

درس ۱: ترسیم‌های هندسی

۱) دو خط d_1 و d_2 بر هم عمودند. چند نقطه در صفحه وجود دارد که از خط d_1 به فاصله ۴ و از خط d_2 به فاصله ۲ باشد؟

	%۸۰
	%۴۴
	آذر ۱۳۹۷

۲ (۲)

۱ (۱)

۴ بی‌شمار

۴ (۳)

	%۶۷
	%۳۰
	تیر ۱۳۹۷

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

۲) نقطه A به فاصله ۴ سانتی‌متر از نقطه B قرار دارد. در صفحه چند نقطه وجود دارد که از A به فاصله ۷ سانتی‌متر و از B به فاصله ۳ سانتی‌متر باشد؟ (نقاط A و B در یک صفحه واقع‌اند).

۳) نقطه‌های A روی خط d قرار دارد. چند نقطه در صفحه می‌توان یافت که به فاصله‌ی برابر ۲ واحد از نقطه‌ی A و خط d باشند؟

	%۶۶
	%۵۰
	آبان ۱۳۹۶

۱ (۲)

صفر (۱)

۴ (۴)

۲ (۳)

۴) نقاط A و B به فاصله ۶ واحد از هم در یک صفحه مفروض‌اند. ابتدا دهانه‌ی پرگار را به اندازه a باز نموده و کمانی به مرکز A رسم می‌کنیم. سپس دهانه‌ی پرگار را به اندازه b باز نموده و کمانی به مرکز B رسم می‌کنیم تا کمان قبلی را در دو نقطه قطع کند. حاصل $a + b$ کدام مقدار می‌تواند باشد؟

	%۶۵
	%۵۳
	مرداد ۱۳۹۷

۶ (۲)

۷ (۱)

۴ (۴)

۵ (۳)

۵) برای رسم نیمساز یک زاویه، حداقل به ترسیم چند کمان نیاز داریم؟

	%۹۳
	%۵۳
	مهر ۱۳۹۷

۲ (۲)

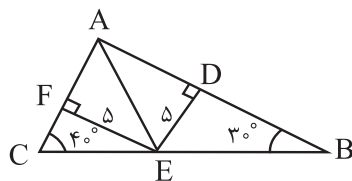
۱ (۱)

۴ (۴)

۳ (۳)

۶) در شکل زیر، اندازه‌ی زاویه‌ی \widehat{CAE} کدام است؟

	%۵۵
	%۳۴
	مهر ۱۳۹۶



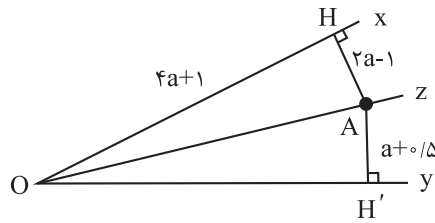
45° (۲)

40° (۱)

55° (۴)

50° (۳)

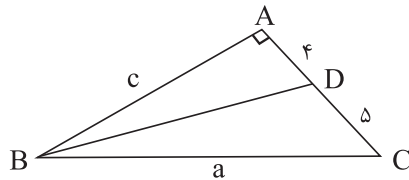
۷ در شکل مقابل Oz نیمساز زاویه ی \hat{xOy} است. طول OH' کدام است؟



- ۵ (۱)
- ۶ (۲)
- ۷ (۳)
- ۹ (۴)

	%۶۱
	%۴۷
	مهر ۱۳۹۶

۸ در شکل زیر، BD نیمساز زاویه B است. حاصل $a - c$ کدام است؟



- ۲ (۱)
- $\frac{5}{2}$ (۲)
- ۳ (۳)
- $\frac{9}{2}$ (۴)

	%۳۲
	%۲۷
	مهر ۱۴۰۰

۹ خط d و دو نقطه A و B در یک صفحه مفروض‌اند. در کدام حالت، حتماً نقطه‌ای روی خط d وجود دارد که از A و B به یک فاصله باشد؟

- (۱) خط d از نقطه A عبور کند.
- (۲) خط d، امتداد پاره‌خط AB را قطع کند.
- (۳) خط d، پاره‌خط AB را در نقطه‌ای بین A و B قطع کند.
- (۴) خط d موازی پاره‌خط AB باشد.

