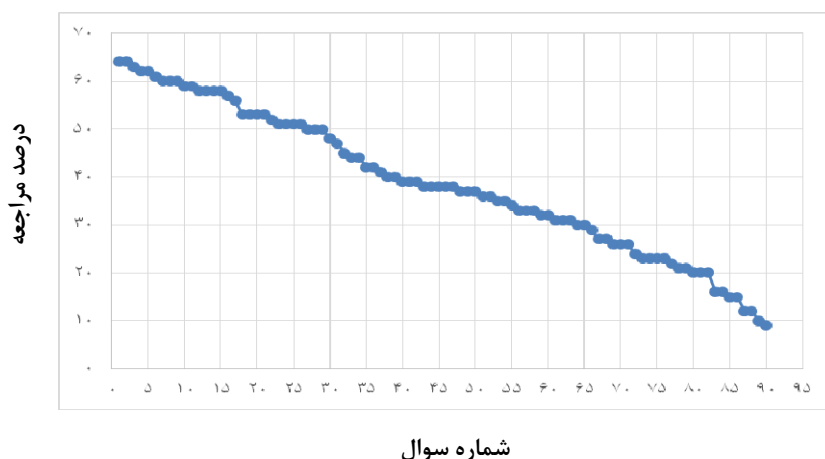


مبحث: مجموعه‌ها، الگو و دنباله

سطح سوم: دشوارتر	سطح دوم: دشوار	سطح اول: نسبتاً دشوار	سطح سوال‌ها
۶۱-۹۰	۳۱-۶۰	۱-۳۰	شماره سوال
۳۱-۹	۴۷-۳۲	۶۴-۴۸	درصد مراجعه



معرفی نشانه‌ها:

در شناسنامه هر سوال نشانه‌هایی به شرح زیر استفاده شده‌است که بیان‌گر اطلاعات آماری هر سوال است:



به معنای تعداد مراجعین به سوال، از کل دانش‌آموزان شرکت‌کننده در آزمون می‌باشد.



به معنای درصدی از شرکت‌کنندگان می‌باشد که به این سوال پاسخ صحیح داده‌اند.



به معنای تاریخ برگزاری آزمون می‌باشد.



به معنای جمعیت شرکت‌کنندگان در آن آزمون می‌باشد.

برای هر مبحث کتاب، جدول و نمودار سطح‌بندی سوال‌ها مانند نمودار بالا تهیه شده است. در این جدول تعداد سؤالات هر سطح (نسبتاً دشوار، دشوار، دشوارتر)، شماره‌ی سؤالات و درصدهای مراجعه ابتدایی و انتهایی هر سطح مشخص شده است. نمودار براساس درصد مراجعه به سوال و شماره‌ی سوال‌ها تنظیم شده‌است. بدیهی است که این نمودار باید شیب منطقی داشته باشد و هرچه رو به پایان می‌رویم درصد مراجعه در سطح دشوارتر کم‌تر می‌شود.

سؤال‌های نسبتاً دشوار؟

انتظار داریم دانش‌آموزان ترازهای ۵۰۰۰ تا ۵۵۰۰ از هر ۱۰ سوال به ۳ سوال پاسخ دهند.
 انتظار داریم دانش‌آموزان ترازهای ۵۵۰۰ تا ۶۲۵۰ از هر ۱۰ سوال به ۴ (یا ۵) سوال پاسخ دهند.
 انتظار داریم دانش‌آموزان ترازهای ۶۲۵۰ به بالا از هر ۱۰ سوال به بیش از ۶ سوال پاسخ دهند.

۱- اشتراک سه بازه $(-1, 2)$ ، $[-2, \frac{5}{3}]$ و $(-\frac{5}{3}, \frac{1}{3})$ کدام است؟

۸۲۰۰ ۹۵/۶/۱۲ ۴۴٪ ۶۴٪



۲- کدام یک از جملات زیر در حالت کلی صحیح نیست؟

۳۵۴۳۰ ۹۵/۸/۲۱ ۳۹٪ ۶۴٪

- (۱) اگر جملات یک دنباله‌ی حسابی را در عددی ثابت ضرب کنیم، دنباله‌ی جدید نیز یک دنباله‌ی حسابی است.
- (۲) اگر جملات یک دنباله‌ی حسابی را با عدد ثابتی جمع کنیم، دنباله‌ی جدید نیز یک دنباله‌ی حسابی است.
- (۳) اگر جملات یک دنباله‌ی حسابی را بر عددی غیرصفر تقسیم کنیم، دنباله‌ی جدید نیز یک دنباله‌ی حسابی است.
- (۴) مربع جملات یک دنباله‌ی حسابی نیز یک دنباله‌ی حسابی است.

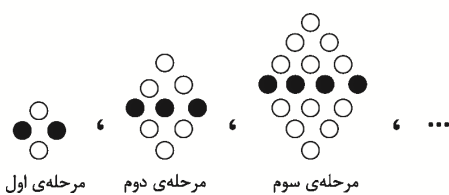
۳- در یک دنباله‌ی حسابی با جمله‌ی عمومی t_n ، مجموع سه جمله‌ی اول ۱۲ و مجموع سه جمله‌ی بعدی ۳۰ است. t_7 کدام است؟

۳۳۵۹۰ ۹۵/۱۱/۸ ۵۲٪ ۶۳٪

(۱) ۱۷ (۲) ۱۶ (۳) ۱۸ (۴) ۱۴

۴- باتوجه به الگوی شکل زیر، تعداد دایره‌های سفید مرحله‌ی یازدهم کدام است؟

۳۵۴۲۰ ۹۵/۸/۲۱ ۵۱٪ ۶۲٪



(۱) ۱۳۲
(۲) ۱۳۶
(۳) ۱۲۲
(۴) ۱۲۶

۵- چه تعداد از موارد زیر درست است؟

۷۷۴۰ ۹۵/۵/۲۹ ۳۷٪ ۶۲٪

(الف) $(-2, 3) \subset [-3, 4]$ (ب) $\{-\pi, \sqrt{2}\} \subset (-4, 2)$ (پ) $-6 / 0.22 \times 10^{23} \in (-30, +\infty)$

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۶- اگر جمله‌ی سوم و پنجم یک دنباله‌ی حسابی به ترتیب از راست به چپ برابر ۳۳ و ۱۹ باشد، چندجمله‌ی این دنباله مثبت است؟

۳۱۵۰۰ ۹۵/۸/۷ ۵۲٪ ۶۱٪

(۱) ۸ (۲) ۹ (۳) ۷ (۴) ۱۳



۷- اگر مجموعه‌ی مقسوم‌علیه‌های طبیعی دو عدد ۲۸ و ۳۰ را به ترتیب A و B بنامیم، مجموعه‌ی $A \cup B$ چند عضو دارد؟

۳۱۵۰۰ ۹۵/۸/۷ ۴۲٪ ۶۰٪

(۱) ۸ (۲) ۱۰ (۳) ۱۲ (۴) ۱۴

۸- در دنباله‌ی هندسی ...، ۶۴، ۳۲، ... کدام جمله برابر $۱۶^{-۱}$ است؟

۳۳۵۹۰ ۹۵/۱۱/۸ ۴۲٪ ۶۰٪

(۱) نهم (۲) دهم (۳) یازدهم (۴) دوازدهم

۹- اگر مجموعه‌ی اعداد حقیقی (R) را مجموعه‌ی مرجع در نظر بگیریم، کدام گزینه صحیح است؟

۷۰۶۲ ۹۵/۵/۱۵ ۴۰٪ ۶۰٪

(۱) متمم مجموعه‌ی اعداد طبیعی، اعداد صحیح منفی است.

(۲) متمم مجموعه‌ی اعداد گویای منفی، اعداد گویای مثبت است.

(۳) متمم مجموعه‌ی اعداد گنگ منفی، اعداد گنگ مثبت است.

(۴) متمم مجموعه‌ی $\{1, 2\}$ به صورت $(-\infty, 1) \cup (1, 2) \cup (2, +\infty)$ است.

۱۰- اگر A و B زیرمجموعه‌هایی از مجموعه‌ی مرجع U باشند به طوری که $n(U) = ۱۰۰$ ، $n(A) = ۶۰$ ، $n(B) = ۴۰$ و $n(A \cap B) = ۲۰$ ، مقدار $n(A' \cap B')$ کدام است؟

۳۱۵۰۰ ۹۵/۸/۷ ۵۴٪ ۵۹٪

(۱) ۱۰ (۲) ۱۵ (۳) ۲۰ (۴) ۲۵

۱۱- اگر U مجموعه‌ی مرجع باشد و داشته باشیم $n(U) = ۱۰۰$ و مجموع تعداد اعضای دو مجموعه‌ی مجزای A و B برابر ۶۰ باشد، در این صورت $n(A' \cap B')$ کدام است؟

۳۱۵۰۰ ۹۵/۸/۷ ۴۹٪ ۵۹٪

(۱) ۴۰ (۲) ۶۰ (۳) ۸۰ (۴) ۹۰

۱۲- اگر مجموعه‌ی $A = \{x \mid -3 < x \leq 2\}$ باشد، کدام گزینه صحیح نیست؟

۳۱۵۰۰ ۹۵/۸/۷ ۴۱٪ ۵۸٪

(۱) اگر مجموعه‌ی مرجع را اعداد طبیعی در نظر بگیریم، مجموعه‌ی A متناهی خواهد شد.

(۲) اگر مجموعه‌ی مرجع را اعداد گویا در نظر بگیریم، مجموعه‌ی A نامتناهی خواهد شد.

(۳) اگر مجموعه‌ی مرجع را اعداد گنگ در نظر بگیریم، مجموعه‌ی A متناهی خواهد شد.

(۴) اگر مجموعه‌ی مرجع را اعداد صحیح کوچک‌تر از ۳- در نظر بگیریم، مجموعه‌ی A متناهی خواهد شد.

۱۳- اگر A و B زیرمجموعه‌هایی از مجموعه‌ی مرجع U ، $n(U) = ۱۰۰$ ، $n(A) = ۴۵$ ، $n(B) = ۷۰$ و $n(B - A) = ۵۰$ باشند، آن‌گاه $n((A \cup B)')$ کدام است؟

۲۳۳۸۹ ۹۵/۷/۲۳ ۴۰٪ ۵۸٪

(۱) ۵ (۲) ۱۰ (۳) ۱۵ (۴) ۲۰

۱۴- کدام یک از جملات زیر صحیح است؟

۲۲۵۱۲ ۹۴/۷/۲۴ ۴۰٪ ۵۸٪

(۱) حاصل جمع جملات متناظر دو دنباله‌ی هندسی، تشکیل یک دنباله‌ی هندسی می‌دهند.

(۲) حاصل تفریق جملات متناظر دو دنباله‌ی هندسی، تشکیل یک دنباله‌ی هندسی می‌دهند.

(۳) حاصل ضرب جملات متناظر دو دنباله‌ی هندسی، تشکیل یک دنباله‌ی هندسی می‌دهند.

(۴) حاصل جمع جملات یک دنباله‌ی هندسی با یک عدد ثابت تشکیل یک دنباله‌ی هندسی می‌دهند.

۱۵- اگر $A = \{x \in \mathbb{R} | -2 \leq x \leq 3\}$ ، $B = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$ و $C = \{x \in \mathbb{R} | x \leq 4\}$ باشد، مجموعه $(A \cup B) \cap C$ کدام بازه است؟

۹۱۵۲ ۹۵/۵/۱ ۳۸٪ ۵۸٪

(۱) $[-2, 4]$ (۲) $(0, 3]$ (۳) $(-2, 3]$ (۴) $(-2, 4]$

۱۶- اگر $A = (1, 4]$ و $B = [-4, +\infty)$ ، آن‌گاه حاصل $B - A$ کدام است؟

۷۷۴۰ ۹۵/۵/۲۹ ۴۰٪ ۵۷٪

(۱) $[-4, +\infty)$ (۲) $[-4, 1) \cup (1, +\infty)$ (۳) $[-4, 1) \cup [4, +\infty)$ (۴) $[-4, 1] \cup (4, +\infty)$

۱۷- اگر A و B دو مجموعه‌ی جدا از هم در مجموعه‌ی مرجع U باشند، مجموعه‌ی $[(A - B) \cup (B - A)]'$ برابر کدام مجموعه است؟

۳۱۵۰۰ ۹۵/۸/۷ ۳۳٪ ۵۶٪

(۱) $A \cup B$ (۲) $A' \cup B'$ (۳) $A' \cap B$ (۴) $A' \cap B'$

۱۸- اگر $n(A) = 20$ و $n(A \cap B) = 10$ باشد، حاصل $n(A' \cap B)$ کدام است؟

۲۳۳۸۹ ۹۵/۷/۲۳ ۴۴٪ ۵۳٪

(۱) ۸ (۲) ۱۲ (۳) ۵ (۴) ۳۰

۱۹- مجموع پنج عدد که تشکیل یک دنباله‌ی حسابی می‌دهند، برابر با ۴۵ است. جمله‌ی وسط این دنباله کدام است؟

۴۳۰۰۰ ۹۴/۸/۲۲ ۴۳٪ ۵۳٪

(۱) ۹ (۲) ۱۰ (۳) ۱۱ (۴) ۱۲

۲۰- در یک هتل ۷۲ مسافر اقامت دارند. از این تعداد مسافر، ۲۳ نفر تاجر می‌باشند، ۱۲ نفر برای اولین بار سفر کرده‌اند و ۸ نفر تاجرانی می‌باشند که برای اولین بار مسافرت کرده‌اند. چند مسافر در این هتل اقامت دارند که نه تاجر هستند و نه برای اولین بار سفر کرده‌اند؟

