶



پاسخ اگر اضلاع مثلث را $b=3$، $c=5$ و a در نظر بگیریم، آن‌گاه ارتفاع به طول ۴ نمی توانـد ارتفاع وارد بر اضلاع وارد بر اضلاع a و c باشد (طول ارتفاع نباید بیشتر از طول اضلاع مجاور آن باشد. دقت کنید که ضلع b برای هر یک از ارتفاع های وارد بر اضلاع a و c، ضلع مجاور محسوب می‌شود) پس ارتفاع وارد بر ضلع b، برابر $h_b = 4$ است.
با توجه به آن که ۳، ۴ و ۵ اعداد فیثاغورسی هستند،
پس مطابق شکل، دو مثلث ABC_1 و ABC_2 که یکی قائم‌الزاویه و دیگری منفرجه الزاویه است، جواب مسئله می‌باشند.
(هرکدام از این مثلث‌ها، دارای اضلاعی به طول ۳ و ۵ هستند و ارتفاع وارد بر یکی از اضلاع آن‌ها، به طول ۴ است)
بنابراین گزینه ۱ صحیح است .

نکته: برای رسم یک مثلث، باید سه جزء مستقل از هم در آن مثلث، معلوم باشد.
(سه جزء زمانی مستقل ازیکدیگرند که با داشتن دوتا از میان آن‌ها، نتوان جز سوم را محاسبه کرد.)

مثال ۲۴) در مثلث قائم الزاویه‌ای، وتر آن مشخص است. با معلوم بودن اندازهٔ کدام جزء دیگر، این مثلث به طور منحصر به فرد قابل رسم نیست؟
(کتاب درسی، مکمل و مرتبط با صفحهٔ ۱۵- سراسری ریاضی -۷۷)

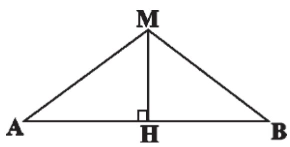
۱) ارتفاع وارد بروتر ۲) ارتفاع وارد برضلع قائم ۳)میانهٔ وارد بر وتر ۴) میانه وارد بر ضلع قائم

پاسخ در مثلث‌های قائم الزاویه، همیشه یک جزء (زاویهٔ قائمه) مشخص است، بنابراین برای رسم یک مثلث قائم الزاویه به دوجزء مستقل نیاز داریم. از آن جا که میانه وارد بر وتر در مثلث قائم‌الزاویه، همواره نصف وتر است، پس داشتن طول وتر و میانه وارد بر آن، دوجزء مستقل محسوب نمی‌شود و مثلث بطور یکتا قابل رسم نیست. بنابراین گزینه ۳ صحیح است.

مثال ۲۵) پاره‌خط AB به طول ۲۶ سانتی‌متر مفروض است. نقطه‌ی M از دو سر پاره‌خط AB به فاصله‌ی ۱۵ سانتی‌متر قرار گرفته است. فاصله‌ی نقطه‌ی M تا پاره‌خط AB چند سانتی‌متر است؟

۱) $2\sqrt{14}$ ۲) ۵ ۳) $3\sqrt{7}$ ۴) ۶

(کتاب درسی، مثال صفحه‌های ۱۳ و ۱۴)



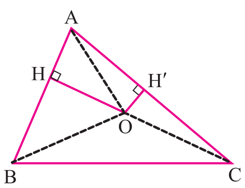
پاسخ چون M از دو سر پاره‌خط AB به یک اندازه است، پس M روی عمودمنصف پاره‌خط AB قرار دارد.
یعنی $AH = 13cm$ و $\hat{H} = 90^\circ$.
طبق رابطه‌ی فیثاغورس در مثلث AMH داریم:

$$MH^2 = MA^2 - AH^2 \Rightarrow MH^2 = 15^2 - 13^2 = 225 - 169 = 56 \Rightarrow MH = \sqrt{56} = \sqrt{4\times 14} = 2\sqrt{14}$$

بنابراین گزینهٔ ۱ صحیح است.

همرسی عمود منصف های اضلاع یک مثلث : عمود منصف های اضلاع هر مثلث همرسند(همگی از یک نقطه عبور می‌کنند.) و نقطه تلاقی آنها از سه راس مثلث به یک فاصله است. این نقطه مرکز دایرهٔ محیطی مثلث است.

مثال ۲۶) ثابت کنید عمودمنصفهای اضلاع یک مثلث همرسند.
(کتاب درسی، مثال صفحهٔ ۱۸)



پاسخ فرض کنیم عمودمنصف های اضلاع AB و AC، یکدیگر را در نقطه O قطع نمایند.

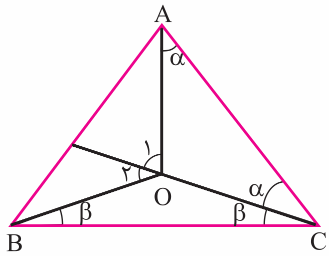
$$\left.\begin{array}{l} O \Rightarrow OA = OB \quad \text{روی عمود منصف } AB \text{ است.} \\ O \Rightarrow OA = OC \quad \text{روی عمود منصف } AC \text{ است.} \end{array}\right\} \Rightarrow OB = OC \Rightarrow \text{روی عمود منصف } BC \text{ است } O$$

بنابراین عمود منصف ضلع BC نیز از نقطه O می‌گذرد، پس سه عمود منصف در نقطه O همرسند.

مثال ۲۷) در مثلث متساوی الساقین ABC $(AB = AC)$، $\hat{A} = 70^\circ$ است اگر O نقطه همرسی عمود منصف های این مثلث باشد، آن گاه $A\hat{O}B$ کدام است ؟
(کتاب درسی، مکمل و مرتبط با مثال صفحهٔ ۱۸- آزمون کانون، ۷ آذر ۹۳)

۱) 70° ۲) 100° ۳) 110° ۴) 140°

پاسخ مطابق شکل اگر O نقطه همرسی عمود منصف های اضلاع مثلث ABC باشد آن‌گاه به دلیل برابری OA، OB، OC، هرکدام از مثلث های OAB، OAC و OBC متساوی الساقین هستند و در نتیجه $O\hat{C}A = O\hat{A}C$ و $O\hat{C}B = O\hat{B}C$ و داریم :



$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=۱۸۰^\circ \Rightarrow ۷۰^\circ+۲\hat{C}=۱۸۰^\circ \Rightarrow ۲\hat{C}=۱۱۰^\circ$$

$\triangle OAC$: زاویه خارجی است $\hat{O}_۱ \Rightarrow \hat{O}_۱=O\hat{A}C+O\hat{C}A=۲\alpha$

$\triangle OBC$: زاویه خارجی است $\hat{O}_۲ \Rightarrow \hat{O}_۲=O\hat{B}C+O\hat{C}B=۲\beta$

$$A\hat{O}B=\hat{O}_۱+\hat{O}_۲=۲(\alpha+\beta)=۲\hat{C}=۱۱۰^\circ$$

بنابراین گزینه ۳ صحیح است.