	%۵۶
	%۳۶
	بهمن ۱۳۹۸

۱۰ از دو سر پاره‌خط AB به طول ۸ سانتی‌متر، دو کمان به شعاع ۵ سانتی‌متر رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در نقطه M قطع کنند. فاصله نقطه M از پاره‌خط AB کدام است؟

- ۱ (۱)
- $\sqrt{41}$ (۲)
- ۴ (۳)
- ۳ (۴)

	%۶۲
	%۴۳
	مهر ۱۳۹۷

۱۱ دو دایره به مراکز A و B یکدیگر را در نقاط C و D قطع کرده‌اند. کدام یک از گزینه‌های زیر همواره درست است؟

- (۱) AB عمودمنصف CD است.
- (۲) CD عمودمنصف AB است.
- (۳) $AB = CD$
- (۴) $\hat{CAD} = \hat{CBD}$

	%۵۲
	%۴۰
	فروردین ۱۴۰۰

۱۲ چند دایره می‌توان رسم کرد که پاره‌خط AB به طول ۲ واحد، و تری از آن باشد؟

- ۱ (۱)
- ۲ (۲)
- ۴ (۳)
- بی‌شمار (۴)

	%۴۱
	%۳۰
	فروردین ۱۳۹۹

۱۳ نقطه A به فاصله ۸ واحد از خط d واقع است. برای رسم خطی عمود بر خط d از نقطه A، دایره‌ای به مرکز A و به شعاع ۱۰ واحد رسم می‌کنیم تا خط d را در نقاط B و C قطع کند و سپس از نقاط B و C دو کمان به شعاع R رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در دو نقطه E و F قطع نمایند. R کدام یک از مقادیر زیر می‌تواند باشد؟

- ۳ (۱)
- ۴ (۲)
- ۶ (۳)
- ۷ (۴)

	%۳۵
	%۲۹
	مهر ۱۳۹۹

۱۴ چند مستطیل می توان رسم کرد که طول یک ضلع آن $3\sqrt{2}$ و طول قطر آن ۴ باشد؟

(۱) صفر

(۲) ۱

(۳) بی شمار

(۴) ۲

	%۵۹
	%۲۸
	مهر ۱۳۹۷

۱۵ عمودمنصف پاره خط AB را رسم می کنیم تا این پاره خط را در نقطه‌ی H قطع کند. حال به مرکز H و به شعاع AH دایره-

ای رسم می کنیم تا عمودمنصف را در نقاط C و D قطع کند. چهارضلعی $ACBD$ دقیقاً کدام است؟

(۱) مربع

(۲) لوزی ای که یک زاویه‌ی آن 60° است.

(۳) دوزنقه

(۴) مستطیلی که طول آن، دو برابر عرض آن است.

	%۵۷
	%۳۹
	مهر ۱۳۹۶

۱۶ چند متوازی‌الاضلاع غیرهمنهشت به اضلاع ۴ و ۷ می توان رسم کرد؟

(۱) ۱

(۲) ۲

(۳) بی شمار

(۴) ۴

	%۷۰
	%۴۳
	آذر ۱۳۹۶

۱۷ چند لوزی به طول قطرهای ۶ و ۸ واحد می توان رسم نمود؟

(۱) هیچ

(۲) ۱

(۳) ۲

(۴) بی شمار

	%۷۵
	%۴۱
	مرداد ۱۳۹۷

۱۸ نقطه A خارج از خط d و نقطه B روی این خط مفروض است. به مرکز B و شعاع AB کمانی رسم می کنیم تا خط d را در

نقطه C قطع کند. سپس به مراکز A و C و به شعاع BC ، دو کمان رسم می کنیم تا یکدیگر را در نقطه D (غیرواقع بر d)

قطع کنند. چهارضلعی $ABCD$ همواره کدام است؟

(۱) مربع

(۲) لوزی

(۳) مستطیل

(۴) دوزنقه متساوی الساقین

	%۵۵
	%۴۵
	بهمن ۱۳۹۹

۱۹ در مثلث ABC ، $BC > AB$ و $\hat{B} = 70^\circ$ است. کم ترین مقدار صحیحی که اندازه زاویه A بر حسب درجه می تواند داشته

باشد، کدام است؟

(۱) ۵۴

(۲) ۵۵

(۳) ۵۶

(۴) ۵۷

	%۴۴
	%۳۶
	بهمن ۱۳۹۷

۲۰ پاره خط AC به طول ۶ مفروض است. از نقطه M وسط پاره خط AC دایره‌ای به شعاع ۴ رسم کرده و قطر BD از این دایره