۳۱۵۰۰ ۹۵/۸/۷ ۳۸٪ ۵۳٪

(۱) ۲۷ (۲) ۴۵ (۳) ۳۵ (۴) ۱۹

۲۱- کدام دو مجموعه مجزا نیستند؟

۳۱۵۰۰ ۹۵/۸/۷ ۲۷٪ ۵۳٪

(۱) مجموعه‌ی اعداد اول و مجموعه‌ی اعداد مرکب

(۲) مجموعه‌ی شمارنده‌های عدد ۵۰ و مجموعه‌ی مضرب‌های عدد ۶

(۳) مجموعه‌ی دخترهای فامیل و مجموعه‌ی پسرهای فامیل

(۴) مجموعه‌ی مضارب عدد ۱۱ و مجموعه‌ی مضارب عدد ۶۷

۲۲- اگر $n(A - B) = 2$ ، $n(B - A) = 8$ و $n(B) = 3n(A)$ باشد، $n(A \cup B)$ کدام است؟

۲۵۴۳۰ ۹۵/۸/۲۱ ۲۵٪ ۵۲٪

(۱) ۱۲ (۲) ۹ (۳) ۱۰ (۴) ۱۱

۲۳- نوعی ویروس در بدن انسان پس از ۱۵ دقیقه به ۳ ویروس تبدیل می‌شود و از بین می‌رود. اگر یک ویروس از این نوع وارد بدن شود، ۸ ساعت بعد چه تعداد از این ویروس در بدن انسان وجود دارد؟

۷۷۴۰ ۹۵/۵/۲۹ ۴۵٪ ۵۱٪

(۱) 3^{32} (۲) 3^{33} (۳) 3^{34} (۴) 3^{35}

۲۴- اگر $A = \mathbb{R} - [-2, 3]$ و $B = (-4, 6)$ باشد، کدام گزینه صحیح است؟

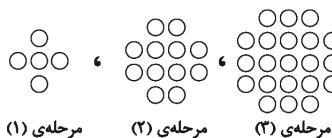
۳۱۵۰۰ ۹۵/۸/۷ ۳۰٪ ۵۱٪

(۱) $A - B = \mathbb{R} - [-2, 3]$ (۲) $B - A = (-2, 3)$

(۳) $A \cap B = (-4, 6) - [-2, 3]$ (۴) $A \cup B = (-9, 6)$

۲۵- در الگوی زیر، جمله‌ی عمومی دنباله به ازای $n = k + 1$ کدام است؟

۴۱۷۷۰ ۹۵/۹/۱۹ ۲۴٪ ۵۱٪



$$t_{k+1} = k^2 + 4k \quad (۲)$$

$$t_{k+1} = k^2 + 6k + 5 \quad (۱)$$

$$t_{k+1} = k^2 + 4k + 4 \quad (۴)$$

$$t_{k+1} = k^2 + 6k + 1 \quad (۳)$$

۲۶- اگر A مجموعه‌ای دلخواه و $Z - A$ متناهی و ناتهی باشد، کدام مجموعه‌ی زیر حتماً متناهی است؟

۴۱۷۷۰ ۹۵/۹/۱۹ ۱۷٪ ۵۱٪

$$Q - (Z - A) \quad (۲)$$

$$A - N \quad (۱)$$

$$(N - A) \cup (Z - A) \quad (۴)$$

$$Z - (A - N) \quad (۳)$$

۲۷- مجموعه‌ی اعداد طبیعی و نابیش‌تر از ۲۱ را مجموعه‌ی مرجع در نظر می‌گیریم. اگر مجموعه‌ی A شامل اعداد اول، مجموعه‌ی B شامل اعداد زوج و مجموعه‌ی C شامل اعدادی باشد که حداقل در یکی از دو مجموعه‌ی A یا B قرار داشته باشد، متمم مجموعه‌ی C چند عضو دارد؟

۷۹۷۶ ۹۵/۶/۲۶ ۳۵٪ ۵۰٪

$$۱۶ \quad (۴)$$

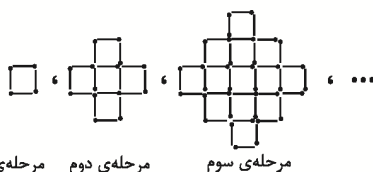
$$۴ \quad (۳)$$

$$۹ \quad (۲)$$

$$۱۷ \quad (۱)$$

۲۸- در کدام مرحله از الگوی زیر، تعداد چوب‌کبریت‌ها برابر ۱۹۶ می‌شود؟

۷۹۷۶ ۹۵/۶/۲۶ ۳۵٪ ۵۰٪



$$۶ \quad (۱)$$

$$۷ \quad (۲)$$

$$۱۴ \quad (۳)$$

$$۱۶ \quad (۴)$$

۲۹- اگر A مجموعه‌ای متناهی، B مجموعه‌ای نامتناهی و C مجموعه‌ای دلخواه و نامشخص باشد، $(C \neq B, A)$ ، کدام مجموعه قطعاً نامتناهی است؟

(مجموعه‌ی مرجع، اعداد حقیقی است.)

۳۵۴۳۰ ۹۵/۸/۲۱ ۲۷٪ ۵۰٪

$$A \cup (B - C) \quad (۲)$$

$$A \cap (B \cup C) \quad (۱)$$

$$(A \cup C) \cap (B \cup C) \quad (۴)$$

$$B - (A \cap C) \quad (۳)$$

۳۰- در یک دنباله‌ی حسابی با قدر نسبت (-۴) و جمله‌ی اول صفر، مجموع چهار جمله‌ی اول، چند برابر مجموع چهار جمله‌ی دوم است؟

۳۱۲۸۰ ۹۴/۸/۲۲ ۳۵٪ ۴۸٪

$$-\frac{۷}{۲۲} \quad (۲)$$

$$\frac{۷}{۲۲} \quad (۱)$$

$$-\frac{۳}{۱۱} \quad (۴)$$

$$\frac{۳}{۱۱} \quad (۳)$$

سؤال‌های دشوار؟

انتظار داریم دانش‌آموزان ترازهای ۵۰۰۰ تا ۵۵۰۰ از هر ۱۰ سوال به ۲ سوال پاسخ دهند.

انتظار داریم دانش‌آموزان ترازهای ۵۵۰۰ تا ۶۲۵۰ از هر ۱۰ سوال به ۳ (یا ۴) سوال پاسخ دهند.

انتظار داریم دانش‌آموزان ترازهای ۶۲۵۰ به بالا از هر ۱۰ سوال به بیش از ۵ سوال پاسخ دهند.

۳۱- بین دو عدد ۱۷ و ۹۳، هجده واسطه‌ی حسابی درج کرده‌ایم. واسطه‌ی یازدهم کدام است؟ (جملات دنباله را به صورت افزایشی در نظر بگیرید.)

۴۷٪ ۲۰٪ ۹۵/۸/۲۱ ۲۵۴۳۰

۵۷ (۱) ۶۱ (۲) ۶۵ (۳) ۵۳ (۴)

۳۲- اگر $U = \{1, 2, 3, \dots, 100\}$ مجموعه‌ی مرجع، A مجموعه‌ی اعداد مضرب ۵ و B مجموعه‌ی اعداد مضرب ۳ باشند، کدام گزینه نادرست است؟

۴۵٪ ۲۲٪ ۹۵/۵/۱ ۹۱۵۲

$$n(A \cap B) = 6 \quad (۱)$$

$$n(A \cap B') = 14 \quad (۲)$$

$$n(A \cup B) = 47 \quad (۳)$$

$$n(B') = 77 \quad (۴)$$

۳۳- در یک دنباله‌ی هندسی، حاصل ضرب جمله‌های ششم و چهارم برابر با جمله‌ی دهم است. تفاضل جمله‌ی اول از قدرنسبت کدام است؟

۴۴٪ ۳۶٪ ۹۴/۸/۲۲ ۳۱۲۸۰

صفر (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴)

۳۴- اگر $U = \{1, 2, 3, 4, \dots, 100\}$ مجموعه‌ی مرجع، $A = \{5, 10, 15, \dots, 100\}$ و $B = \{3, 6, 9, 12, \dots, 99\}$ باشند، متمم مجموعه‌ی $U - (A \cup B)$ چند عضو دارد؟

۴۴٪ ۱۹٪ ۹۵/۶/۱۲ ۸۲۰۰

۴۷ (۱) ۵۹ (۲) ۴۱ (۳) ۵۳ (۴)

۳۵- جمله‌ی پنجم یک دنباله‌ی حسابی ۲ برابر جمله‌ی هفتم آن است. جمله‌ی نهم آن کدام است؟

۴۲٪ ۲۸٪ ۹۴/۸/۸ ۲۸۹۵۴

-۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) صفر (۴) ۱

۳۶- اگر جملات دنباله‌ی حسابی زیر را در عدد حقیقی k ضرب کنیم، قدرنسبت دنباله‌ی جدید برابر با ۲۱ می‌شود، در این صورت k کدام است؟

$1-x, 2+x, 1+2x, \dots$

۴۲٪ ۲۴٪ ۹۴/۷/۲۴ ۲۲۵۱۲

-۷ (۱) -۳ (۲) ۳ (۳) ۷ (۴)

۳۷- حاصل ضرب ۱۰ جمله‌ی اول دنباله با جمله‌ی عمومی $a_n = (-1)^{n+1} \frac{n}{n+1}$ کدام است؟

۴۱٪ ۲۷٪ ۹۵/۸/۲۱ ۳۵۴۳۰

$$\frac{1}{10} \quad (۱)$$

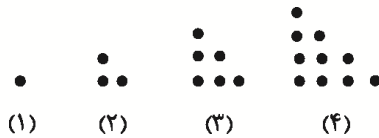
$$-\frac{1}{10} \quad (۲)$$

$$\frac{1}{11} \quad (۳)$$

$$-\frac{1}{11} \quad (۴)$$

۳۸- در الگوی زیر، تعداد نقاط چندمین شکل برابر ۵۰۵۰ است؟

۳۵۴۳۰ ۹۵/۸/۲۱ ۲۸٪ ۴۰٪



(۱) ۵۰امین

(۲) ۱۵۱امین

(۳) ۱۰۰امین

(۴) ۱۰۱امین

۳۹- در یک دنباله‌ی حسابی با جمله‌ی عمومی a_n ، اگر $a_{17} + a_{18} = 20$ و $a_1 = 10$ باشد، a_{25} کدام است؟

۳۱۸۷۰ ۹۵/۹/۵ ۲۵٪ ۴۰٪

(۴) ۲۰

(۳) ۱۵

(۲) ۱۲

(۱) ۱۰

۴۰- اگر اضلاع مثلث قائم‌الزاویه‌ای تشکیل دنباله‌ی حسابی دهند، وتر مثلث چند برابر کوچک‌ترین ضلع مثلث است؟

۳۲۵۹۰ ۹۵/۱۱/۸ ۲۳٪ ۳۹٪

(۴) $\frac{5}{3}$ (۳) $\frac{4}{3}$ (۲) $\frac{7}{5}$ (۱) $\frac{5}{4}$

۴۱- در یک دنباله‌ی هندسی با قدر نسبت منفی، نسبت جمله‌ی پنجم به جمله‌ی اول برابر با $\frac{1}{81}$ و جمله‌ی چهارم آن برابر با ۳- است. جمله‌ی اول این

دنباله کدام است؟

۲۲۵۱۲ ۹۴/۷/۲۴ ۱۸٪ ۳۹٪

(۴) ۸۱

(۳) ۲۷

(۲) -۸۱

(۱) -۲۷

۴۲- در یک دنباله‌ی حسابی $a_m = n$ و $a_n = m$ می‌باشد. حاصل $a_{m+1} + a_{n+1}$ کدام است؟ ($m \neq n$)

۳۵۴۳۰ ۹۵/۸/۲۱ ۹٪ ۳۹٪

(۴) $m + n - 1$ (۳) $m + n - 2$ (۲) $m + n + 2$ (۱) $m + n$

۴۳- در یک دنباله‌ی هندسی جمله‌ی هفتم ۲۷ برابر جمله‌ی چهارم است. اگر جمله‌ی دوم ۶ باشد، اختلاف جمله‌ی پنجم از جمله‌ی ششم کدام

است؟

۴۱۷۷۰ ۹۵/۹/۱۹ ۲۸٪ ۳۸٪

(۴) ۱۲۶

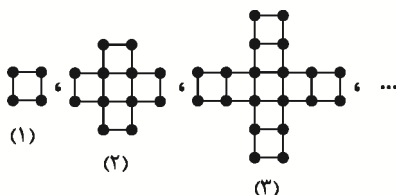
(۳) ۲۷

(۲) ۱۶۲

(۱) ۳۲۴

۴۴- با توجه به الگوی زیر، در کدام مرحله تفاضل تعداد مربع‌ها از تعداد چوب کبریت‌ها برابر ۹۱ است؟

۳۱۵۰۰ ۹۵/۸/۷ ۲۶٪ ۳۸٪



(۱) ۸

(۲) ۱۰

(۳) ۱۲

(۴) ۱۴

۴۵- در دنباله‌ی حسابی $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ اگر $2a_n - a_{2n+1} = 5$ و جمله‌ی سوم $a_3 = 10$ باشد، در این صورت قدرنسبت این دنباله کدام است؟