نکته: محل تلاقی عمود منصف ها در مثلث حاده الزاویه، درون مثلث، در مثلث قائم الزاویه، وسط وتر و در مثلث منفرجه الزاویه، بیرون مثلث است .

▼مثال ۲۸) زوایای مثلثی با اعداد ۱، ۵، ۶ متناسب هستند. مرکز دایرهٔ محیطی این مثلث کجا قرار می‌گیرد؟ (کتاب درسی، مکمل و مرتبط با مثال صفحهٔ ۱۸)

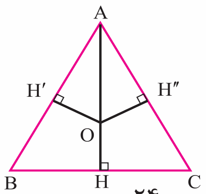
۱) خارج مثلث ۲) درون مثلث ۳) وسط ضلع بزرگتر ۴) روی یکی از راس های مثلث

پاسخ *اگر فرض کنیم* $\hat{A}=K$ ، $\hat{B}=۵K$ *و* $\hat{C}=۶K$ *، آن‌گاه داریم :* $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=۱۸۰^\circ \Rightarrow ۱۲K=۱۸۰^\circ \Rightarrow K=۱۵^\circ$ *بنابراین* $\hat{C}=۹۰^\circ$
و مثلث قائم الزاویه است . در مثلث قائم الزاویه، محل تلاقی عمود منصف ها، وسط وتر (ضلع بزرگتر) قرار دارد .
بنابراین گزینه ۳ صحیح است .

▼مثال ۲۹) در مثلثی با اضلاع ۲۰، ۲۰، ۲۴، فاصلهٔ نقطهٔ همرس عمود منصف ها از ساق مثلث کدام است ؟
(کتاب درسی، مکمل و مرتبط با مثال صفحهٔ ۱۸- آزمون کانون - ۸ آذر ۹۲)

۱) ۶ ۲) ۷/۵ ۳) ۶/۵ ۴) ۷

پاسخ *با توجه به آن که* $۲۰^۲+۲۰^۲ \rangle ۲۴^۲$ *، پس مثلث* ABC *، حاده الزاویه است و نقطه همرسی عمود منصف‌ها (نقطه* O *) داخل مثلث است. داریم :*



$$\left.\begin{array}{l} O\hat{A}H'=O\hat{A}H \text{ مشترک} \\ O\hat{H}'A=O\hat{H}B=۹۰^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle AOH' \sim \triangle ABH \Rightarrow \frac{OH'}{BH}=\frac{AH'}{AH} \Rightarrow \frac{OH'}{۱۲}=\frac{۱۰}{۱۶} \Rightarrow OH'=۷/۵$$

تذکر : عمود منصف ضلع BC *، همان ارتفاع* AH *است (مثلث* ABC *متساوی الساقین است) با توجه به آن که* $BH=\frac{۲۴}{۲}=۱۲, AB=۲۰$ *است،*
بنابراین AH *با کمک قضیهٔ فیثاغورس در مثلث* ABH *قابل محاسبه است .*
بنابراین گزینه ۲ صحیح است.

▼مثال ۳۰) چند مثلث متمایز ABC با اطلاعات $BC=۸$ ، میانه‌ی $AM=۶$ و مساحت $S=۳۲$ قابل رسم است؟
(کتاب درسی، صفحه‌های ۱۰، ۱۱ و ۱۵)

۱) هیچ ۲) ۱
۳) ۲ ۴) ۴

پاسخ *اگر* AH *ارتفاع وارد بر ضلع* BC *باشد، آن‌گاه:*

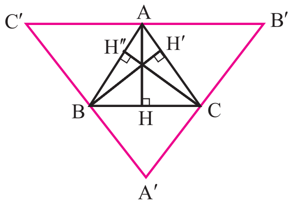
$$S_{ABC}=\frac{۱}{۲}AH\times BC \Rightarrow ۳۲=\frac{۱}{۲}AH\times ۸ \Rightarrow AH=۸$$

می‌دانیم طول ارتفاع نظیر یک رأس نمی‌تواند از طول میانه‌ی نظیر آن رأس بیش‌تر باشد، بنابراین مثلثی با طول میانه‌ی $AM=۶$ *و طول ارتفاع* $AH=۸$ *وجود ندارد.*

همرسی ارتفاع های مثلث: در هر مثلث، ارتفاع های وارد بر اضلاع، در یک نقطه همرسند محل تلاقی ارتفاع ها در مثلث حاده الزاویه، درون مثلث، در مثلث قائم الزاویه، در راس قائمه و در مثلث منفرجه الزاویه، بیرون مثلث است.

▼مثال ۳۱) ثابت کنید سه ارتفاع هر مثلث همرسند (کتاب درسی، مثال صفحهٔ ۱۹)

پاسخ *از هر کدام از راس های مثلث* ABC *خطی به موازات ضلع مقابل رسم می‌کنیم تا مثلث* $A'B'C'$ *حاصل شود.*



$$\left.\begin{matrix} AB' \parallel BC \\ AB \parallel B'C \end{matrix}\right\} \Rightarrow \text{متوازی الاضلاع است } AB'CB \text{ چهار ضلعی } \Rightarrow AB' = BC \quad (۱)$$

$$\left.\begin{matrix} AC' \parallel CB \\ AC \parallel C'B \end{matrix}\right\} \Rightarrow \text{متوازی الاضلاع است } AC'BC \text{ چهار ضلعی } \Rightarrow AC' = BC \quad (۲)$$

$$(۱),(۲) \Rightarrow AB' = AC'$$

اگر AH ارتفاع وارد بر ضلع BC باشد، آن‌گاه :

$$\left.\begin{matrix} AH \perp BC \\ BC \parallel B'C' \end{matrix}\right\} \Rightarrow AH \perp B'C'$$

بنابراین AH، ضلع $B'C'$ را نصف کرده و بر آن عمود است، پس AH عمود منصف ضلع $B'C'$ در مثلث $A'B'C'$ است.
به طور مشابه می‌توان ثابت کرد BH' عمود منصف ضلع $A'C'$ و CH'' عمود منصف ضلع $A'B'$ در مثلث $A'B'C'$ هستند.
از آن‌جا که عمود منصف های اضلاع هر مثلث همرسند، پس AH و BH' و CH'' همرسند، یعنی ارتفاع های مثلث ABC همرس هستند.

▼مثال ۳۲) **در کدام مثلث که سه ضلع آن داده شده، محل تلاقی سه ارتفاع خارج مثلث است ؟**

(کتاب درسی، مکمل و مرتبط با مثال صفحهٔ ۱۹- آزاد پزشکی-۸۲)

۱) $c=۹, b=۸, a=۷$
۲) $c=۷, b=۶, a=۵$
۳) $c=۵, b=۴, a=۳$
۴) $c=۴, b=۳, a=۲$

پاسخ در یک مثلث منفرجه الزاویه ،محل تلاقی سه ارتفاع ،خارج مثلث قرار دارد.در گزینه ۴، $۴^۲ > ۳^۲ + ۲^۲$ ، پس $c^۲ > b^۲ + c^۲$ ودر نتیجه مثلث منفرجه الزاویه است. بنابراین گزینه ۴ صحیح است .