را نیز رسم می کنیم. چهارضلعی $ABCD$ کدام است؟

(۱) متوازی‌الاضلاع به قطرهای ۶ و ۸

(۲) متوازی‌الاضلاع به اضلاع ۶ و ۸

(۳) مستطیلی به قطر ۸

(۴) مستطیلی به اضلاع ۶ و ۸

	%۶۲
	%۵۰
	مهر ۱۳۹۶

درس ۲: استدلال

۲۱ اگر با رسم چند مثلث مختلف و اندازه‌گیری مجموع زوایای داخلی آن‌ها به این نتیجه برسیم که مجموع زوایای داخلی هر

مثلث 180° است، از چه نوع استدلالی استفاده کرده‌ایم؟

	%۷۹
	%۴۰
	آبان ۱۳۹۶

- (۱) استنتاجی
- (۲) شهودی
- (۳) استقرایی
- (۴) محاسباتی

۲۲ در مثلث ABC ، بین زوایای رابطی $\hat{A} = \hat{B} + \hat{C}$ برقرار است. محل تلاقی عمودمنصف‌های اضلاع این مثلث کجا قرار دارد؟

	%۷۸
	%۳۳
	آبان ۱۳۹۶

- (۱) درون مثلث
- (۲) روی رأس A
- (۳) بیرون مثلث
- (۴) روی ضلع BC

۲۳ از هر رأس مثلث ABC ، خطی به موازات ضلع مقابل رسم می‌کنیم تا از برخورد آن‌ها، مثلث $A'B'C'$ به وجود آید. ارتفاع‌های

مثلث ABC ، منطبق بر کدام یک از اجزاء مثلث $A'B'C'$ هستند؟

	%۵۳
	%۳۲
	آبان ۱۳۹۶

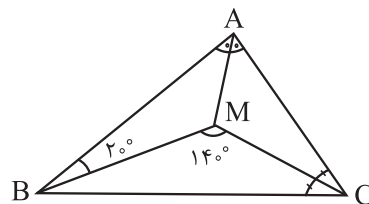
- (۱) ارتفاع‌های مثلث
- (۲) نیمسازهای زوایای مثلث
- (۳) عمودمنصف‌های اضلاع مثلث
- (۴) میانه‌های وارد بر اضلاع مثلث

۲۴ در مثلث ABC ، اگر O نقطه هم‌رسی سه ارتفاع باشد، آنگاه نقطه A برای مثلث OBC ، چه نقطه‌ای است؟

	%۴۷
	%۳۴
	مهر ۱۳۹۷

- (۱) محل تلاقی سه ارتفاع
- (۲) محل تلاقی سه میانه
- (۳) محل تلاقی سه نیمساز
- (۴) محل تلاقی سه عمودمنصف

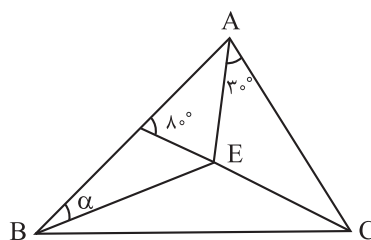
۲۵ در شکل زیر، نیمسازهای داخلی \hat{BAC} و \hat{ACB} در M متقاطع‌اند. با توجه به اندازه‌های روی شکل، اندازه زاویه \hat{AMB} کدام



	%۴۷
	%۳۷
	آبان ۱۳۹۷

- است؟
- (۱) 100°
- (۲) 110°
- (۳) 120°
- (۴) 130°

۲۶ در شکل زیر اگر E نقطه هم‌رسی نیمسازهای زاویه‌های داخلی مثلث ABC باشد، زاویه α چند درجه است؟



	%۴۵
	%۳۴
	مهر ۱۳۹۹

- (۱) ۱۵
- (۲) ۲۰
- (۳) ۳۰
- (۴) ۴۰

۲۷ برخی نتایج مهم و پرکاربرد که با استدلال به دست می آید، نامیده می شود.

	%۷۲
	%۴۸
	آبان ۱۳۹۷

- (۱) استنتاجی - قضیه
(۲) استقرایی - قضیه
(۳) استنتاجی - حکم
(۴) استقرایی - حکم

۲۸ در چهارضلعی ABCD، بین اندازه‌های زاویه‌های داخلی رابطه $\hat{A} = \frac{\hat{B}}{2} = \frac{\hat{C}}{3} = \frac{\hat{D}}{4}$ برقرار است. در این چهارضلعی

	%۲۷
	%۲۰
	بهمن ۱۳۹۸

- (۱) D - A (۲) C - A (۳) A - B (۴) D - B

نیم‌سازهای داخلی دو زاویه... و ... بر هم عمودند.