۲۲۵۱۲ ۹۴/۷/۲۴ ۲۳٪ ۳۸٪

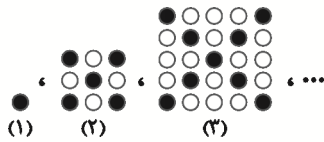
(۴) $\frac{5}{4}$ (۳) $\frac{5}{2}$

(۲) ۵

(۱) $\frac{15}{2}$

۴۶- در کدام مرحله از الگوی زیر، تعداد گوی‌های سفید برابر ۱۹۶ خواهد شد؟

۸۲۰۰ ۹۵/۶/۱۲ ۲۲٪ ۳۸٪



- (۱) ۷
(۲) ۸
(۳) ۹
(۴) ۱۱

۴۷- حاصل ضرب پنج‌جمله‌ی اول یک دنباله‌ی هندسی برابر ۳۲- است. اگر مجموع جملات دوم و چهارم دنباله برابر ۵- باشد، جمله‌ی اول آن کدام می‌تواند باشد؟

۳۵۰۰۰ ۹۶/۱/۱۸ ۱۶٪ ۳۸٪

- (۱) -۲ (۲) -۴ (۳) -۸ (۴) -۱۶

۴۸- اگر در یک دنباله‌ی هندسی، حاصل ضرب جملات دوم، چهارم و نهم برابر با ۵۴ باشد، جمله‌ی پنجم این دنباله کدام است؟

۲۸۹۵۴ ۹۴/۸/۸ ۳۰٪ ۳۷٪

- (۱) $\sqrt{10}$ (۲) $\sqrt[3]{15}$ (۳) $2\sqrt{6}$ (۴) $3\sqrt[3]{2}$

۴۹- در یک دنباله‌ی هندسی با جملات غیر صفر، $a_4 a_6 = 2a_5$ می‌باشد. جمله‌ی اول این دنباله کدام است؟

۲۸۹۵۴ ۹۴/۸/۸ ۲۷٪ ۳۷٪

- (۱) $\sqrt{2}$ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) $2\sqrt{2}$

۵۰- اگر A مجموعه‌ای متناهی و C و B مجموعه‌هایی نامتناهی باشند، در مورد هریک از مجموعه‌های $(C \cap A) \cup B$ و $(B \cup A) - C$ به‌ترتیب از راست به چپ چه می‌توان گفت؟

۳۵۰۰۰ ۹۶/۱/۱۸ ۱۰٪ ۳۷٪

- (۱) قطعاً نامتناهی - متناهی یا نامتناهی
(۲) قطعاً متناهی - قطعاً متناهی
(۳) قطعاً نامتناهی - قطعاً نامتناهی
(۴) متناهی یا نامتناهی - متناهی یا نامتناهی

۵۱- جمله‌ی هشتم از دنباله‌ی حسابی $1, 3, \dots$ با جمله‌ی چندم یک دنباله‌ی هندسی با جمله‌ی عمومی $t_n = \frac{1}{3} \times 9^{n-1}$ برابر است؟

۳۵۴۳۰ ۹۵/۸/۲۱ ۲۸٪ ۳۶٪

- (۱) سوم (۲) پنجم (۳) ششم (۴) هشتم

۵۲- جملات یک دنباله‌ی هندسی با قدرنسبت منفی را به توان ۲ رسانده‌ایم. در دنباله‌ی جدید $a_1 a_7 = 4$ و $a_1 a_3 = 16$ است. قدرنسبت دنباله‌ی اولیه کدام است؟

۲۸۹۵۴ ۹۴/۸/۸ ۲۱٪ ۳۶٪

- (۱) -۸ (۲) -۴ (۳) -۲ (۴) -۱

۵۳- به هرکدام از دو مجموعه‌ی غیرتهی A و B ، عضو جدید اضافه می‌کنیم، به نحوی که به مجموعه‌ی $A - (A - B)$ ، ۴ عضو جدید اضافه می‌شود. در این حالت به مجموعه‌ی $(A - B) \cup (B - A)$ چند عضو جدید افزوده شده است؟

۹۱۵۲ ۹۵/۵/۱ ۱۸٪ ۳۵٪

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۱۰ (۴) ۱۴

۵۴- اگر مجموعه‌ی A ، $2m$ عضو و مجموعه‌ی B ، n عضو و $A \cap B$ ، $\frac{m+n}{2}$ عضو داشته باشد، مجموعه‌ی $[(A-B) \cup (B-A)]$ چند عضو خواهد داشت؟

۳۵٪ ۱۷٪ ۹۵/۱۱/۸ ۳۳۵۹۰

(۱) m (۲) n (۳) $m+n$ (۴) $m+2n$

۵۵- در یک دنباله‌ی حسابی، مجموع جملات سوم و چهارم برابر ۱۵ و مجموع جملات پنجم، ششم و هفتم برابر $\frac{7}{5}$ است. قدرنسبت و جمله‌ی اول این دنباله به ترتیب از راست به چپ کدام‌اند؟

۳۴٪ ۲۲٪ ۹۴/۸/۸ ۲۸۹۵۴

(۱) -2 ، $\frac{14}{5}$ (۲) 2 ، $\frac{12}{5}$ (۳) -2 ، $\frac{12}{5}$ (۴) $-\frac{2}{8}$ ، $\frac{14}{5}$

۵۶- بین دو عدد ۱۸ و ۶۲، ده واسطه‌ی حسابی درج می‌کنیم تا یک دنباله‌ی حسابی با ۱۲ جمله حاصل شود. مجموع سه جمله‌ی سوم این دنباله چند برابر مجموع سه جمله‌ی دوم آن است؟

۳۳٪ ۲۶٪ ۹۵/۹/۱۹ ۴۱۷۷۰

(۱) $\frac{69}{20}$ (۲) $\frac{23}{17}$ (۳) $\frac{29}{23}$ (۴) $\frac{29}{17}$

۵۷- جمله‌ی صد و یکم دنباله‌ی حسابی ...، $t_7 = -\frac{95}{4}$ ، $t_1 = -24$ با جمله‌ی هشتم دنباله‌ی هندسی a_n با جمله‌ی اول $a_1 = 128$ ، برابر است. قدرنسبت دنباله‌ی هندسی کدام است؟

۳۳٪ ۲۲٪ ۹۴/۷/۲۴ ۲۲۵۱۲

(۱) ۲ (۲) ۴ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{1}{4}$

۵۸- اگر به اعداد ۲، ۶ و ۱۳ عددی اضافه شود، اعداد حاصل، به ترتیب از راست به چپ تشکیل یک دنباله‌ی هندسی می‌دهند. قدرنسبت این دنباله کدام است؟

۳۳٪ ۲۱٪ ۹۴/۱۱/۹ ۳۱۷۲۶

(۱) ۱ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{9}{4}$ (۴) $\frac{7}{4}$

۵۹- در دنباله‌ی خطی t_n ، اگر تفاضل دو جمله‌ی متوالی برابر با ۴ و مجموع جملات دوم و سوم برابر با ۱۰ باشد، جمله‌ی ششم کدام است؟

۳۲٪ ۲۷٪ ۹۵/۵/۱۵ ۷۰۶۲

(۱) ۹ (۲) ۱۹ (۳) ۲۹ (۴) ۳۹

۶۰- نرخ رشد تولید سالیانه‌ی کارخانه‌ای که امسال شروع به فعالیت کرده است برابر با ۲ درصد است و در پایان سال جاری تولید کارخانه x واحد کالا خواهد بود. در پایان سال هشتم تولید کارخانه چند واحد کالا است؟

۳۲٪ ۷٪ ۹۴/۸/۸ ۲۸۹۵۴

(۱) $(0.02)^7 x$ (۲) $(0.02)^8 x$ (۳) $(1.02)^7 x$ (۴) $(1.02)^8 x$

سؤال‌های دشوارتر؟

انتظار داریم دانش‌آموزان ترازهای ۵۰۰۰ تا ۵۵۰۰ از هر ۱۰ سوال به ۱ سوال پاسخ دهند.

انتظار داریم دانش‌آموزان ترازهای ۵۵۰۰ تا ۶۲۵۰ از هر ۱۰ سوال به ۲ (یا ۳) سوال پاسخ دهند.

انتظار داریم دانش‌آموزان ترازهای ۶۲۵۰ به بالا از هر ۱۰ سوال به بیش از ۴ سوال پاسخ دهند.

۶۱- اگر در یک دنباله‌ی حسابی با جمله‌ی عمومی a_n ، $a_5 = 17$ و تفاضل جمله‌ی دهم از سیزدهم برابر ۹ باشد، آن‌گاه مجموع جملات هفتم و هشتم کدام است؟

۸۲۰۰ ۹۵/۶/۱۲ ۲۵٪ ۳۱٪

۴۹ (۱) ۴۴ (۲) ۴۱ (۳) ۳۹ (۴)

۶۲- در یک دنباله‌ی حسابی جملات اول، نهم و «چهل و نهم» به ترتیب از راست به چپ جملات متمایز و متوالی از یک دنباله‌ی هندسی هستند. قدر نسبت دنباله‌ی هندسی کدام است؟

۲۸۹۵۴ ۹۴/۸/۸ ۲۰٪ ۳۱٪

۳ (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴)

۶۳- در یک دنباله‌ی حسابی مجموع ۳ جمله‌ی اول ۲۷ و مجموع سه جمله‌ی سوم برابر با ۲۷- است. قدرنسبت این دنباله کدام است؟

۷۰۶۲ ۹۵/۵/۱۵ ۱۵٪ ۳۱٪

۳ (۱) ۶ (۲) ۳ (۳) ۶ (۴)

۶۴- اگر $a > -2$ و نقطه‌ی $\frac{3}{4}$ از دو سر بازه‌ی $A = [a - 3, +\infty) \cap (-\infty, 2a - 1]$ به یک فاصله باشد، a کدام است؟

۷۹۷۶ ۹۵/۶/۲۶ ۱۸٪ ۳۰٪

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) $\frac{4}{3}$ (۴)

۶۵- مجموع سه جمله‌ی اول یک دنباله‌ی حسابی، چهار برابر مجموع سه جمله‌ی بعدی آن است. جمله‌ی چندم این دنباله برابر صفر است؟

۳۵۴۳۰ ۹۵/۸/۲۱ ۱۷٪ ۳۰٪

پنجم (۱) ششم (۲) هفتم (۳) چهارم (۴)

۶۶- اشتراک دو بازه‌ی $[-2, a]$ و $(b, 4]$ برابر $(-\frac{2}{3}, 1)$ است. اجتماع بازه‌های (b, a) و $(-2a - 1, b]$ کدام است؟

۹۱۵۲ ۹۵/۵/۱ ۲۳٪ ۲۹٪

(۱) $(-\frac{2}{3}, 1)$ (۲) $(-1, \frac{2}{3})$ (۳) $(1, 4)$ (۴) $(-3, 1)$

۶۷- اگر M مجموعه‌ی مرجع، $M = \{x | x \in N, x \leq 50\}$ ، $A = \{x | x \in M, x \leq 10\}$ و $B' = \{x | x \in M, \sqrt{x} < 5\}$ باشد، $A' - B$ کدام است؟

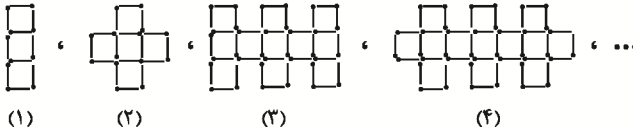
۳۱۵۰۰ ۹۵/۸/۷ ۱۹٪ ۲۷٪

(۱) $\{x \in M | x^2 \geq 10\}$ (۲) $\{x \in M | 2 < \sqrt{x} \leq 10\}$

(۳) $\{x \in M | 4 \leq \sqrt{x} < 5\}$ (۴) $\{x \in M | 4 \leq x\}$

۶۸- باتوجه به شکل‌های زیر، تعداد چوب‌کبریت‌ها در مرحله‌ی یازدهم کدام است؟

۲۷٪ ۱۵٪ ۹۵/۸/۲۱ ۳۵۴۳۰



- (۱) ۱۲۶
(۲) ۱۳۰
(۳) ۱۰۶
(۴) ۸۲

۶۹- اگر جملات چهارم و هشتم یک دنباله‌ی هندسی به‌ترتیب از راست به چپ برابر با ۹ و ۱۲ باشند، جمله‌ی دوازدهم این دنباله کدام است؟

۲۶٪ ۱۵٪ ۹۵/۸/۲۱ ۳۵۴۳۰

- (۱) ۱۰۸
(۲) ۱۶
(۳) ۳۶
(۴) ۱۸

۷۰- جمعیت شهری برابر با ۲ میلیون نفر می‌باشد که از این جمعیت، ۷۰ درصد در سن کار هستند. اگر این شهر ۱۵۰ هزار نفر بیکار داشته باشد، نرخ بیکاری این شهر تقریباً برابر با کدام گزینه است؟

۲۶٪ ۱۴٪ ۹۵/۸/۷ ۳۱۵۰۰

- (۱) ۰/۳
(۲) ۰/۲
(۳) ۰/۱
(۴) ۰/۰۵

۷۱- در یک دنباله‌ی هندسی با جملات مثبت، جمله‌ی دوم ۷ واحد بیش‌تر از جمله‌ی اول و جمله‌ی چهارم ۶۳ واحد بیش‌تر از جمله‌ی سوم است. قدرنسبت این دنباله کدام است؟