▼مثال ۳۳) **در یک مثلث بین زوایا رابطهٔ $\hat{C} = \hat{A} + ۲\hat{B}$ برقرار است. محل تلاقی سه ارتفاع کجا قرار دارد؟**

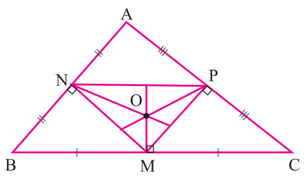
(کتاب درسی، مکمل و مرتبط با مثال صفحهٔ ۱۹- آزاد ریاضی -۹۰)

۱) داخل مثلث
۲) روی محیط مثلث
۳) خارج مثلث
۴) هرسه حالت ممکن است.

پاسخ $\hat{C} = \hat{A} + ۲\hat{B} > \hat{A} + \hat{B} \Rightarrow ۲\hat{C} > \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{C} > ۹۰^\circ$ در نتیجه مثلث منفرجه الزاویه است و محل تلاقی ارتفاع‌های آن، خارج مثلث قرار دارد.
بنابراین گزینه ۳ صحیح است.

▼مثال ۳۴) **مثلث ABC مفروض است. وسط های اضلاع آن را M،N،P می‌نامیم. کدام گزینه همواره درست است؟**

(کتاب درسی، مکمل و مرتبط با مثال صفحهٔ ۱۹-آزمون کانون - ۷ آذر ۹۳)



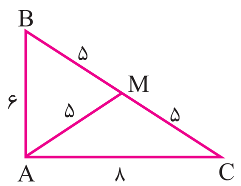
۱) نقطهٔ همرسی ارتفاع های MNP از سه ضلع آن به یک فاصله است.
۲) نقطهٔ همرسی ارتفاع های MNP از سه راس آن به یک فاصله است.
۳) نقطهٔ همرسی ارتفاع های MNP از سه ضلع مثلث ABC به یک فاصله است.
۴) نقطهٔ همرسی ارتفاع های MNP از سه راس مثلث ABC به یک فاصله است.

پاسخ اضلاع مثلث MNP با اضلاع مثلث ABC موازی است، پس عمود منصف های اضلاع ABC بر اضلاع MNP عمود هستند، یعنی نقطهٔ O، محل تلاقی ارتفاع های مثلث MNP، همان محل تلاقی عمود منصف های اضلاع مثلث ABC است که از سه راس مثلث ABC به یک فاصله می‌باشد.
بنابراین گزینه ۴ صحیح است.

▼مثال ۳۵) **در مثلثی با اضلاع ۶، ۸، ۱۰، فاصلهٔ نقطهٔ همرسی ارتفاع ها تا نقطهٔ تلاقی عمود منصف های مثلث چقدر است ؟**

(کتاب درسی، مکمل و مرتبط با مثال صفحهٔ ۱۹- آزمون کانون، ۱۰ آذر ۹۱)

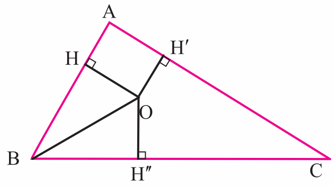
۱) ۵
۲) $\frac{۵}{۲}$
۳) ۳
۴) ۴



پاسخ با توجه به آن که $۶^۲ + ۸^۲ = ۱۰^۲$ پس مثلث قائم الزاویه است. در مثلث قائم الزاویه، محل تلاقی ارتفاع ها، راس قائمه و محل تلاقی عمود منصف ها، وسط وتر است. فاصله بین این دونقطه برابر طول میانهٔ وارد بر وتر، یعنی برابر نصف طول وتر است. از آن جا که طول وتر در این مثلث برابر ۱۰ است، پس فاصله برابر ۵ می‌باشد.
بنابراین گزینه ۱ صحیح است.

همرسی نیمسازهای زوایای مثلث : نیمساز های داخلی زوایای هر مثلث همرسند و نقطهٔ تلاقی آن ها از سه ضلع مثلث به یک فاصله است.

▼مثال ۳۶) ثابت کنید نیمسازهای زاویه های داخلی هر مثلث همرسند. (کتاب درسی، مثال صفحهٔ ۱۹)



پاسخ *فرض کنیم نیمسازهای داخلی زاویه‌های A و B، همدیگر را در نقطهٔ O قطع کنند.*

از نقطهٔ O عمودهایی بر سه ضلع مثلث رسم می‌کنیم. داریم:

O روی نیمساز $\hat{A}$ است. $\Rightarrow OH = OH'$

O روی نیمساز $\hat{B}$ است. $\Rightarrow OH = OH''$

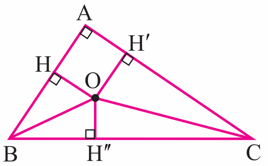
$\Rightarrow OH' = OH'' \Rightarrow$ Oروی نیمساز زاویه C است

بنابراین نیمساز زاویهٔ C از نقطهٔO می‌گذرد، یعنی نیمسازهای داخلی زاویه های مثلث ABC در نقطه‌ی O همرسند.

▼مثال ۳۷) طول دوضلع زاویهٔ قائمه از مثلث قائم الزاویه ای برابر با ۵ و ۱۲ است. اگر نقطه O همرسی نیمسازهای زاویه های داخلی این مثلث باشد، فاصله O از وتر این مثلث کدام است ؟ (کتاب درسی، مکمل و مرتبط با مثال صفحهٔ ۱۹- آزمون کانون - ۸ آذر ۹۲)

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) $\frac{۵}{۲}$

پاسخ *مطابق شکل، اگر O نقطهٔ همرسی نیمسازهای زاویه های داخلی مثلث ABC باشد، آن‌گاه $OH = OH' = OH'' = r$ است و داریم:*



$$S_{ABC} = S_{OAB} + S_{OAC} + S_{OBC} = \frac{۱}{۲}AB.AC$$

$$= \frac{۱}{۲}OH.AB + \frac{۱}{۲}OH'.AC + \frac{۱}{۲}OH''.BC \Rightarrow \frac{۱}{۲}\times ۵ \times ۱۲ = \frac{۱}{۲}r\left(۵+۱۲+۱۳\right) \Rightarrow ۳۰ = ۱۵r \Rightarrow r = ۲$$

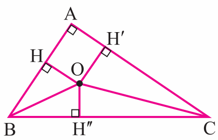
تذکر : در مثلث قائم الزاویه ای به طول اضلاع قائمهٔ ۵ و ۱۲، طول وتر برابر ۱۳ است.

بنابراین گزینه ۲ صحیح است.