۲۹ کدام حکم کلی نادرست است؟

	%۸۰
	%۶۳
	آبان ۱۳۹۷

- (۱) مجموع زوایای خارجی هر مثلث، 180° درجه است.
(۲) هر نقطه روی نیمساز زاویه از دو ضلع آن به یک فاصله است.
(۳) سه عمودمنصف اضلاع هر مثلث هم‌رس‌اند.
(۴) عمودمنصف هر وتر دایره از مرکز آن می‌گذرد.

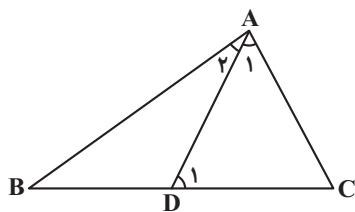
۳۰ کدام گزینه صحیح است؟

	%۶۸
	%۵۱
	آذر ۱۳۹۶

- (۱) در استدلال استنتاجی از جزء به کل می‌رسیم.
(۲) استدلالی که نتیجه‌گیری منطقی بر پایه‌ی واقعیت‌هایی است که درستی آن‌ها را پذیرفته‌ایم، استدلال استنتاجی است.
(۳) قضیه، نتایج مهم و کاربردی است که با استدلال استقرایی بدست می‌آوریم.
(۴) عکس قضیه هم مانند خود قضیه درست است.

۳۱ در شکل مقابل $\hat{A}_1 = 80^\circ$ و $\hat{D}_1 = 40^\circ$ می‌باشد. کدام گزینه لزوماً صحیح نیست؟

	%۷۴
	%۵۷
	بهمن ۱۳۹۶



- (۱) $\hat{A}_1 > \hat{A}_2$
(۲) $\hat{C} > \hat{B}$
(۳) $\hat{B} > \hat{A}_2$
(۴) $\hat{C} > \hat{A}_2$

۳۲ در مثلث ABC، $\hat{B} = 50^\circ$ ، $\hat{C} = 35^\circ$ و نقطه D روی ضلع BC چنان قرار دارد که $\hat{DAC} = 25^\circ$ است. کدام یک از نامساوی‌های

	%۴۳
	%۲۹
	مهر ۱۳۹۷

- (۱) $AC > AB$ (۲) $AB > BD$ (۳) $AC > AD$ (۴) $BD > AD$

زیر نادرست است؟


۳۳ در مثلث ABC، زاویه‌ی A برابر 50° است، کدام یک از نتیجه‌گیری‌های زیر همواره صحیح است؟

	%۶۴
	%۴۳
	آذر ۱۳۹۶

- (۱) ضلع BC بزرگ‌ترین ضلع مثلث ABC است.
(۲) ضلع BC کوچک‌ترین ضلع مثلث ABC است.
(۳) ضلع BC بزرگ‌ترین ضلع مثلث ABC نیست.
(۴) ضلع BC کوچک‌ترین ضلع مثلث ABC نیست.

۳۴ نقیض گزاره «مجموع زوایای داخلی هر چهارضلعی محدب برابر 360° است.» کدام است؟

- (۱) اگر یک چهارضلعی محدب باشد، آنگاه مجموع زوایای داخلی آن 360° است.
- (۲) چهارضلعی محدبی وجود دارد که مجموع زوایای داخلی آن 360° نیست.
- (۳) مجموع زوایای خارجی هر چهارضلعی محدب برابر 360° است.
- (۴) مجموع زوایای خارجی هر چهارضلعی محدب برابر 360° نیست.

	%۸۳
	%۷۱
	آذر ۱۳۹۷

۳۵ نقیض گزاره‌ی «هر دو خط موازی یکدیگر را قطع نمی‌کنند.» کدام است؟

- (۱) دو خط وجود دارد که یکدیگر را قطع می‌کنند ولی موازی نیستند.
- (۲) دو خط وجود دارد که یکدیگر را قطع می‌کنند و موازی هستند.
- (۳) چنین نیست که هر دو خط موازی یکدیگر را قطع کنند.
- (۴) چنین نیست که دو خطی که یکدیگر را قطع می‌کنند موازی باشند.