۲۶٪ ۱۱٪ ۹۵/۹/۵ ۳۱۸۷۰

- (۱) ۳
(۲) ۹
(۳) ۲
(۴) ۴

۷۲- در دنباله‌ی حسابی $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ کدام یک از عبارت‌های زیر همواره صحیح است؟

۲۴٪ ۸٪ ۹۵/۸/۲۱ ۳۵۴۳۰

- (۱) $2a_n - a_{2n} = a_2$
(۲) $a_{n+1} - a_{n-1} = a_2$
(۳) $3a_{2n+1} - 2a_{2n} = a_3$
(۴) $a_{2n+1} - a_{2n-1} = a_2$

۷۳- در یک الگوی خطی با جملات متمایز، حاصل کدام عبارت برابر جمله‌ی سیزدهم نیست؟

۲۳٪ ۱۷٪ ۹۵/۸/۷ ۳۱۵۰۰

- (۱) $5a_5 - 4a_3$
(۲) $\frac{a_8 + a_{18}}{2}$
(۳) $\frac{5a_2 - a_{24}}{4}$
(۴) $\frac{5a_8 + a_{38}}{6}$

۷۴- اگر جملات اول، دوم و ششم از یک دنباله‌ی حسابی با جملات متمایز، به‌ترتیب سه جمله‌ی متوالی از یک دنباله‌ی هندسی باشند، قدرنسبت دنباله‌ی هندسی کدام است؟

۲۳٪ ۱۴٪ ۹۵/۹/۱۹ ۴۱۷۷۰

- (۱) ۲
(۲) ۴
(۳) ۸
(۴) $\sqrt{2}$

۷۵- در یک دنباله‌ی حسابی، $a_3 + a_5 = ۱۶$ و $a_3 - a_5 = -۱۶۰$ است، قدرنسبت این دنباله کدام است؟

۲۳٪ ۱۳٪ ۹۵/۸/۷ ۳۱۵۰۰

- (۱) ۲
(۲) -۲
(۳) ۵
(۴) -۵

۷۶- واسطه‌ی حسابی بین دو عدد $\frac{1-2\sqrt{2}}{2}$ و $\frac{1}{1+\sqrt{2}}$ کدام است؟

۲۳٪ ۸٪ ۹۵/۸/۲۱ ۲۵۴۳۰

$$\frac{1}{2} \quad (1) \quad -\frac{1}{4} \quad (2) \quad \sqrt{2} \quad (3) \quad -\frac{1}{2} \quad (4)$$

۷۷- در یک دنباله‌ی هندسی، $t_2 = 6$ و $t_5 = 18\sqrt{3}$ است. جمله‌ی هشتم این دنباله چند برابر جمله‌ی سوم آن است؟

۲۲٪ ۱۳٪ ۹۵/۶/۲۶ ۷۹۷۶

$$3\sqrt{3} \quad (1) \quad 6\sqrt{3} \quad (2) \quad 8\sqrt{3} \quad (3) \quad 9\sqrt{3} \quad (4)$$

۷۸- $\frac{1}{3}$ از تعداد اعضای مجموعه‌ی A با مجموعه‌ی B و $\frac{2}{5}$ از تعداد اعضای B با A مشترک هستند. اگر $n(A \cup B) = 45$ باشد، در این صورت $n(A \cap B)$ کدام است؟

۲۱٪ ۱۱٪ ۹۵/۷/۲۳ ۲۳۳۸۹

$$5 \quad (1) \quad 10 \quad (2) \quad 15 \quad (3) \quad 20 \quad (4)$$

۷۹- در یک دنباله‌ی هندسی، اگر مجموع جمله‌های دوم، سوم و چهارم برابر با ۳ و مجموع جمله‌های پنجم، ششم و هفتم برابر با ۲۴۳ باشد، جمله‌ی شانزدهم، چند برابر جمله‌ی هفتم است؟

۲۱٪ ۸٪ ۹۴/۸/۲۲ ۳۱۲۸۰

$$3^7 \quad (1) \quad 3^9 \quad (2) \quad 3^{12} \quad (3) \quad 3^{27} \quad (4)$$

۸۰- بین دو عدد ۸ و ۶۳، تعدادی عدد طوری قرار می‌دهیم که کل اعداد حاصل تشکیل دنباله‌ی حسابی دهند. اگر تفاضل کوچکترین و بزرگترین عددهای قرار داده شده برابر با ۳۳ باشد، جمله‌ی پنجم دنباله تشکیل شده ($a_1 = 8$) کدام است؟

۲۰٪ ۱۴٪ ۹۴/۷/۲۴ ۲۲۵۱۲

$$50 \quad (1) \quad 51 \quad (2) \quad 52 \quad (3) \quad 53 \quad (4)$$

۸۱- اگر x ، y و z سه عدد متوالی از یک دنباله‌ی حسابی باشند و حاصل جمع آن‌ها -10 باشد، در این صورت حاصل $yx + zy$ کدام است؟

۲۰٪ ۱۰٪ ۹۵/۸/۲۱ ۲۵۴۳۰

$$\frac{-20}{9} \quad (1) \quad \frac{9}{200} \quad (2) \quad \frac{-200}{3} \quad (3) \quad \frac{200}{9} \quad (4)$$

۸۲- دنباله‌ی هندسی $\frac{1}{5}, \frac{1}{125}, \dots, (\frac{1}{5})^{k^2-1}$ چند جمله دارد؟ (k زوج است).

۲۰٪ ۸٪ ۹۵/۸/۲۱ ۲۵۴۳۰

$$\frac{k}{2} \quad (1) \quad \frac{k^2}{2} \quad (2) \quad 3k \quad (3) \quad 3k^2 \quad (4)$$

۸۳- اگر اضلاع مثلث قائم‌الزاویه‌ای تشکیل یک دنباله‌ی هندسی بدهند و قدر نسبت این دنباله بزرگ‌تر از یک باشد، مقدار آن کدام است؟

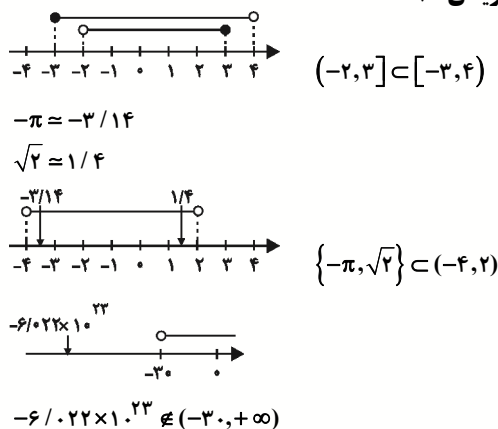
۱۶٪ ۵٪ ۹۴/۸/۲۲ ۳۱۲۸۰

$$\frac{\sqrt{5}+1}{2} \quad (1) \quad \frac{\sqrt{5}-1}{2} \quad (3) \quad \sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} \quad (2) \quad \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \quad (4)$$

پاسخ تشریحی



۵- گزینهی «۳»



تنها موارد الف و ب صحیح هستند.

۶- گزینهی «۳»

$$\begin{aligned} \begin{cases} a_3 = 33 \\ a_5 = 19 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} a_1 + 2d = 33 \\ a_1 + 4d = 19 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a_1 - 2d = -33 \\ a_1 + 4d = 19 \end{cases} \\ &\Rightarrow 2d = -14 \Rightarrow d = -7 \\ a_1 + 2d = 33 &\Rightarrow a_1 + 2(-7) = 33 \Rightarrow a_1 = 47 \\ \text{حال جمله‌ی عمومی دنباله را به دست می‌آوریم:} \\ a_n &= a_1 + (n-1)d = 47 + (n-1)(-7) \\ &= 47 + 7 - 7n = 54 - 7n \\ a_n > 0 &\Rightarrow 54 - 7n > 0 \Rightarrow 7n < 54 \Rightarrow n < \frac{54}{7} \Rightarrow n \leq 7 \end{aligned}$$

هفت جمله‌ی دنباله مثبت است.

۷- گزینهی «۳»

$$\begin{aligned} A &= \{1, 2, 4, 7, 14, 28\} \Rightarrow n(A) = 6 \\ B &= \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\} \Rightarrow n(B) = 8 \\ A \cap B &= \{1, 2\} \Rightarrow n(A \cap B) = 2 \\ \text{تعداد اعضای اجتماع دو مجموعه‌ی } A \text{ و } B \text{ برابر است با:} \\ n(A \cup B) &= n(A) + n(B) - n(A \cap B) \\ \Rightarrow n(A \cup B) &= 6 + 8 - 2 = 12 \end{aligned}$$

۸- گزینهی «۳»

اطلاعات داده شده در صورت سؤال را می‌نویسیم:

$$r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{32}{64} = \frac{1}{2}, \quad a_1 = 64$$

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 r^{n-1} \\ \Rightarrow 16^{-1} &= 64 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ \Rightarrow 2^{-4} &= 2^6 \times 2^{1-n} \Rightarrow 2^{-4} = 2^{6+1-n} \\ \Rightarrow 2^{-4} &= 2^{7-n} \Rightarrow -4 = 7-n \Rightarrow n = 11 \end{aligned}$$

پاسخ فصل اول

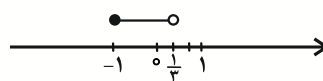
۱- گزینهی «۱»

اگر سه بازه را روی یک محور نمایش دهیم، داریم:



همان‌طور که از روی محور مشخص است، اشتراک سه بازه برابر است با:

$$\left[-1, \frac{1}{3}\right)$$



۲- گزینهی «۴»

مربع جملات یک دنباله‌ی حسابی، دنباله‌ی حسابی نیست، زیرا:

$$\begin{aligned} a_n &= a + (n-1)d \Rightarrow a_n^2 = (a + (n-1)d)^2 \\ \Rightarrow a_n^2 &= a^2 + 2ad(n-1) + \underline{(n-1)^2 d^2} \end{aligned}$$

باتوجه به جمله‌ی عمومی a_n^2 که در آن توان n از مرتبه‌ی ۲ است،

این دنباله یک دنباله‌ی حسابی نیست. درستی گزینه‌های «۱» تا «۳»

را به عنوان تمرین اثبات کنید.

۳- گزینهی «۴»

باتوجه به اطلاعات صورت سؤال داریم:

$$\begin{aligned} \begin{cases} t_1 + t_7 + t_{13} = 12 \\ t_4 + t_8 + t_{12} = 30 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} t_1 + t_1 + d + t_1 + 2d = 12 \\ t_1 + 3d + t_1 + 4d + t_1 + 5d = 30 \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{cases} 3t_1 + 3d = 12 \\ 3t_1 + 12d = 30 \end{cases} &\Rightarrow 12d - 3d = 30 - 12 \\ \Rightarrow 9d = 18 \Rightarrow d = 2 \\ 3t_1 + 3d = 12 &\xrightarrow{d=2} 3t_1 + 6 = 12 \Rightarrow t_1 = 2 \\ t_n = t_1 + (n-1)d &\rightarrow t_7 = t_1 + 6d = 2 + 6 \times 2 = 14 \end{aligned}$$

۴- گزینهی «۱»

شماره‌ی مرحله	۱	۲	۳	...	n
تعداد دایره‌های سفید	۲	۶	۱۲	...	
الگو	$2^2 - 2$	$3^2 - 3$	$4^2 - 4$		$(n+1)^2 - (n+1)$

پس در مرحله‌ی یازدهم تعداد دایره‌های سفید برابر است با:

$$(11+1)^2 - (11+1) = 144 - 12 = 132$$



۹- گزینهی «۴»

تنها گزینهی «۴» صحیح است.

$$A = \{1, 2\} \Rightarrow A' = R - \{1, 2\} = (-\infty, 1) \cup (1, 2) \cup (2, +\infty)$$

متمم مجموعه‌ی اعداد طبیعی شامل اعداد اعشاری، گنگ و ... هم می‌شود.

متمم مجموعه‌ی اعداد گویا شامل مجموعه‌ی اعداد گنگ هم می‌شود و

بالعکس. همین دو سه جمله کافی است تا نادرستی دیگر گزینه‌ها ثابت شود.

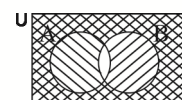
۱۰- گزینهی «۳»

با توجه به نمودار ون زیر، مجموعه‌ی $A' \cap B'$ با مجموعه‌ی $(A \cup B)'$ مساوی است، از طرفی:

A' :  B' : 

$A' \cap B'$: 

$$\begin{aligned} n(A \cup B)' &= n(U) - n(A \cup B) \\ &= n(U) - [n(A) + n(B) - n(A \cap B)] \\ &= 100 - (60 + 40 - 20) = 100 - (80) = 20 \end{aligned}$$



۱۱- گزینهی «۱»

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

برای دو مجموعه‌ی مجزای A و B ، $n(A \cap B) = 0$ است. پس:

$$\begin{aligned} n(A \cup B) &= n(A) + n(B) = 60 \quad (1) \\ \Rightarrow n(A' \cap B') &= n(U) - n(A \cup B) \\ \xrightarrow{\text{از (1)}} n(A' \cap B') &= 100 - 60 = 40 \end{aligned}$$

۱۲- گزینهی «۳»

به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

گزینهی «۱»: اگر مجموعه‌ی مرجع را اعداد طبیعی در نظر بگیریم

مجموعه‌ی A به صورت $A = \{1, 2\}$ خواهد شد، در این صورتمجموعه‌ی A متناهی خواهد شد.