▼مثال ۳۸) در یک مثلث، فاصلهٔ محل همرسی نیمسازهای داخلی از دوضلع آن به ترتیب برابر $x^{۲} - ۳$ و $۳x + ۱$ است. فاصلهٔ این نقطه از ضلع دیگر این مثلث چقدر است ؟ (کتاب درسی،مکمل و مرتبط با مثال صفحهٔ ۱۹)

۱) ۱۳ ۲) ۱۰ ۳) ۷ ۴) ۴

پاسخ *محل همرسی نیمسازهای داخلی زوایای یک مثلث، از سه ضلع آن به یک فاصله است، پس داریم:*



$$x^{۲} - ۳ = ۳x + ۱ \Rightarrow x^{۲} - ۳x - ۴ = ۰ \Rightarrow (x-۴)(x+۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۴ \\ x = -۱ \end{cases}$$ غ ق ق

$OH = OH' = OH''$

(به ازای $x = -۱$، فاصله ها منفی می‌شوند که غیر ممکن است).

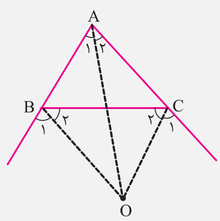
$OH = x^{۲} - ۳$

$OH' = ۳x + ۱ \xrightarrow{x=۴} OH' = ۱۳$

۱۳=۱+(۴)۳= فاصلهٔ محل همرسی نیمسازها از ضلع سوم. بنابراین گزینه ۱ صحیح است.

نکته:

نیمسازهای خارجی دو زاویه‌ی مثلث و نیمساز داخلی زاویه‌ی سوم آن مثلث همرسند.



▼مثال ۳۹) در صفحهٔ یک مثلث، چند نقطه می‌توان یافت که ا زسه ضلع آن مثلث یا امتداد آن ها به یک فاصله باشد ؟ (کتاب درسی، مکمل و مرتبط با مثال صفحهٔ ۱۹- سراسری تجربی-۸۰)

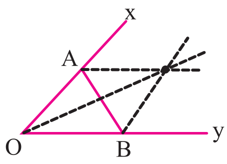
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ *محل همرسی نیمسازهای زاویه‌های داخلی مثلث و همچنین محل همرسی هر دو نیمساز زوایای خارجی و نیمساز داخلی دیگر مثلث از سه ضلع یا امتداد سه ضلع مثلث به یک فاصله‌اند، پس در مجموع ۴ نقطه با این ویژگی وجود دارد.*

بنابراین گزینه ۴ صحیح است.

▼مثال ۴۰) زاویهٔ ثابت xoy مفروض است. اگر نقطه A روی نیم خط ox و نقطه B روی نیم خط oy تغییر مکان دهند، محل برخورد نیمسازهای خارجی دو زاویهٔ A و B از مثلث OAB، همواره کجا قرار میگیرد؟ (کتاب درسی، مکمل و مرتبط با مثال صفحهٔ ۱۹)

۱) روی نیمساز زاویهٔ xoy ۲) روی دایره‌ای به مرکز o ۳) روی خطی موازی ox ۴) روی خطی عمود بر ox



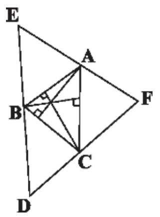
پاسخ *از آن جا که دونیمساز خارجی زوایای A و B و نیمساز داخلی زاویهٔ O از مثلث OAB همرسند، پس نقطهٔ تلاقی نیمسازهای خارجی زاویه های A و B (با تغییر مکان این دو نقطه روی نیم خط های ox و oy) همواره روی نیمساز داخلی زاویهٔ O قرار دارد.*

بنابراین گزینهٔ ۱ صحیح است.

▼مثال ۴۱) در مثلث ABC، N نقطه‌ی همرسی ارتفاع‌های مثلث می‌باشد. از هر رأس مثلث ABC خطی به موازات ضلع مقابل به آن رسم کرده تا مثلث DEF به‌وجود آید. کدام گزینه همواره در مورد نقطه‌ی N درست است؟

(کتاب درسی، صفحهٔ ۲۰)

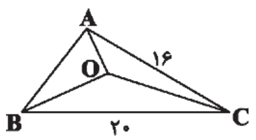
۱) محل همرسی ارتفاع‌های مثلث DEF ۲) محل همرسی نیم‌سازهای مثلث DEF
۳) محل همرسی عمودمنصف‌های اضلاع مثلث DEF ۴) محل همرسی یک نیم‌ساز و یک ارتفاع از مثلث DEF



پاسخ *طبق مثال کتاب درسی ارتفاع‌های مثلث ABC، عمودمنصف‌های اضلاع مثلث DEF هستند و در نتیجه N محل همرسی عمودمنصف‌های اضلاع مثلث DEF است.*

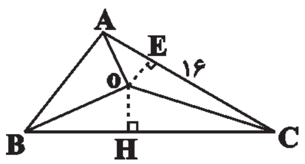
بنابراین گزینهٔ ۳ صحیح است.

▼مثال ۴۲) در شکل زیر، O نقطه‌ی همرسی نیم‌سازهای زوایای مثلث ABC است. اگر $S_{AOC}=۸۰cm^۲$ باشد، مساحت مثلث BOC چند سانتی‌مترمربع است؟



(کتاب درسی، صفحه‌های ۲۰ و ۲۱)

۱) ۹۶ ۲) ۱۰۰
۳) ۱۰۸ ۴) ۱۱۶



پاسخ *می‌دانیم نقطه‌ی همرسی نیم‌سازهای زوایای داخلی هر مثلث از سه ضلع آن مثلث به یک فاصله است، پس $OE=OH=h$، حال:*

$$S_{AOC}=\frac{۱}{۲}h.AC \Rightarrow ۸۰=\frac{۱}{۲}h\times ۱۶ \Rightarrow h=۱۰cm$$

$$S_{BOC}=\frac{۱}{۲}h.BC=\frac{۱}{۲}\times ۱۰\times ۲۰=۱۰۰cm^۲$$

بنابراین گزینهٔ ۲ صحیح است.

۲ استدلال

استدلال استنتاجی

گزاره : به یک جمله خبری که دقیقا درست یا نادرست باشد، گزاره گفته می‌شود. گزاره می‌تواند تنها یک خبر را اعلام کند که به آن گزارهٔ ساده گفته می‌شود و می‌تواند بیش از یک خبر را اعلام کندو ترکیبی از چند گزاره ساده باشد که به آن گزاره مرکب گفته می‌شود.

نقیض یک گزاره : همان طور که گفته شد ارزش یک گزاره یا درست است یا نادرست. نقیض یک گزاره، ارزشی دقیقاً مخالف ارزش خود گزاره را دارا می‌باشد.

▼مثال ۴۳) نقیض گزاره های زیر را بنویسید. (کتاب درسی، مکمل و مشابه مثال صفحهٔ ۲۳)

الف) a از b بزرگ تر است.