	%۷۹
	%۵۰
	آبان ۱۳۹۶

۳۶ نقیض گزاره «یک چهارضلعی وجود دارد که دو قطر آن برابر نیستند.» کدام است؟

- (۱) همهٔ چهارضلعی‌ها دو قطر برابر دارند.
- (۲) بعضی چهارضلعی‌ها دو قطر برابر دارند.
- (۳) همهٔ چهارضلعی‌ها دو قطر نابرابر دارند.
- (۴) مستطیل تنها چهارضلعی‌ای است که دو قطر برابر دارد.

	%۷۷
	%۴۴
	آبان ۱۳۹۷

۳۷ چه تعداد از گزاره‌های زیر همواره صحیح است؟

- (الف) نقطه‌ی هم‌رسی عمودمنصف‌های اضلاع هر مثلث، همواره داخل مثلث است.
- (ب) نقطه‌ی هم‌رسی نیمسازهای زوایای داخلی هر مثلث، همواره داخل مثلث است.
- (پ) نقطه‌ی هم‌رسی ارتفاع‌های هر مثلث، همواره داخل مثلث است.

- | | |
|-----|-----|
| صفر | (۱) |
| ۲ | (۳) |
| ۳ | (۴) |

	%۷۴
	%۳۸
	آبان ۱۳۹۶

۳۸ در اثبات یک قضیه به روش غیرمستقیم یا برهان خلف از کدام اصل استفاده می‌شود؟

- (۱) فرض را درست می‌گیریم و به حکم درست دست می‌یابیم.
- (۲) فرض را نادرست می‌گیریم و به حکم نادرست می‌رسیم.
- (۳) حکم را نادرست می‌گیریم و با فرض نادرست مواجه می‌شویم.
- (۴) حکم را درست می‌گیریم و به فرض درست می‌رسیم.

	%۷۴
	%۵۵
	تیر ۱۳۹۷




۳۹ در اثبات قضیه‌ی «در مثلث ABC ، اگر $AB \neq AC$ باشد، آنگاه $\hat{B} \neq \hat{C}$ » به کمک برهان خلف، با کدام فرض اثبات را شروع می‌کنیم؟

- | | |
|------------------------------------------------|----------------------------|
| (۱) $\hat{B} > \hat{C}$ یا $\hat{B} < \hat{C}$ | (۲) $AB > AC$ یا $AB < AC$ |
| (۳) $\hat{B} = \hat{C}$ | (۴) $AB = AC$ |

	%۷۱
	%۳۲
	آبان ۱۳۹۶

۴۰ نقیض گزاره‌ی «هیچ مثلثی بیش از یک زاویه‌ی قائمه ندارد.» کدام است؟

- (۱) هر مثلثی بیش از یک زاویه‌ی قائمه دارد.
- (۲) هیچ مثلثی بیش از یک زاویه‌ی قائمه ندارد.
- (۳) مثلثی وجود دارد که بیش از یک زاویه‌ی قائمه دارد.
- (۴) مثلثی وجود دارد که بیش از یک زاویه‌ی قائمه ندارد.

	%۸۷
	%۷۳
	مرداد ۱۳۹۶

۴۱ کدام یک از قضیه‌های زیر را نمی‌توان به صورت قضیه دو شرطی نوشت؟

- (۱) نقطه همرسی عمود منصف‌های اضلاع مثلث، از سه رأس مثلث به یک فاصله است.
- (۲) در هر مستطیل، قطرهای یکدیگر را نصف می‌کنند.
- (۳) هر نقطه روی نیمساز یک زاویه از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است.
- (۴) در هر مثلث متساوی‌الساقین، ارتفاع و میانه نظیر یکی از اضلاع بر هم منطبق‌اند.

	%۵۴
	%۴۳
	مه‌۱۳۹۹

۴۲ محیط مثلثی ۱۸ واحد است. کدام گزینه در مورد طول اضلاع آن می‌تواند صحیح باشد؟

- (۱) طول کوچک‌ترین ضلع آن ۷ است.
- (۲) طول کوچک‌ترین ضلع آن ۳ و بزرگ‌ترین ضلع آن ۷ است.
- (۳) طول بزرگ‌ترین ضلع آن ۹ است.
- (۴) طول کوچک‌ترین ضلع آن ۴ و بزرگ‌ترین ضلع آن ۸ است.

	%۵۷
	%۴۲
	آذر ۱۳۹۷

۴۳ کدام گزینه همواره می‌تواند یک مثال نقض برای عبارت زیر باشد؟

«نقطه همرسی ارتفاع‌های هر مثلث، داخل یا خارج آن مثلث می‌باشد.»