گزینهی «۲»: اگر مجموعه‌ی مرجع را اعداد گویا در نظر بگیریم

مجموعه‌ی A شامل بی‌نهایت عدد گویا خواهد بود که نامتناهی خواهد بود.

گزینهی «۳»: اگر مجموعه‌ی مرجع را اعداد گنگ در نظر بگیریم

مجموعه‌ی A شامل بی‌نهایت عدد گنگ خواهد بود که مجموعه‌ی A نامتناهی خواهد شد.

گزینهی «۴»: اگر مجموعه‌ی مرجع را اعداد صحیح کوچکتر از ۳- در نظر بگیریم مجموعه‌ی A شامل هیچ عضوی نخواهد شد، در این صورت مجموعه‌ی A متناهی خواهد شد.

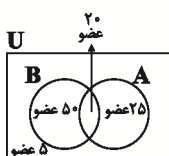
۱۳- گزینهی «۱»

می‌دانیم:

$$\begin{aligned} n(B - A) &= n(B) - n(B \cap A) \\ \Rightarrow 50 &= 70 - n(B \cap A) \Rightarrow n(B \cap A) = 20 \\ \Rightarrow n(A - B) &= n(A) - n(A \cap B) = 45 - 20 = 25 \end{aligned}$$

طبق اطلاعات داده شده نمودار زیر را می‌توان رسم کرد:

$$\begin{aligned} n(A \cup B) &= n(A) + n(B) - n(A \cap B) \\ \Rightarrow n(A \cup B) &= 45 + 70 - 20 = 95 \\ \Rightarrow n(U - (A \cup B)) &= 100 - 95 = 5 \\ \Rightarrow n((A \cup B)') &= 5 \end{aligned}$$



۱۴- گزینهی «۳»

اگر جمله‌های عمومی یکی از دنباله‌های هندسی را $a_n = aq^{n-1}$ ودیگری را $b_n = bp^{n-1}$ در نظر بگیریم، جمله‌ی عمومی دنباله‌ای

که از حاصل ضرب جملات متناظر این دو دنباله به‌دست می‌آید

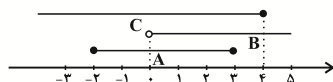
به‌صورت زیر است که یک دنباله‌ی هندسی است:

$$C_n = a_n b_n = aq^{n-1} bp^{n-1} = ab(qp)^{n-1}$$

برای رد گزینه‌های «۱» و «۲» و «۴»، $a_n = 2^n$ و $b_n = 3^n$ را

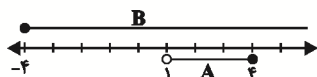
در نظر بگیرید و هریک از گزینه‌ها را جداگانه بررسی کنید.

۱۵- گزینهی «۱»

نمایش مجموعه‌های A ، B و C روی محور به‌صورت زیر است:

$$\begin{aligned} A \cup B &= [-2, 4] \cup [0, 5] = [-2, 5] \\ \Rightarrow (A \cup B) \cap C &= [-2, 5] \cap [-3, 4] = [-2, 4] \end{aligned}$$

۱۶- گزینهی «۴»



با توجه به شکل بالا، داریم:

$$B - A = [-4, 1] \cup (1, 4)$$



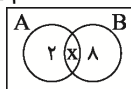
۲۲- گزینهی «۴»

چون $n(A-B)=2$ و $n(B-A)=8$ است، پس نمودار ون زیر را می‌توان رسم کرد و با فرض $n(A \cap B)=x$ داریم:

$$n(B)=3n(A)$$

$$\Rightarrow x+8=3(x+2) \Rightarrow x=1 \Rightarrow n(A \cap B)=1$$

$$\Rightarrow n(B)=9, n(A)=3$$



از طرفی می‌دانیم:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 3 + 9 - 1 = 11$$

۲۳- گزینهی «۱»

در هر ۱۵ دقیقه، هر وپروس به ۳ وپروس تبدیل می‌شود و تعداد وپروس‌ها یک دنباله‌ی هندسی با جمله‌ی اول ۱ و قدر نسبت ۳ تشکیل می‌دهد.

$$1, 3, 9, 27, \dots$$

هر ساعت، ۶۰ دقیقه است که معادل ۴ تا ۱۵ دقیقه است. ۸ ساعت شامل $8 \times 4 = 32$ بازه‌ی ۱۵ دقیقه‌ای است. پس تعداد جملات دنباله‌ی هندسی تشکیل شده برابر با $33 = 32 + 1$ است.

$$a_n = ar^{n-1}$$

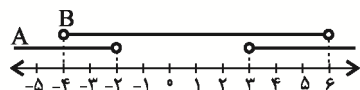
$$a_n = 1 \times 3^{n-1} \Rightarrow a_{33} = 1 \times 3^{33-1} = 3^{32}$$

۲۴- گزینهی «۳»

با توجه به نمایش هندسی مجموعه‌ها روی محور اعداد داریم:

$$A = R - [-2, 3] = (-\infty, -2) \cup (3, +\infty)$$

$$B = (-4, 6)$$



حال به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

$$1) A - B = R - (-4, 6)$$

$$2) B - A = [-2, 3]$$

$$3) A \cap B = (-4, -2) \cup (3, 6) = (-4, 6) - [-2, 3]$$

$$4) A \cup B = R$$

۲۵- گزینهی «۱»

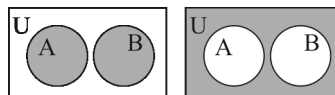
شماره‌ی مرحله	۱	۲	۳	...	n
تعداد دایره‌ها	۵	۱۲	۲۱	...	
الگو	$1^2 + 4 \times 1$	$2^2 + 4 \times 2$	$3^2 + 4 \times 3$		

$$t_n = n^2 + 4 \times n$$

برای $n = k+1$ داریم:

۱۷- گزینهی «۴»

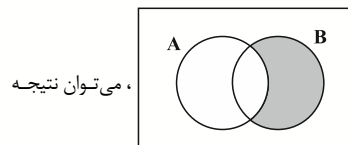
A و B دو مجموعه‌ی جدا از هم هستند، یعنی اشتراک آن‌ها تهی است. با توجه به نمودار ون زیر، $A - B = A$ و $B - A = B$ می‌شود. پس داریم:



$$A \cup B \quad (A \cup B)' = A' \cap B'$$

$$((A - B) \cup (B - A))' = (A \cup B)' = A' \cap B'$$

۱۸- گزینهی «۳»



می‌توان نتیجه

با توجه به نمودار ون،

گرفت که $n(A' \cap B) = n(B) - n(A \cap B)$ است. بنابراین:

$$n(B) = 10$$

$$2n(A \cap B) = 10 \Rightarrow n(A \cap B) = 5$$

$$n(A' \cap B) = n(B) - n(A \cap B) = 10 - 5 = 5$$

۱۹- گزینهی «۱»

a را جمله‌ی اول و d را قدرنسبت این دنباله در نظر می‌گیریم. پس:

$$\underbrace{a + a + d}_{a_1} + \underbrace{a + 2d}_{a_2} + \underbrace{a + 3d}_{a_3} + \underbrace{a + 4d}_{a_4} = 45$$

$$5a + 10d = 45 \Rightarrow a + 2d = 9 \Rightarrow \text{جمله‌ی وسط: } a_3 = a + 2d = 9$$

۲۰- گزینهی «۲»

$$A: \text{مسافران تاجر} \Rightarrow n(A) = 23$$

$$B: \text{تازه سفر کرده‌ها} \Rightarrow n(B) = 12$$

$$A \cap B: \text{تاجرانی که برای اولین بار سفر کرده‌اند} \Rightarrow n(A \cap B) = 8$$

مسافرانی که نه تاجر هستند و نه برای اولین بار سفر کرده‌اند؛ مجموعه‌ی $(A \cup B)'$ را تشکیل می‌دهند. پس:

$$n((A \cup B)') = n(U) - n(A \cup B)$$

$$= n(U) - (n(A) + n(B) - n(A \cap B))$$

$$= 72 - (23 + 12 - 8) = 72 - 27 = 45$$

۲۱- گزینهی «۴»

در تمام گزینه‌ها به‌جز گزینه‌ی «۴»، دو مجموعه مجزا هستند. دو مجموعه

که به صورت مضارب دو عدد متمایز هستند، نمی‌توانند مجزا باشند.

A : مضارب عدد ۱۱

B : مضارب عدد ۶۷

$$A \cap B = \{11 \times 67 \times 1, 11 \times 67 \times 2, \dots\}$$



۳۰- گزینهی «۳»

$$\frac{a_1 + a_7 + a_3 + a_5}{a_8 + a_6 + a_4 + a_2}$$

$$= \frac{a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + (a_1 + 3d)}{(a_1 + 4d) + (a_1 + 5d) + (a_1 + 6d) + (a_1 + 7d)}$$

$$= \frac{4a_1 + 6d}{4a_1 + 22d} = \frac{4(0) + 6(-4)}{4(0) + 22(-4)} = \frac{3}{11}$$

۳۱- گزینهی «۲»

هرگاه بین دو عدد a و b ، k واسطه‌ی حسابی درج کنیم، قدرنسبت دنباله‌ی حسابی حاصل از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$d = \frac{b-a}{k+1} \Rightarrow d = \frac{93-17}{18+1} = \frac{76}{19} = 4$$

بنابراین اولین واسطه‌ی عددی ۲۱ است. برای به‌دست آوردن واسطه‌ی یازدهم باید جمله‌ی یازدهم دنباله‌ی حسابی را به‌دست آوریم که جمله‌ی اول آن ۲۱ و قدرنسبت آن ۴ است:

$$t_{11} = t_1 + (11-1)d = 21 + 10 \times 4 = 61$$

۳۲- گزینهی «۴»

$$A = \{5, 10, 15, \dots, 100\} \Rightarrow n(A) = 20$$

$$B = \{3, 6, 9, \dots, 99\} \Rightarrow n(B) = 33$$

$$(A \cap B) = \{15, 30, 45, \dots, 90\} \Rightarrow n(A \cap B) = 6$$

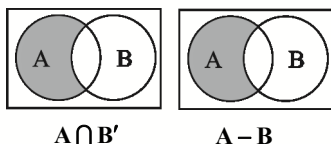
$$n(A \cup B) = 20 + 33 - 6 = 47$$

$$n(A \cap B') = n(A - B)$$

$$= n(A) - n(A \cap B) = 20 - 6 = 14$$

$$n(B') = n(U) - n(B) = 100 - 33 = 67$$

توجه کنید که مطابق نمودار ون زیر مجموعه‌ی $A \cap B'$ با مجموعه‌ی $A - B$ برابر است.



۳۳- گزینهی «۱»

اگر جمله‌ی عمومی دنباله‌ی هندسی و q قدرنسبت آن باشد، داریم:

$$t_5 \times t_9 = t_1 \Rightarrow (t_1 q^4)(t_1 q^8) = t_1 q^1 \\ \Rightarrow t_1 q^4 = q^1 \Rightarrow t_1 = q \Rightarrow q - t_1 = 0$$

$$t_{k+1} = (k+1)^2 + 4(k+1) = k^2 + 2k + 1 + 4k + 4 \\ \Rightarrow t_{k+1} = k^2 + 6k + 5$$

۲۶- گزینهی «۴»

$Z - A$ متناهی است، پس A مجموعه‌ای نامتناهی است ($A \neq Z$) که ممکن است زیرمجموعه‌ی Z باشد یا نباشد. بنابراین: $A - N$ نامتناهی است. $Q - (Z - A)$ نامتناهی است.

توجه کنید که چون اعضای مجموعه‌ی N در مجموعه‌ی $A - N$ وجود ندارند، پس مجموعه‌ی $Z - (A - N)$ شامل تمام اعضای مجموعه‌ی N می‌شود، یعنی $N \subset (Z - (A - N))$. از طرفی چون مجموعه‌ی نامتناهی N زیرمجموعه‌ی $Z - (A - N)$ است، پس $Z - (A - N)$ نامتناهی است.

همچنین چون $N \subset Z$ و $Z - A$ متناهی است، پس $N - A$ نیز متناهی است. در نتیجه $(N - A) \cup (Z - A)$ ، اجتماع دو مجموعه‌ی متناهی است که حاصل آن نیز متناهی خواهد بود.

۲۷- گزینهی «۳»

اعضای مجموعه‌ها را می‌نویسیم:

$$U = \{1, 2, 3, \dots, 21\}$$

$$A = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$$

$$B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$$

$$C = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 16, 17, 18, 19, 20\}$$

$$C' = \{1, 9, 15, 21\}$$

مجموعه‌ی متمم C ، شامل اعداد فرد غیراول مجموعه‌ی U است.

۲۸- گزینهی «۲»

اگر تعداد چوب‌کبریت‌ها در مرحله‌ی n ام را با a_n نشان دهیم، داریم:

$$a_1 = 4 = 2^2 = (2 \times 1)^2$$

$$a_2 = 16 = 4^2 = (2 \times 2)^2$$

$$a_3 = 36 = 6^2 = (2 \times 3)^2$$

⋮

$$a_n = 196 = 14^2 \Rightarrow (2n)^2 = 14^2 \Rightarrow 2n = 14 \Rightarrow n = 7$$

۲۹- گزینهی «۳»

گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱) $(A \cap (B \cup C)) \subseteq A \Rightarrow$ متناهی است.