ب) مجموع زوایای داخلی هر مثلث ۱۸۰° است.

ج) یک چهار ضلعی وجود دارد که مجموع زوایای داخلی‌اش ۳۶۰° نیست.

پاسخ
الف) (a از b بزرگ تر نیست) که معادل است با (a از b کوچکتر و یا با b برابر است.)
ب) (مثلثی وجود دارد که مجموع زوایای داخلی آن 180° نیست.)
ج) (هر چهار ضلعی مجموع زوایای داخلی اش 360° است.)

گزاره های شرطی

در برخی از گزاره‌ها به جای آن که درباره چیزی خبر قطعی داده شود، خبری که اعلام می‌شود با یک شرط بیان می‌گردد. مثلا ((اگر باران ببارد مسابقه برگزار نخواهد شد.))، به چنین گزاره‌هایی، گزاره های شرطی گفته می‌شود.

مثال ۴۴) گزاره های زیر را به صورت شرطی بنویسید. (کتاب درسی،مکمل و مشابه مثال صفحه ۲۳)

الف) هر مستطیل، یک متوازی الاضلاع است . **ب) در دومثلث متشابه، اضلاع متناظر، متناسب اند.**

پاسخ
الف) اگر یک چهار ضلعی مستطیل باشد، آن گاه آن چهارضلعی متوازی الاضلاع است .
ب) اگر دومثلث متشابه باشند، آن گاه اضلاع متناظر آن ها متناسب‌اند.

یک گزارهٔ شرطی که همواره برقرار باشد، **قضیهٔ شرطی** نامیده می‌شود. در قضیه‌های شرطی، جملهٔ شرط یا جمله‌ای که بعد از «اگر» می‌آید، «فرض قضیه» و جملهٔ نتیجه که بعد از کلمهٔ «آن‌گاه» می‌آید، «حکم قضیه» نامیده می‌شود.
اگر در یک عبارت شرطی، فرض قضیه برقرار باشد ولی حکم درست نباشد، این عبارت شرطی یک قضیهٔ شرطی نخواهد بود. اگر جای فرض و حکم در یک قضیهٔ شرطی عوض شود، آن گاه عبارت شرطی حاصل، عکس قضیهٔ شرطی نامیده می‌شود. اگر عکس یک قضیهٔ شرطی، خود یک قضیهٔ شرطی باشد، آن گاه این دو قضیهٔ شرطی را می‌توان به صورت یک قضیه بیان کرد. چنین قضیه‌ای، قضیهٔ دوشرطی نامیده می‌شود.

مثال ۴۵) عکس هر یک از قضایای شرطی زیر را نوشته و سپس آن را به صورت قضیهٔ دوشرطی بنویسید. (کتاب درسی، مکمل و مشابه مثال صفحه ۲۵)
الف)نقطه‌ای که روی عمودمنصف یک پاره‌خط قرار دارد، از دو سر پاره‌خط به یک فاصله است.
ب) نقطه‌ای که روی نیمساز یک زاویه قرار دارد، از دو ضلع زاویه به یک فاصله است.

پاسخ
الف) عکس قضیه: اگر نقطه‌ای از دو سر یک پاره‌خط به یک فاصله باشد، آن‌گاه روی عمود منصف آن پاره‌خط قرار دارد.
قضیهٔ دوشرطی: یک نقطه روی عمود منصف یک پاره‌خط قرار دارد اگر و تنها اگر از دو سر آن پاره‌خط به یک فاصله باشد.
ب)عکس قضیه: اگر نقطه‌ای از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله باشد، آن‌گاه روی نیمساز آن زاویه قرار دارد.
قضیهٔ دوشرطی: یک نقطه روی نیمساز یک زاویه قرار دارد اگر و تنها اگر از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله باشد.

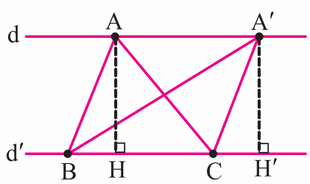
مثال نقض

به مثالی که نشان دهد یک نتیجه گیری کلی یا یک حکم کلی نادرست است، مثال نقض گفته می‌شود.

مثال ۴۶) برای احکام کلی زیر، مثال نقض ارائه کنید. (کتاب درسی، مکمل و مشابه مثال صفحه ۲۵)
الف) همهٔ اعداد صحیح، مثبت هستند.
ب) هر چهارضلعی که چهار ضلع برابر داشته باشد ،مربع است .
ج) به ازای هر عدد طبیعی n، مقدار عبارت n^2+n+41، عدد اولی است

پاسخ
الف) عدد (-2) یک عدد صحیح منفی است. ب) لوزی چهار ضلع برابر دارد در حالی که مربع نیست .
ج) به ازای n=۴۱ داریم ؛ $41^2+41+41=41(41+1+1)=41\times43$ واضح است که این عدد به دو عامل اول ۴۱و ۴۳ تجزیه شده است، پس خود نمی‌تواند عدد اول باشد .

مثال ۴۷) برای رد حدس های کلی زیر مثال نقض ارائه دهید : (کتاب درسی،مکمل و مشابه مثال صفحه ۲۵- امتحان نهایی - خرداد ۸۹)
الف) اگر دوزاویه مکمل یکدیگر باشند، آن گاه هر دوزاویه قائمه اند.
ب) اگر دومثلث هم مساحت باشند، آن گاه همنهشت هستند.



پاسخ
الف) دو زاویه به اندازه‌های 60° و 120° مکمل هستند اما قائمه نیستند .
ب) دو مثلث که قاعده‌های مشترک داشته باشند و راس مقابل به قاعده‌شان روی خطی موازی قاعده باشد، هم مساحت‌اند، اما لزوما همنهشت نیستند.

مانند مثلث‌های ABC و $A'BC$ در شکل مقابل.

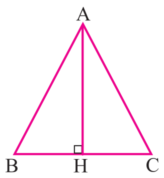
▼مثال ۴۸) کدام حکم زیر با مثال نقض رد می‌شود ؟ (کتاب درسی، مشابه مثال صفحهٔ ۲۵)

۱) هر مربع، یک مستطیل است.

۲) هر مثلث، حداقل یک زاویهٔ بزرگتر یا مساوی 60° دارد.

۳) ارتفاع هر مثلث، از همه اضلاع آن کوچکتر است.

۴) مثلث متساوی الساقین، همواره دو زاویهٔ حاده دارد.



پاسخ ارتفاع یک مثلث از اضلاع مجاورش کوچک‌تر است اما لزوما از ضلع نظیر آن ارتفاع، کوچک‌تر نیست مثلا در شکل مقابل $AH > BC$ است.

بنابراین گزینه ۳ صحیح است.

▼مثال ۴۹) کدام مثال زیر یک مثال نقض برای حکم کلی((نقطه همرسی ارتفاع های مثلث یا در داخل آن است و یا در خارج آن)) می‌باشد ؟
(کتاب درسی، مشابه مثال صفحهٔ ۲۵)

۱) مثلث متساوی الاضلاع
۲) مثلث حاده الزاویه
۳) مثلث قائم الزاویه
۴) مثلث منفرجه الزاویه

پاسخ در مثلث قائم الزاویه، نقطهٔ همرسی ارتفاع‌ها روی راس قائمه قرار دارد .

بنابراین گزینه ۳ صحیح است .

▼مثال ۵۰) کدام یک از گزاره های زیر همواره درست است؟ (کتاب درسی، مکمل و مشابه کار در کلاس ۲ ، صفحهٔ ۲۶)

۱) در هر مثلث، اندازهٔ بزرگترین زاویه، از چهار برابر اندازهٔ کوچک‌ترین زاویه، کوچک‌تر است.

۲) برای هر دو مجموعهٔ A و B، یا $A \subseteq B$ و یا $B \subseteq A$.

۳) هر زاویه خارجی یک چند ضلعی، از هر زاویه داخلی آن بزرگ‌تر است .

۴) هر دو مثلث همنهشت، دارای مساحت های برابر هستند.

پاسخ گزینه‌های ۱ تا ۳ دارای مثال نقض هستند.

گزینه ۱: اگر زوایای مثلث ABC به صورت $A = 120^\circ$ و $B = 40^\circ$ و $C = 20^\circ$ باشد، آن‌گاه $\hat{A} > 4\hat{C}$.

گزینه ۲: اگر $A = \{1\}$ و $B = \{2\}$ آن‌گاه $A \not\subset B$ و $B \not\subset A$.

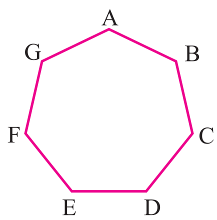
گزینه ۳: اگر در یک چند ضلعی، یک زاویه‌ی‌داخلی برابر 120° باشد، آن‌گاه زاویه‌ی‌خارجی نظیر آن 60° است.

اما در گزینه ۴ می‌دانیم که در هر دو مثلث همنهشت، اجزای متناظر برابر یکدیگرند، بنابراین دوضلع متناظر و ارتفاع‌های نظیر آن در این دومثلث برابر بوده و در نتیجه مساحت دو مثلث برابر است .

بنابراین گزینه ۴ صحیح است .

▼مثال ۵۱) از وصل کردن تمامی رئوس یک هفت ضلعی منتظم به یکدیگر، چند مثلث متساوی الساقین پدید می‌آید؟
(کتاب درسی، مشابه کار در کلاس ۱، صفحهٔ ۲۶)

۱) ۷
۲) ۱٤
۳) ۲۱
٤) ۳۵



پاسخ در هفت ضلعی منتظم، طول اضلاع برابر یکدیگراست و هر دو قطری که تعداد راس‌های یکسان بین دو سر قطر وجود دارد، با هم برابرند مانند AC و AF(بین A و C، فقط راس B و بین A و F، فقط راس Gوجود دارد) بنابراین هر ۳ راس متوالی یک مثلث متساوی‌الساقین می‌سازند شامل ۷ مثلث ABC، BCD و ...... ، راس‌هایی که دو به دو فاصله دارند، مثلث متساوی‌الساقین ایجاد می‌کنند شامل ۷ مثلث ACE، BDF و ..... ، همچنین هر راس با ضلعی که دقیقا مقابل آن قرار دارد، مثلث متساوی‌الساقین می‌سازد، شامل ۷ مثلث ABE و BCF و .... ، در نتیجه مجموع ۲۱ مثلث متساوی الساقین در هفت ضلعی منتظم وجود دارد. بنابراین گزینه ۳ صحیح است .

قضیه و عکس قضیه

برخی نتایج مهم و پرکاربرد که با استدلال استنتاجی حاصل می‌شوند، قضیه نامیده می‌شود. اگر در یک قضیه، جای فرض و حکم را عوض کنیم، به آنچه حاصل می‌شود ((عکس قضیه)) گفته می‌شود. عکس قضیه می‌تواند درست یا نادرست باشد.

▼مثال ۵۲) عکس کدام یک از قضایای زیر نادرست است؟ (کتاب درسی، مکمل و مرتبط با مثال صفحهٔ ۲۲- سراسری ریاضی -۷۸ با تغییر)

۱) در مثلث متساوی الساقین، ارتفاع و میانهٔ یک ضلع بر هم منطبق‌اند.

۲) در مثلث قائم الزاویه، عمودمنصف اضلاع بر روی وتر متقاطع اند.

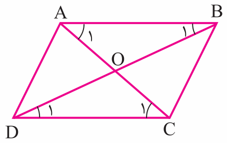
۳)در مثلث قائم الزاویه، یکی از میانه ها نصف وتر است .

۴) در هر مثلث، ضلع مقابل به زاویه‌ی 90°، بزرگ‌ترین ضلع است .

پاسخ *عکس قضایای گزینه‌های ۱ تا ۳ به ترتیب عبارتند از «مثلثی که ارتفاع و میانه‌ی‌وارد بر یک ضلع آن بر هم منطبق باشند، متساوی‌الساقین است.»، «مثلثی که در آن عمودمنصف اضلاع بر روی ضلع بزرگ‌تر متقاطع‌اند، قائم‌الزاویه است». «مثلثی که در آن میانه نظیر ضلع بزرگتر، نصف آن ضلع است، قائم الزاویه است» که به وضوح هر سهٔ آن‌ها صحیح می‌باشند. اما عکس قضیهٔ گزینه ۴ به صورت «هر مثلث، بزرگ ترین ضلع روبه‌رو به زاویه 90° است» می‌باشد که در تمامی حالاتی که مثلث قائم‌الزاویه نباشد، برقرار نیست.*

▼مثال ۵۳) ثابت کنید اگر یک چهار ضلعی متوازی الاضلاع باشد، آن‌گاه قطر هایش یکدیگر را نصف می‌کنند. (کتاب درسی،مکمل و مشابه مثال صفحه ۲۲)

پاسخ



فرض: چهار ضلعی $ABCD$ متوازی الاضلاع است.

حکم: $\begin{cases} OA = OC \\ OB = OD \end{cases}$

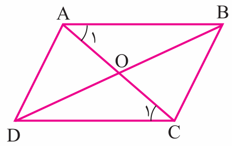
(ز ض ز)

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{r} AB \parallel CD \\ AC \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{C}_1 \\ AB = CD \\ \left.\begin{array}{r} AB \parallel CD \\ \text{مورب} \quad BD \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{D}_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle OAB \cong \triangle OCD \Rightarrow \begin{cases} OA = OC \\ OB = OD \end{cases}$$

(دوضلع رو به روی متوازی الاضلاع برابرند)

▼مثال ۵۴) ثابت کنید اگر در یک چهار ضلعی قطر ها یکدیگر را نصف کنند، آن چهار ضلعی متوازی الاضلاع است. (کتاب درسی، مکمل و مشابه مثال صفحه ۲۲)

پاسخ



فرض $\begin{cases} OA = OC \\ OB = OD \end{cases}$ مورب

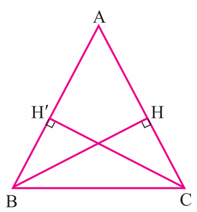
حکم: چهارضلعی $ABCD$ متوازی الاضلاع است.