۲) $A \cup (B - C) \Rightarrow$ ممکن است متناهی باشد یا نامتناهی

۳) $B - (A \cap C) \Rightarrow$ نامتناهی = (متناهی) - نامتناهی

۴) $(A \cup C) \cup (A \cap B)$ نامشخص (بستگی به C دارد)



$$\left. \begin{array}{l} a_1 = \frac{1}{2} \\ a_2 = -\frac{2}{3} \\ a_3 = \frac{3}{4} \\ \vdots \\ a_{10} = -\frac{10}{11} \end{array} \right\} \Rightarrow a_1 \times a_2 \times \dots \times a_{10} = \left(\frac{1}{2}\right) \times \left(-\frac{2}{3}\right) \times \left(\frac{3}{4}\right) \times \dots \times \left(-\frac{10}{11}\right) = -\frac{1}{11}$$

۳۸- گزینهی «۳»

تعداد نقاط دنباله‌ای است به صورت:

$$1, 1+2, 1+2+3, \dots, 1+2+3+\dots+n, \dots$$

بنابراین جمله‌ی عمومی دنباله به صورت $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$ می‌باشد و می‌توان نوشت:

$$\frac{n(n+1)}{2} = 50 \Rightarrow n(n+1) = 50 \times 10 \Rightarrow n(n+1) = 100 \times 1 \Rightarrow n = 100$$

۳۹- گزینهی «۱»

نکته: در دنباله‌ی حسابی a_n اگر $m+z=p+q$ باشد، آنگاه:

$$a_m + a_z = a_p + a_q$$

با استفاده از نکته‌ی بالا داریم:

$$\left. \begin{array}{l} 17+18=35 \\ 10+25=35 \end{array} \right\} \Rightarrow a_{17} + a_{18} = a_{10} + a_{25} \\ \frac{a_{17} + a_{18} = 35}{a_{10} = 10} \Rightarrow 35 = 10 + a_{25} \Rightarrow a_{25} = 35 - 10 = 25$$

۴۰- گزینهی «۴»

در مثلث قائم‌الزاویه، وتر بزرگ‌ترین ضلع است. اگر اضلاع مثلث را به ترتیب از کوچک به بزرگ a ، b و c در نظر بگیریم، وتر است و داریم:

$$d = \text{قدرنسبت دنباله و } a, b, c: \text{ دنباله‌ی حسابی}$$

$$\Rightarrow a = b - d, c = b + d \quad (*)$$

از طرفی در مثلث قائم‌الزاویه با وتر c داریم:

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow (b+d)^2 = (b-d)^2 + b^2$$

$$\Rightarrow b^2 + d^2 + 2bd = b^2 + d^2 - 2bd + b^2$$

$$\Rightarrow b^2 = 2bd \xrightarrow{b \neq 0} b = 2d$$

$$\xrightarrow{(*)} a = 3d, c = 5d$$

 a وتر مثلث و کوچک‌ترین ضلع است، داریم:

$$\frac{c}{a} = \frac{5d}{3d} = \frac{5}{3}$$

۳۴- گزینهی «۴»

دقت کنید اشتراک دو مجموعه‌ی A و B اعداد طبیعی کوچک‌تر از ۱۰۰

می‌باشد که هم بر ۳ و هم بر ۵ بخش‌پذیر باشند و اعدادی که هم بر ۳ و

هم بر ۵ بخش‌پذیر هستند، مضرب ۱۵ می‌باشند. در نتیجه داریم:

$$A \cap B = \{15, 30, 45, 60, 75, 90\} \Rightarrow n(A \cap B) = 6$$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 20 + 33 - 6 = 47$$

$$\Rightarrow n((A \cup B)') = 100 - 47 = 53$$

توجه کنید که متمم مجموعه‌ی $U - C$ همان مجموعه‌ی C است. پس دراین‌جا متمم مجموعه‌ی $U - (A \cup B)'$ همان مجموعه‌ی $(A \cup B)'$

است که تعداد اعضای آن ۵۳ است.

۳۵- گزینهی «۳»

با توجه به جمله‌ی عمومی دنباله‌ی حسابی داریم:

$$t_5 = 2t_7 \Rightarrow t_1 + 4d = 2(t_1 + 6d)$$

$$\Rightarrow t_1 + 4d = 0 \Rightarrow t_4 = 0$$

۳۶- گزینهی «۱»

اگر a ، b و c به ترتیب سه جمله‌ی متوالی از یک دنباله‌ی حسابیباشند، همواره رابطه‌ی $2b = a + c$ برقرار است. پس برای دنباله‌ی

$$1-x, 2+x, 1+2x, \dots \text{ داریم:}$$

$$2 \times (2+x) = (1-x) + (1+2x)$$

$$\Rightarrow 4+2x = 1-x+2x+1 \Rightarrow x = -2$$

$$\Rightarrow \text{دنباله‌ی اصلی: } 3, 0, -3, \dots$$

اگر جملات دنباله‌ی حسابی فوق را در عدد حقیقی k ضرب کنیم،

دنباله‌ی حسابی جدید زیر به دست می‌آید:

$$3k, 0, -3k, \dots \Rightarrow \text{قدرنسبت جدید } d' = -3k = 21 \Rightarrow k = -7$$

۳۷- گزینهی «۴»

جملات دنباله را می‌نویسیم:



۴۱- گزینهی «۴»

$$\begin{aligned} \frac{a_5}{a_1} &= \frac{1}{81} \Rightarrow 81a_5 = a_1 \Rightarrow 81a_1q^4 = a_1 \\ \frac{a_1 \neq 0}{\rightarrow} q^4 &= \frac{1}{81} \xrightarrow{q < 0} q = -\frac{1}{3} \\ a_4 &= a_1q^3 \Rightarrow -3 = a_1\left(-\frac{1}{3}\right)^3 \Rightarrow -3 = \frac{-1}{27}a_1 \\ \Rightarrow a_1 &= 81 \end{aligned}$$

۴۲- گزینهی «۳»

ابتدا قدرنسبت دنباله را به دست می‌آوریم:

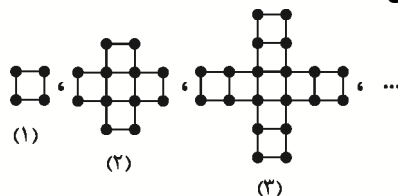
$$\begin{aligned} a_m &= n \Rightarrow d = \frac{a_m - a_n}{m - n} = \frac{n - m}{m - n} = -1 \quad (1) \\ a_n &= m \\ a_{m+1} + a_{n+1} &= a_m + d + a_n + d \stackrel{(1)}{=} m - 1 + n - 1 = m + n - 2 \end{aligned}$$

۴۳- گزینهی «۱»

اگر جمله‌ی عمومی دنباله‌ی هندسی را t_n فرض کنیم، داریم:

$$\begin{aligned} t_7 &= 27t_4 \Rightarrow t_1r^6 = 27t_1r^3 \\ \Rightarrow r^3 &= 27 \Rightarrow r^3 = 3^3 \Rightarrow r = 3 \\ t_7 &= 6 \Rightarrow t_1 \times r = 6 \xrightarrow{r=3} t_1 = 2 \\ t_6 &= t_1 \times r^5 = 2 \times 3^5 = 486 \\ t_5 &= t_1 \times r^4 = 2 \times 3^4 = 162 \\ \Rightarrow t_6 - t_5 &= 486 - 162 = 324 \end{aligned}$$

۴۴- گزینهی «۳»



ابتدا با توجه به الگو، جمله‌ی عمومی مربوط به تعداد مربع‌های هر مرحله را

تعیین می‌کنیم:

$$a_n = 1 + 4(n-1) = 1 + 4n - 4 = 4n - 3$$

حال، تعداد چوب‌کبریت‌های هر مرحله را تعیین می‌کنیم:

$$\begin{aligned} 4, 4 + (3 \times 4) \times 1, 4 + (3 \times 4) \times 2, \dots \\ \Rightarrow b_n &= 4 + (3 \times 4) \times (n-1) \\ \Rightarrow b_n &= 4 + 12n - 12 = 12n - 8 \\ \Rightarrow b_n - a_n &= 12n - 8 - (4n - 3) = 8n - 5 \end{aligned}$$

حال با توجه به رابطه‌ی به دست آمده داریم:

$$8n - 5 = 91 \Rightarrow 8n = 96 \Rightarrow n = \frac{96}{8} = 12$$

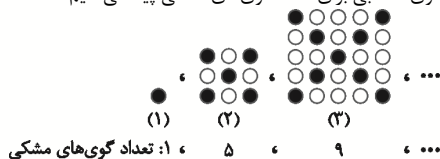
۴۵- گزینهی «۴»

با توجه به عبارت سؤال داریم:

$$\begin{aligned} 2a_n - a_{n+1} &= 5 \\ \Rightarrow 2(a_1 + (n-1)d) - (a_1 + (2n+1-1)d) &= 5 \\ \Rightarrow 2a_1 + 2dn - 2d - a_1 - 2nd &= 5 \Rightarrow a_1 - 2d = 5 \quad (1) \\ a_3 &= 10 \Rightarrow a_1 + 2d = 10 \quad (2) \\ \xrightarrow{(2)-(1)} &\begin{cases} a_1 - 2d = 5 \\ a_1 + 2d = 10 \end{cases} \Rightarrow a_1 = \frac{15}{2}, d = \frac{5}{4} \end{aligned}$$

۴۶- گزینهی «۲»

ابتدا الگوی مناسبی برای تعداد گوی‌های مشکی پیدا می‌کنیم:



تعداد کل گوی‌ها در هر مرحله از رابطه‌ی $(2n-1)^2$ به دست می‌آید که n شماره‌ی هر مرحله است. همچنین تعداد گوی‌های مشکی هر مرحله از رابطه‌ی $4(n-1)+1$ به دست می‌آید. حال تعداد گوی‌های سفید هر مرحله از «تفاضل تعداد گوی‌های مشکی از کل تعداد گوی‌ها» به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} (2n-1)^2 - (4(n-1)+1) &= (4n^2 - 4n + 1) - (4n - 4 + 1) \\ &= 4n^2 - 4n + 1 - 4n + 4 + 1 = 4n^2 - 8n + 6 \\ &= 4(n^2 - 2n + 1) = 4(n-1)^2 \end{aligned}$$

حال شماره‌ی مرحله‌ای را که تعداد گوی‌های سفید برابر ۱۹۶ است می‌یابیم:

$$4(n-1)^2 = 196 \Rightarrow (n-1)^2 = 49 \Rightarrow n-1 = 7 \Rightarrow n = 8$$

۴۷- گزینهی «۳»

جملات را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} \frac{a}{q^2}, \frac{a}{q}, a, aq, aq^2 \\ \frac{a}{q^2} \times \frac{a}{q} \times a \times aq \times aq^2 &= -3^2 \\ \Rightarrow a^5 &= -3^2 \Rightarrow a = \sqrt[5]{-3^2} = -\sqrt[5]{9} = -\sqrt[5]{2^2} \\ a_7 + a_4 &= -5 \Rightarrow \frac{a}{q^2} + aq = -5 \Rightarrow a\left(\frac{1+q^3}{q}\right) = -5 \\ \xrightarrow{a=-2} \frac{1+q^3}{q} &= \frac{5}{2} \\ \Rightarrow 2q^3 - 5q + 2 &= 0 \Rightarrow (q-2)(2q-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} q = \frac{1}{2} \\ q = 2 \end{cases} \\ a_1 = \frac{a}{q^2} &= \begin{cases} \frac{-2}{(\frac{1}{2})^2} = -8 \\ \frac{-2}{2^2} = -\frac{1}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

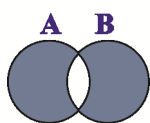
۴۸- گزینهی «۴»

با توجه به جمله‌ی عمومی دنباله‌ی هندسی، داریم:

$$\begin{aligned} a_7 \times a_4 \times a_1 &= 5^3 \\ \Rightarrow a_1q^6 \times a_1q^3 \times a_1q^0 &= 5^3 \end{aligned}$$



$$A - (A - B) = A \cap B$$



$$(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$$

از اعضای اضافه شده، ۴ عضو به مجموعه‌ی $A \cap B$ اضافه می‌شود.

پس در کل $(2 \times 9) - 4 = 14$ عضو به $A \cup B$ اضافه می‌شود. در

نتیجه $14 - 4 = 10$ عضو به $(A \cup B) - (A \cap B)$ اضافه می‌شود.