می‌دانیم چهار ضلعی ای که در آن، دو ضلع مقابل مساوی و موازی یکدیگر باشند، متوازی الاضلاع است، بنابراین با توجه به آن که $AB \parallel CD$ و $AB = CD$، چهار ضلعی $ABCD$ متوازی الاضلاع می‌باشد.

▼مثال ۵۵) اگر دو ضلع از یک مثلث با هم برابر باشند، آن گاه ارتفاع های وارد بر آن دو ضلع نیز با هم برابرند. (کتاب درسی، مثال صفحه ۲۲)

پاسخ

فرض: $AB = AC$ حکم: $BH = CH'$



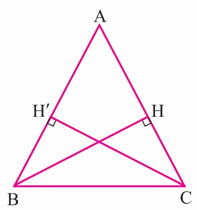
اگر $AB = AC$، *آن‌گاه مثلث* ABC *متساوی الساقین است و* $A\hat{B}C = A\hat{C}B$. *در نتیجه داریم:*

$$\left.\begin{array}{l} BC = BC \\ A\hat{C}B = A\hat{B}C \\ \hat{H} = \hat{H} = 90^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle BCH' \cong \triangle BCH \Rightarrow BH = CH'$$ (وتر و یک زاویه‌ی حاده)

▼مثال ۵۶) اگر دو ارتفاع یک مثلث با هم برابر باشند، آن گاه اضلاع نظیر به آن ارتفاع ها نیز با هم برابرند. (کتاب درسی، مکمل و مشابه مثال صفحه ۲۲)

پاسخ

فرض: $BH = CH'$ حکم: $AB = AC$



(وتر و یک ضلع قائم)

$$\left.\begin{array}{l} BC = BC \\ BH = CH' \\ \hat{H} = \hat{H}' = 90^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle BCH' \cong \triangle BCH \Rightarrow A\hat{C}B = A\hat{B}C$$

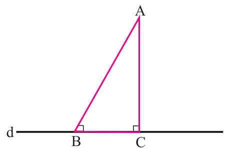
می دانیم اگر در مثلثی، دو زاویه برابر باشند، آن‌گاه اضلاع نظیر آن دو زاویه نیز برابرند، بنابراین با توجه به آن که $A\hat{B}C = A\hat{C}B$، *پس* $AB = AC$.

برهان خلف

نوعی از استدلال که در مسائل ریاضی و به خصوص هندسی کاربرد زیادی دارد، «برهان غیرمستقیم» یا «برهان خلف» است بدین صورت که به جای این که به طور مستقیم از فرض شروع کنیم و به درستی حکم برسیم، فرض می‌کنیم حکم غلط باشد (یا به عبارتی فرض کنیم نقیض حکم درست باشد) و به یک تناقض یا امر غیر ممکن می‌رسیم .

▼مثال ۵۷) با استفاده از برهان خلف ثابت کنید از یک نقطه خارج یک خط نمی توان بیش از یک عمود بر آن رسم کرد.

(کتاب درسی، مکمل و مشابه مثال صفحهٔ ۲۴)



پاسخ با برهان خلف فرض می‌کنیم حکم غلط با شد یعنی فرض می‌کنیم از نقطه A، دو عمود بر خط d رسم کرده ایم که مانند شکل، خط d را در نقاط B و C قطع کرده اند. در این صورت مجموع زوایای داخلی مثلث ABC، بزرگتر از 180° خواهد شد که این امر غیر ممکن است. پس امکان رسم دو عمود از یک نقطهٔ خارج یک خط وجود ندارد .

▼مثال ۵۸) با استفاده از برهان خلف ثابت کنید عمود منصف هر پاره خط یکتاست .

(کتاب درسی، مشابه مثال صفحهٔ ۲۴)

پاسخ فرض کنیم پاره خط AB بیش از یک عمود منصف داشته باشد. مثلا دو خط متمایز d_1, d_2، عمود منصف پاره خط AB باشند. در این صورت چون d_1, d_2 در نقطه M وسط پاره خط AB، بر این پاره‌خط عمودند، پس $d_1 \| d_2$ از طرفی d_1, d_2 در نقطهٔ M متقاطع‌اند و چون دو خط متقاطع نمی‌توانند موازی باشند، در نتیجه عمود منصف پاره خط AB یکتاست .

▼مثال ۵۹) با استفاده از برهان خلف ثابت کنید در دومثلث ABC و $A'B'C'$، اگر $AB = A'B'$ و $AC = A'C'$ و $\hat{A} \neq \hat{A'}$، آن‌گاه $BC \neq B'C'$

(کتاب درسی، مشابه مثال صفحهٔ ۲۴)

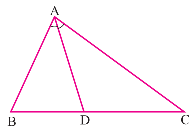
پاسخ فرض کنیم $BC = B'C'$ باشد. در این صورت داریم؛

$$\left.\begin{array}{l} AB = A'B' \\ AC = A'C' \\ BC = B'C' \end{array}\right\} \xRightarrow{(\text{ض ض ض})} \triangle ABC \cong \triangle A'B'C' \Rightarrow \hat{A} = \hat{A'}$$

اما بنا به فرض $\hat{A} \neq \hat{A'}$ است، پس این یک تناقض است و در نتیجه $BC \neq B'C'$

▼مثال ۶۰) با استفاده از برهان خلف ثابت کنید اگر در مثلث ABC، AD نیمساز زاویهٔ A باشد و $BD \neq DC$، آن گاه $AB \neq AC$.

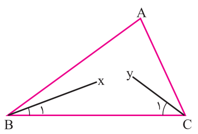
(کتاب درسی، مکمل و مشابه مثال صفحهٔ ۲۴)



پاسخ فرض کنیم $AB = AC$ باشد. در این صورت مثلث ABC متساوی‌الساقین است و می‌دانیم که در مثلث متساوی‌الساقین، نیمساز زاویهٔ راس، میانهٔ ضلع مقابل به آن نیز هست، پس $BD = DC$ اما طبق فرض $BD \neq DC$، پس این یک تناقض است و در نتیجه $AB \neq AC$.

▼مثال ۶۱) با استفاده از برهان خلف ثابت کنید در هر مثلث، هر دو نیمساز داخلی متقاطع‌اند.

(کتاب درسی، مکمل و مشابه مثال صفحهٔ ۲۴)



پاسخ فرض کنید در مثلث ABC، دو نیمساز داخلی زاویه‌های B و C متقاطع نباشد،

پس $Bx \| Cy$. چون Bx و Cy موازی هستند و BC مورب می‌باشد پس $\hat{B}_1 + \hat{C}_1 = 180^\circ$ یعنی $\frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{C}}{2} = 180^\circ$ یا

$\hat{B} + \hat{C} = 360^\circ$ و این تناقض است زیرا می‌دانیم مجموع زوایای داخلی هر مثلث 180° است، در نتیجه هر دو نیمساز داخلی مثلث متقاطع اند .

▼مثال ۶۲) با استفاده از برهان خلف ثابت کنید خطی که یکی از دو خط موازی را قطع کند، دیگری را نیز قطع می‌کند.

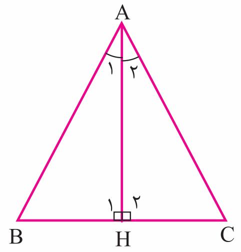
(کتاب درسی، تمرین ۱، صفحهٔ ۲۶)

پاسخ فرض کنیم دو خط، d_1, d_2 موازی یکدیگرند و خط L، خط d_1 را قطع می‌کند. می‌خواهیم ثابت کنیم خط L، خط d_2 را نیز قطع می‌کند. با استفاده از برهان خلف، فرض می‌کنیم دو خط L و d_2 موازی یکدیگر باشند. نقطهٔ تقاطع دو خط L، و d_1 را A می‌نامیم. در این صورت از نقطه‌ی A، دو خط متمایز d و L موازی d_2 رسم شده است. از آن‌جا که یک نقطه، خارج یک خط، تنها یک خط موازی با آن خط قابل رسم است، پس فرض برهان خلف باطل است، یعنی خط L ، خط d_2 را قطع می‌کند.

▼مثال ۶۳) با استفاده از برهان خلف ثابت کنید اگر در مثلث ABC، $AB \neq AC$، آن گاه $\hat{B} \neq \hat{C}$

(کتاب درسی، مکمل و مشابه تمرین ۲، صفحهٔ ۲۷)

پاسخ فرض کنیم در مثلث ABC، $\hat{B}=\hat{C}$ در این صورت با رسم ارتفاع AH در این مثلث داریم:



$$\begin{cases} \hat{H}_1=\hat{H}_2=90 \\ \hat{B}=\hat{C} \end{cases} \Rightarrow \hat{H}_1+\hat{B}=\hat{H}_2+\hat{C} \Rightarrow \hat{A}_1=\hat{A}_2$$

$$\begin{cases} \hat{A}_1=\hat{A}_2 \\ AH=AH \\ \hat{H}_1=\hat{H}_2=90^\circ \end{cases} \xRightarrow{\text{(ز ض ز)}} \Delta ABH \cong \Delta ACH \Rightarrow AB=AC$$

که این در تناقض با فرض $AB \neq AC$ است، بنابراین $\hat{B} \neq \hat{C}$

قضیهٔ ضلع برتر: اگر در مثلثی دو ضلع نا برابر باشند، آن‌گاه زاویهٔ مقابل به ضلع بزرگ‌تر، بزرگ‌تر است از زاویهٔ مقابل به ضلع کوچک‌تر.

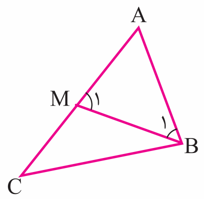
قضیهٔ زاویه برتر: اگر در مثلثی دو زاویه نا برابر باشند، ضلع رو به روی زاویهٔ بزرگ‌تر، بزرگتر است از ضلع روبه‌روی زاویهٔ کوچک‌تر.

▼مثال ۶۴) قضیهٔ ضلع برتر را ثابت کنید .

(کتاب درسی، مکمل و مشابه قضیه ۱، صفحهٔ ۲۱)

پاسخ

فرض: $AC > AB$ حکم: $\hat{B} > \hat{C}$



چون طبق فرض $AC > AB$، بنابراین پاره خط AM را اندازهٔ AB روی AC جدا کرده و از نقطهٔ M به B وصل می‌کنیم .

$$\begin{cases} \Delta ABM: AB=AM \Rightarrow \hat{B}_1=\hat{M}_1 \\ \Delta BCM: \text{زاویه خارجی است } \hat{M}_1 \Rightarrow \hat{M}_1 > \hat{C} \end{cases} \Rightarrow \hat{B}_1 > \hat{C}$$

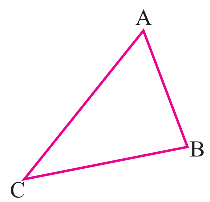
از طرفی زاویهٔ B_1 جزئی از زاویه B است یعنی $\hat{B} > \hat{B}_1$، پس $\hat{B} > \hat{C}$.

▼مثال ۶۵) قضیهٔ زاویهٔ برتر را ثابت کنید.

(کتاب درسی، مکمل و مشابه عکس قضیه ۱، صفحهٔ ۲۲)

پاسخ

فرض: $\hat{B} > \hat{C}$ حکم: $AC > AB$



با استفاده از برهان خلف فرض می‌کنیم $AC \leq AB$.

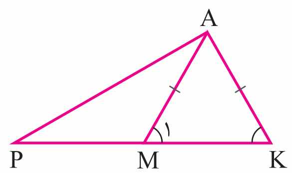
اگر $AC = AB$، آن‌گاه مثلث ABC متساوی‌الساقین است و در نتیجه $\hat{B}=\hat{C}$ که با فرض قضیه تناقض دارد.

اگر $AC < AB$، آن‌گاه طبق قضیهٔ ضلع برتر، $\hat{B} < \hat{C}$ که با فرض قضیه در تناقض است. بنابراین $AC > AB$ است.

▼مثال ۶۶) در مثلث PAK، نقطه‌ی M روی ضلع PK قرار دارد. ثابت کنید اگر $AM = AK$، آن گاه $AP > AK$.

(کتاب درسی، مکمل و مرتبط با عکس قضیهٔ ۱، صفحهٔ ۲۲)

پاسخ



$$\begin{cases} \Delta AMK: AM=AK \Rightarrow \hat{M}_1=\hat{K} \\ \Delta AMP: \text{زاویه خارجی است } \hat{M}_1 \Rightarrow \hat{M}_1 > \hat{P} \end{cases} \Rightarrow \hat{K} > \hat{P}$$

بنابراین طبق قضیهٔ زاویهٔ برتر در مثلث PAK، $AP > AK$

▼مثال ۶۷) در مثلث ABC، نیمساز داخلی زاویهٔ A، ضلع BC را در نقطهٔ D قطع می‌کند. کدام نا مساوی همواره صحیح است؟

(کتاب درسی، مکمل و مرتبط با عکس قضیهٔ ۱، صفحهٔ ۲۲- سراسری ریاضی - ۸۰)

۱) $BA > BD$ ۲) $DA > DB$ ۳) $AB > AD$ ۴) $DB > DA$