۵۴- گزینه‌ی «۱»

اطلاعات داده شده در صورت سؤال را می‌نویسیم:

$$n(A) = 2m, n(B) = n, n(A \cap B) = \frac{m+n}{2}$$

$$n[(A - B) \cup (B - A)]$$

$$= n(A - B) + n(B - A) - n[(A - B) \cap (B - A)]$$

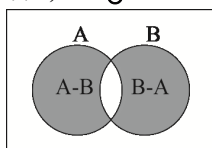
$(B - A)$ و $(A - B)$ دو مجموعه‌ی جدا از هم هستند و اشتراک

آن‌ها تهی است. پس اشتراک آن‌ها عضوی ندارد.

$$\Rightarrow n[(A - B) \cup (B - A)] = n(A - B) + n(B - A)$$

$$= n(A) - n(A \cap B) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$= n(A) + n(B) - 2n(A \cap B) \quad \cup$$



$$\Rightarrow n[(A - B) \cup (B - A)] = 2m + n - 2\left(\frac{m+n}{2}\right)$$

$$= 2m + n - m - n = m$$

۵۵- گزینه‌ی «۳»

جمله‌ی اول دنباله را a در نظر می‌گیریم.

$$\begin{cases} a_3 + a_6 = 15 \\ a_5 + a_8 + a_9 = 7/5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + 2d + a + 3d = 15 \\ a + 4d + a + 5d + a + 6d = 7/5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a + 5d = 15 \\ 3a + 15d = 7/5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -6a - 15d = -45 \\ 6a + 30d = 15 \end{cases} \Rightarrow 15d = -30 \Rightarrow d = -2$$

$$2a + 5d = 15 \Rightarrow 2a - 10 = 15 \Rightarrow a = 12/5$$

$$\Rightarrow a_1^3 q^{12} = 54 \longrightarrow a_1 q^4 = \sqrt[3]{54}$$

$$\Rightarrow a_5 = 3\sqrt[3]{2}$$

۴۹- گزینه‌ی «۲»

$$a_7 a_8 = 2a_5 \Rightarrow (a_1 q)(a_1 q^3) = 2a_1 q^4$$

$$\xrightarrow{a_1 \neq 0} a_1 q^4 = 2q^4 \xrightarrow{q \neq 0} a_1 = 2$$

۵۰- گزینه‌ی «۱»

اشتراک یک مجموعه‌ی متناهی با یک مجموعه‌ی نامتناهی همواره متناهی است پس $C \cap A$ متناهی است. اجتماع مجموعه‌ی نامتناهی B با مجموعه‌ی متناهی $C \cap A$ همواره نامتناهی است، پس $(C \cap A) \cup B$ نامتناهی است. از طرفی اجتماع مجموعه‌ی متناهی A با مجموعه‌ی نامتناهی B یک مجموعه‌ی نامتناهی است $(A \cup B)$. تفاضل دو مجموعه‌ی نامتناهی می‌تواند متناهی یا نامتناهی باشد، یعنی $(B \cup A) - C$ می‌تواند متناهی یا نامتناهی باشد.

۵۱- گزینه‌ی «۱»

$$-1, 3, \dots \Rightarrow a_1 = -1, d = 3 - (-1) = 4$$

$$a_8 = a_1 + 7d \Rightarrow a_8 = -1 + 7(4) = 27$$

$$\frac{1}{3} \times 9^{n-1} = 27 \Rightarrow 9^{n-1} = 81 \Rightarrow 9^{n-1} = 9^2$$

$$\Rightarrow n-1 = 2 \Rightarrow n = 3$$

۵۲- گزینه‌ی «۳»

$$\frac{a_1 a_3}{a_1 a_4} = \frac{a_3}{a_4} = q \Rightarrow \frac{16}{4} = q \Rightarrow q = 4$$

$$a_1 a_4 = 4 \Rightarrow a_1 (a_1 q) = 4 \Rightarrow a_1^2 q = 4 \xrightarrow{q=4} 4a_1^2 = 4$$

$$\Rightarrow a_1^2 = 1 \Rightarrow a_1 = +1$$

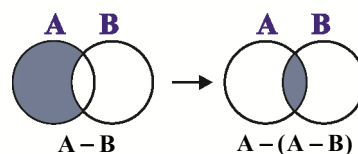
دنباله‌ی جدید: $1, 4, 16, 64, \dots$

$$\Rightarrow -1, 2, -4, 8, \dots \text{ یا } 1, -2, 4, -8, \dots$$

پس قدرنسبت دنباله‌ی اولیه برابر ۲- است.

۵۳- گزینه‌ی «۳»

با استفاده از نمودار ون داریم:





$$t_{n+1} - t_n = 4 \Rightarrow (a(n+1) + b) - (an + b) = 4$$

$$an + a + b - an - b = 4 \Rightarrow a = 4$$

$$\begin{cases} a_1 = 18 + b \\ a_2 = 22 + b \end{cases} \Rightarrow a_2 - a_1 = 22 - 18 = 4 \Rightarrow b = -4$$

$$\Rightarrow t_n = 4n - 4 \Rightarrow t_6 = 4 \times 6 - 4 = 20$$

۶۰- گزینهی «۳»

میزان تولید کارخانه در پایان سال n ام را با a_n نشان می‌دهیم، به این ترتیب:

$$a_1 = x$$

$$a_2 = a_1 + 0.2a_1 = 1.2x$$

$$a_3 = a_2 + 0.2a_2 = (1.2)^2 x$$

$$\vdots$$

$$a_n = (1.2)^{n-1} x \Rightarrow a_8 = (1.2)^7 x$$

۶۱- گزینهی «۱»

با توجه به جمله‌ی عمومی دنباله‌ی حسابی که به صورت $a_n = a_1 + (n-1)d$ است داریم:

$$a_{13} - a_1 = (a_1 + 12d) - (a_1 + 0d) = 12d = 9 \Rightarrow d = \frac{3}{4}$$

حال جمله‌ی اول دنباله را به دست می‌آوریم:

$$a_5 = a_1 + 4d \xrightarrow{d=\frac{3}{4}} 17 = a_1 + 4 \times \frac{3}{4} \Rightarrow a_1 = 13$$

مجموع جملات هفتم و هشتم برابر است با:

$$a_7 + a_8 = a_1 + 6d + a_1 + 7d = 2a_1 + 13d$$

$$= 2 \times 13 + 13 \times \frac{3}{4} = \frac{109}{4}$$

۶۲- گزینهی «۳»

اگر t_1, t_4, t_{16} به ترتیب سه جمله‌ی متوالی از یک دنباله‌ی هندسی باشند، داریم:

$$t_4^2 = t_1 t_{16} \Rightarrow (t_1 + 3d)^2 = t_1(t_1 + 15d)$$

$$\Rightarrow t_1^2 + 6t_1 d + 9d^2 = t_1^2 + 15t_1 d$$

$$\Rightarrow 6t_1 d + 9d^2 = 15t_1 d \xrightarrow{d \neq 0} 9d = 9t_1 \Rightarrow t_1 = d$$

$$\Rightarrow t_1 = d, t_4 = 4d, t_{16} = 16d \Rightarrow q = 4$$

توجه کنید که چون جملات دنباله متمایز هستند، $d \neq 0$ است.

۶۳- گزینهی «۴»

$$a_1 + a_2 + a_3 = 27 \Rightarrow a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) = 27$$

$$\Rightarrow 3a_1 + 3d = 27 \Rightarrow a_1 + d = 9 \quad (1)$$

سه جمله‌ی سوم یعنی a_1, a_2, a_3 و a_4 :

۵۶- گزینهی «۲»

جمله‌ی اول t_1 جمله‌ی آخر t_n

↑ ↑

18, 22, 26, 30, 34, 38, 42, 46, 50, 54, 58, 62

سه جمله‌ی سوم سه جمله‌ی دوم سه جمله‌ی اول

جمله‌ی عمومی دنباله‌ی حسابی: $t_n = t_1 + (n-1)d$

$$\frac{n=12}{t_{12}=62} \rightarrow 62 = 18 + (12-1)d$$

$$\Rightarrow 62 - 18 = 11d \Rightarrow d = \frac{44}{11} = 4$$

$$\frac{\text{مجموع سه جمله‌ی سوم}}{\text{مجموع سه جمله‌ی دوم}} = \frac{42 + 46 + 50}{30 + 34 + 38} = \frac{138}{102} = \frac{23}{17}$$

۵۷- گزینهی «۳»

در دنباله‌ی حسابی داریم:

$$d = t_2 - t_1 = -\frac{95}{4} - (-24) = -\frac{95}{4} + 24 = \frac{1}{4}$$

جمله‌ی صد و یکم دنباله‌ی حسابی برابر است با:

$$t_{101} = t_1 + (101-1)d = -24 + 100 \cdot \left(\frac{1}{4}\right) = 1$$

جمله‌ی صد و یکم دنباله‌ی حسابی با جمله‌ی هشتم دنباله‌ی هندسی

برابر است. پس:

$$t_{101} = a_8 \Rightarrow 1 = a_1 q^7 \Rightarrow 1 = 128 q^7$$

$$\Rightarrow q^7 = \frac{1}{128} \Rightarrow q = \frac{1}{2}$$

۵۸- گزینهی «۴»

دنباله‌ی هندسی

$$\underbrace{2+a}_x, \underbrace{6+a}_y, \underbrace{13+a}_z \xrightarrow{\text{دنباله‌ی هندسی}} y^2 = xz$$

$$\Rightarrow (6+a)^2 = (2+a)(13+a)$$

$$\Rightarrow 36 + 12a + a^2 = 26 + 15a + a^2$$

$$\Rightarrow 3a = 10 \Rightarrow a = \frac{10}{3}$$

جملات دنباله‌ی هندسی:

$$\frac{16}{3}, \frac{28}{3}, \frac{49}{3} \Rightarrow q = \frac{\frac{28}{3}}{\frac{16}{3}} = \frac{7}{4}$$

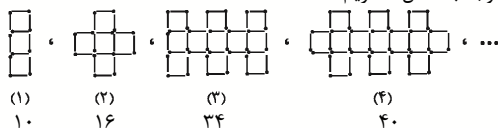
۵۹- گزینهی «۲»

با فرض $t_n = an + b$ به عنوان جمله‌ی عمومی دنباله، داریم:



۶۸- گزینهی «۲»

باتوجه به شکل‌ها داریم:



جملات ردیف فرد: ۱۰, ۳۴, ۵۸, ...

جملات ردیف زوج: ۱۶, ۴۰, ۶۴, ...

شکل مرحله‌ی یازدهم جزء جملات ردیف فرد می‌باشد که جمله‌ی

عمومی آن $a_{2n-1} = 10 + (n-1) \times 24$ و در مرحله‌ی یازدهم

داریم:

$$2n-1=11 \Rightarrow n=6$$

$$a_{11} = 10 + (6-1) \times 24 = 10 + 5 \times 24 = 130$$

همچنین توجه کنید که جمله‌ی عمومی جملات ردیف زوج

$$a_{2n} = 16 + (n-1) \times 24 \text{ می‌باشد.}$$

۶۹- گزینهی «۲»

هرگاه در یک دنباله‌ی هندسی رابطه‌ی $m+n=r+s$ برقرار باشد، داریم:

$$a_m \times a_n = a_r \times a_s$$

$$\Rightarrow 4+12=8+8 \Rightarrow a_4 \times a_{12} = a_8 \times a_8$$

$$\Rightarrow 9 \times a_{12} = 12 \times 12 \Rightarrow a_{12} = \frac{144}{9} = 16$$

۷۰- گزینهی «۳»

نفر $n(U) = 0.7 \times 2,000,000 = 1,400,000$ جمعیت در سن کارافراد بیکار، نفر $n(A') = 150,000$

$$\text{نرخ بیکاری: } \frac{n(A')}{n(U)} = \frac{150,000}{1,400,000} \approx 0.11$$

۷۱- گزینهی «۱»

اگر قدرنسبت دنباله‌ی هندسی را برابر با q فرض کنیم، داریم:

$$a_2 - a_1 = 7 \Rightarrow a_1 q - a_1 = 7 \Rightarrow a_1(q-1) = 7 \quad (1)$$

$$a_4 - a_3 = 63 \Rightarrow a_1 q^3 - a_1 q^2 = 63 \Rightarrow a_1 q^2(q-1) = 63 \quad (2)$$

با تقسیم رابطه‌های (۱) و (۲) برهم داریم:

$$\frac{a_1 q^2(q-1)}{a_1(q-1)} = \frac{63}{7} \Rightarrow q^2 = 9 \xrightarrow{q>0} q=3$$

توجه کنید که چون جملات دنباله مثبت هستند، باید $q > 0$ باشد.

۷۲- گزینهی «۳»

در گزینهی «۳» داریم:

$$3a_{2n+1} - 2a_{2n} = 3(a + (2n+1-1)d) - 2(a + (2n-1)d)$$

$$= 3a + 6nd - 2a - 4nd + 2d$$

$$= a + 2d = a + (3-1)d = a_3$$

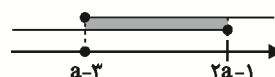
نادرستی سایر گزینه‌ها را به عنوان تمرین اثبات کنید.

$$a_7 + a_8 + a_9 = -27 \Rightarrow (a_1 + 6d) + (a_1 + 7d) + (a_1 + 8d)$$

$$= -27 \Rightarrow 3a_1 + 21d = -27 \Rightarrow a_1 + 7d = -9 \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow \begin{cases} a_1 + d = 9 \\ a_1 + 7d = -9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 12 \\ d = -3 \end{cases}$$

۶۴- گزینهی «۳»

چون $a > -2$ است می‌توان ثابت کرد که $a-3 < 2a-1$ است. پسبازه‌ی A به صورت $[a-3, 2a-1]$ است:

بنابراین نقطه‌ی میانی عبارت است از:

$$\frac{(a-3) + (2a-1)}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow 3a-4=3 \Rightarrow a=\frac{7}{3}$$

۶۵- گزینهی «۲»

طبق صورت سؤال داریم:

$$a_1 + a_7 + a_{13} = 4(a_4 + a_8 + a_{12}) \quad (1)$$

از طرفی می‌دانیم:

$$\begin{cases} a_1 + a_{13} = 2a_7 \Rightarrow a_1 + a_7 + a_{13} = 3a_7 & (2) \\ a_4 + a_{12} = 2a_8 \Rightarrow a_4 + a_8 + a_{12} = 3a_8 & (3) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(2), (3), (1)} 3a_7 = 4(3a_8) \Rightarrow a_7 = 4a_8$$

$$\Rightarrow a_1 + d = 4(a_1 + 4d) \Rightarrow 3a_1 + 15d = 0$$

$$\Rightarrow a_1 + 5d = 0 \Rightarrow a_5 = 0$$

۶۶- گزینهی «۴»

با توجه به اطلاعات سؤال داریم:

$$(b, 4] \cap [-2, a) = (-\frac{2}{3}, 1)$$

$$\Rightarrow b = -\frac{2}{3}, a = 1$$

$$(-2a-1, b] \cup (b, a)$$

$$= (-2 \times 1 - 1, -\frac{2}{3}] \cup (-\frac{2}{3}, 1) = (-3, 1)$$

۶۷- گزینهی «۳»

اعضای مجموعه‌ها را می‌نویسیم:

$$M = \{1, 2, 3, \dots, 50\}$$

$$A = \{1, 2, 3, \dots, 15\} \Rightarrow A' = \{16, 17, \dots, 50\}$$

$$B' = \{1, 2, 3, \dots, 24\} \Rightarrow B = \{25, 26, \dots, 50\}$$

$$A' - B = \{16, 17, 18, \dots, 24\} = \{x \in M \mid 4 \leq \sqrt{x} < 5\}$$



۷۶- گزینهی «۲»

باید عددی را بین $\frac{1}{1+\sqrt{2}}$ و $\frac{1-2\sqrt{2}}{2}$ پیدا کنیم که سه عدد حاصل، تشکیل دنباله‌ی حسابی بدهند، بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+\sqrt{2}}, x, \frac{1-2\sqrt{2}}{2} \\ \xrightarrow[\text{حسابی}]{\text{شرط دنباله‌ی}} 2x &= \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1-2\sqrt{2}}{2} \\ \Rightarrow 2x &= \frac{2+(1-2\sqrt{2})(1+\sqrt{2})}{2(1+\sqrt{2})} \Rightarrow 2x = \frac{2+1-\sqrt{2}-4}{2(1+\sqrt{2})} \\ \Rightarrow 2x &= \frac{-1(1+\sqrt{2})}{2(1+\sqrt{2})} \Rightarrow x = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

۷۷- گزینهی «۴»

با توجه به جمله‌ی عمومی دنباله‌ی هندسی که به صورت $t_n = t_1 r^{n-1}$

است، داریم:

$$\frac{t_5}{t_7} = \frac{t_1 r^{(5-1)}}{t_1 r^{(7-1)}} = r^3 \Rightarrow r^3 = \frac{18\sqrt{3}}{6} = 3\sqrt{3} \Rightarrow r = \sqrt{3}$$

حال نسبت جمله‌ی هشتم به جمله‌ی سوم را به دست می‌آوریم:

$$\frac{t_8}{t_3} = \frac{t_1 r^7}{t_1 r^2} = r^5 \xrightarrow{r=\sqrt{3}} \frac{t_8}{t_3} = \sqrt{3^5} = 9\sqrt{3}$$

۷۸- گزینهی «۲»

طبق صورت سؤال داریم:

$$\begin{aligned} n(A \cap B) &= \frac{1}{3}n(A) = \frac{2}{5}n(B) \\ \Rightarrow n(A) &= 3n(A \cap B)(1), \quad n(B) = \frac{5}{2}n(A \cap B)(2) \\ \Rightarrow n(A \cup B) &= n(A) + n(B) - n(A \cap B) \\ \xrightarrow{(2), (1)} 45 &= 3n(A \cap B) + \frac{5}{2}n(A \cap B) - n(A \cap B) \\ \Rightarrow 45 &= \frac{9}{2}n(A \cap B) \Rightarrow n(A \cap B) = 45 \times \frac{2}{9} = 10 \end{aligned}$$

۷۹- گزینهی «۳»

طبق صورت سؤال، داریم:

$$\frac{a_7 + a_3 + a_6}{a_8 + a_6 + a_5} = \frac{3}{243} = \frac{1}{81} \Rightarrow \frac{a_1 q^6 + a_1 q^2 + a_1 q^3}{a_1 q^7 + a_1 q^5 + a_1 q^6} = \frac{1}{81}$$

۷۳- گزینهی «۳»

به بررسی تک‌تک گزینه‌ها می‌پردازیم. فرض می‌کنیم جمله‌ی عمومی الگو $a_n = an + b$ باشد. داریم:

$$\text{گزینه‌ی «۱»} \quad 5a_5 - 4a_3 = 5(\Delta a + b) - 4(3a + b)$$

$$= 2\Delta a + 5b - 12a - 4b = 13a + b = a_{13}$$

$$\text{گزینه‌ی «۲»} \quad \frac{a_8 + a_{18}}{2} = \frac{8a + b + 18a + b}{2} = \frac{26a + 2b}{2}$$

$$= 13a + b = a_{13}$$

$$\text{گزینه‌ی «۳»} \quad \frac{5a_7 - a_{27}}{4} = \frac{5(7a + b) - (27a + b)}{4}$$

$$= \frac{10a + 5b - 27a - b}{4} = \frac{-17a + 4b}{4}$$

$$= 19a + b = a_{19} \neq a_{13}$$

$$\text{گزینه‌ی «۴»} \quad \frac{5a_8 + a_{28}}{6} = \frac{5(8a + b) + (28a + b)}{6}$$

$$= \frac{40a + 5b + 28a + b}{6} = \frac{68a + 6b}{6} = 19a + b = a_{19}$$

۷۴- گزینهی «۲»

اگر قدرنسبت دنباله‌ی حسابی را d فرض کنیم، جملات اول، دوم و ششم

دنباله‌ی حسابی به ترتیب از چپ به راست برابر با $a_1, a_1 + d, a_1 + 5d$

است، که این سه عدد، به ترتیب سه جمله‌ی متوالی از یک دنباله‌ی هندسی هستند، پس:

$$(a_1 + d)^5 = a_1(a_1 + 5d)$$

$$\Rightarrow \cancel{a_1^5} + 5a_1^4d + d^5 = \cancel{a_1^5} + 5a_1^4d$$

$$\Rightarrow d^5 - 5a_1^4d = 0 \Rightarrow d(d - 5a_1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} d = 0 \text{ ق. غ.} \\ d = 5a_1 \Rightarrow q = \frac{\text{جمله‌ی دوم}}{\text{جمله‌ی اول}} = \frac{a_1 + d}{a_1} = \frac{6a_1}{a_1} = 6 \end{cases}$$

توجه کنید که چون جملات دنباله‌ی حسابی متمایز هستند، $d = 0$ قابل قبول نیست.

۷۵- گزینهی «۳»

$$a_7^2 - a_5^2 = (a_7 + a_5)(a_7 - a_5) = -16.$$

$$\xrightarrow{a_7 + a_5 = 16} 16(a_7 - a_5) = -16.$$

$$\Rightarrow a_7 - a_5 = -10 \Rightarrow a_5 - a_3 = 10.$$

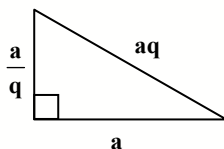
$$\xrightarrow{a_5 = a_1 + 4d, a_3 = a_1 + 2d} a_1 + 4d - a_1 - 2d = 10.$$

$$\Rightarrow 2d = 10 \Rightarrow d = 5$$



۸۳- گزینهی «۲»

اگر سه ضلع مثلث قائم‌الزاویه (سه جمله از دنباله هندسی) را به صورت زیر در نظر بگیریم، داریم:

$$\frac{a}{q}, a, aq \xrightarrow{\text{پیتاگورس}} a^2 q^2 = a^2 + \frac{a^2}{q^2}$$


حال دو طرف تساوی را در $\frac{q^2}{a^2}$ ضرب می‌کنیم. داریم:

$$\Rightarrow q^4 - q^2 - 1 = 0$$

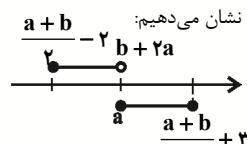
با فرض $q^2 = r$ داریم:

$$r^2 - r - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} r = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \xrightarrow{r > 0} \text{غ. ق. ق.} \\ r = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \Rightarrow \begin{cases} q = -\sqrt{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}} \xrightarrow{q > 0} \\ q = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}} \end{cases} \end{cases}$$

توجه کنید که $a < 0$ و به ازای $q < 0$ ، طول دو ضلع مثلث منفی می‌شود که غیر قابل قبول است.

۸۴- گزینهی «۲»

بازه‌ها را روی محور نشان می‌دهیم:



برای آن که اجتماع دو بازه‌ی داده شده یک بازه‌ی بسته باشد، باید:

$$\begin{aligned} 2a + b = a &\Rightarrow a + b = 0 \Rightarrow B = [-2, a), A = [a, 3] \\ \Rightarrow B \cup A &= [-2, a) \cup [a, 3] = [-2, 3] \\ \Rightarrow (A \cup B)' &= R - [-2, 3] \end{aligned}$$

پس $(A \cup B)'$ شامل اعداد صحیح $\{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ نمی‌باشد.

۸۵- گزینهی «۳»

$$\underbrace{3x-4}_a, \underbrace{2x+1}_b, \underbrace{y}_{c}, \dots$$

a ، b و c به ترتیب جملات متوالی از یک دنباله‌ی حسابی‌اند، پس:

$$\begin{aligned} 2b &= a + c \Rightarrow 2(2x+1) = 3x-4 + y \\ \Rightarrow 4x+2 &= 3x+3 \Rightarrow 4x-3x = 3-2 \Rightarrow x = 1 \end{aligned}$$

با جای‌گذاری مقدار x ، جملات دنباله‌ی حسابی به صورت $-1, 3, 7, \dots$ درمی‌آید

که در آن $t_1 = -1$ و $d = 4$ است. حال جمله‌ی عمومی دنباله‌ی حسابی و سپس جمله‌ی بیستم آن را محاسبه می‌کنیم.

$$\begin{aligned} t_n &= t_1 + (n-1)d \Rightarrow t_n = -1 + 4(n-1) \Rightarrow t_n = 4n-5 \\ t_{20} &= 4(20) - 5 = 75 \end{aligned}$$

اگر Z واسطه‌ی هندسی بین t_{20} و t_2 باشد، داریم:

$$\Rightarrow \frac{a_1 q (1+q+q^2)}{a_1 q^4 (1+q+q^2)} = \frac{1}{81} \Rightarrow q^3 = 3^4$$

$$\frac{a_{16}}{a_1} = \frac{a_1 q^{15}}{a_1 q^4} = q^9 = (q^3)^3 = (3^4)^3 = 3^{12}$$

۸۰- گزینهی «۳»

دنباله‌ی تشکیل شده به صورت زیر است:

$$8, \boxed{}, \boxed{}, \dots, \boxed{}, 63$$

$\downarrow \qquad \qquad \downarrow$
 $a_1 \qquad \qquad a_{n-1}$

$$a_n - a_1 = 63 - 8 = 55 \Rightarrow (a_1 + (n-1)d) - (a_1) = 55$$

$$\Rightarrow (n-1)d = 55 \Rightarrow d = \frac{55}{n-1} \quad (1)$$

$$a_{n-1} - a_1 = 33 \Rightarrow [a_1 + (n-2)d] - [a_1 + d] = 33$$

$$\Rightarrow (n-3)d = 33 \xrightarrow{(1)} (n-3) \times \frac{55}{n-1} = 33$$

$$\Rightarrow 55n - 165 = 33n - 99 \Rightarrow 22n = 66 \Rightarrow n = 3$$

$$\xrightarrow{(1)} d = \frac{55}{n-1} = \frac{55}{3-1} = 27.5$$

$$a_3 = a_1 + 2d = 8 + 55 = 63$$

۸۱- گزینهی «۴»

در دنباله‌ی حسابی داریم:

$$x, y, z \Rightarrow (x+z) = 2y \quad (1)$$

$$x + y + z = -1 \xrightarrow{(1)} 2y + y = -1.$$

$$\Rightarrow y = -\frac{1}{3}$$

$$x + z + y = -1 \xrightarrow{y = -\frac{1}{3}}$$

$$x + z - \frac{1}{3} = -1 \Rightarrow x + z = -\frac{2}{3}$$

$$yx + zy = y(x+z) = -\frac{1}{3} \times -\frac{2}{3} = \frac{2}{9}$$

۸۲- گزینهی «۲»

ابتدا قدرنسبت دنباله‌ی هندسی را به دست می‌آوریم:

$$q = \frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{25}}} = \frac{1}{25}$$

در دنباله‌ی هندسی داریم:

$$a_n = a q^{n-1} \Rightarrow \left(\frac{1}{25}\right)^{k^2-1} = \left(\frac{1}{25}\right)^{\left(\frac{1}{25}\right)^{(n-1)}}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{25}\right)^{k^2-1} = \left(\frac{1}{25}\right)^{2n-1} \Rightarrow k^2 - 1 = 2n - 1 \Rightarrow n = \frac{k^2}{2}$$