- (۱) مثلث قائم‌الزاویه
- (۲) مثلث متساوی‌الساقین
- (۳) مثلث متساوی‌الاضلاع
- (۴) مثلثی با یک زاویه 120° درجه

	%۷۴
	%۵۴
	آذر ۱۳۹۶

۴۴ کدام یک از قضیه‌های زیر، دو شرطی نیست؟

- (۱) در هر مثلث، اگر سه ضلع برابر باشند، آنگاه سه زاویه نیز با هم برابرند.
- (۲) اگر یک چهارضلعی لوزی باشد، آنگاه قطرهاش عمودمنصف یکدیگرند.
- (۳) اگر دو دایره محیط برابر داشته باشند، آنگاه مساحت برابر دارند.
- (۴) اگر دو مثلث هم‌نهشت باشند، آنگاه مساحت‌های برابر دارند.

	%۶۸
	%۴۵
	بهمن ۱۳۹۷

۴۵ کدام یک از گزاره‌های زیر در هر مثلث دلخواه همواره درست است؟

- (۱) روی ارتفاع نظیر هیچ کدام از رأس‌ها، نقطه‌ای وجود ندارد که از دو رأس دیگر مثلث به یک فاصله باشد.
- (۲) نقطه همرسی عمودمنصف‌های اضلاع، داخل یا خارج مثلث است.
- (۳) ارتفاع وارد بر بزرگ‌ترین ضلع مثلث، داخل مثلث قرار دارد.
- (۴) طول هیچ کدام از اضلاع، با طول میانه وارد بر آن‌ها برابر نیست.

	%۳۷
	%۲۶
	اردیبهشت ۱۴۰۰

۴۶ اگر در مثلث ABC ، نیمساز داخلی زاویه A بر میانه CM عمود باشد، آنگاه کدام رابطه بین طول اضلاع مثلث همواره برقرار است؟

$$b = 2c \quad (۱)$$

$$c = 2b \quad (۲)$$

$$b + c = 2a \quad (۳)$$

$$b + a = 2c \quad (۴)$$

	%۳۵
	%۲۴
	آذر ۱۳۹۷

۴۷ کدام گزینه مثال نقض ندارد؟

- (۱) در هر مثلث، اندازه بزرگ‌ترین زاویه، از چهار برابر اندازه کوچک‌ترین زاویه، کوچک‌تر است.
- (۲) برای هر عدد طبیعی n ، $n^2 + n + 41$ ، عددی اول است.
- (۳) در هر مثلث، هر ارتفاع از هر کدام از سه ضلع مثلث کوچک‌تر است.
- (۴) مجموع زوایای داخلی هر چهارضلعی محدب 360° است.

	%۷۳
	%۵۲
	آذر ۱۳۹۷

فصل ۲: قضیه تالس، تشابه و کاربردها آن

ردیف	نام مبحث	تعداد سؤال	پاسخ‌های صحیح بیشتر از ۴۰٪	پاسخ‌های صحیح بین ۳۰٪ تا ۴۰٪	پاسخ‌های صحیح کمتر از ۳۰٪
۱	نسبت و تناسب	۱۰	۲	۴	۴
۲	قضیه تالس	۷	۶	۱	-
۳	تشابه مثلث‌ها	۱۳	۱	۶	۶
۴	کاربردهایی از قضیه تالس و تشابه مثلث‌ها	۱۵	۳	۵	۷

در صورت هر سؤال سه نشانه زیر را مشاهده می‌کنید:

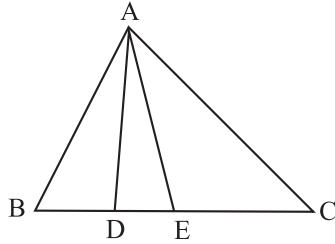
 درصد پاسخ‌گویی	 درصد مراجعه	 سطح دشواری
میزان درصد پاسخ‌های درست به هر سؤال، درصد پاسخ‌گویی است و برابر با نسبت تعداد دانش‌آموزانی است که به سؤال پاسخ درست داده‌اند به تعداد کل شرکت‌کنندگان در آزمون.	مجموع درصد پاسخ‌های درست و نادرست، درصد مراجعه است و برابر با نسبت تعداد دانش‌آموزانی است که به سؤال پاسخ داده‌اند خواه درست یا نادرست به تعداد کل شرکت‌کنندگان در آزمون.	سوالات آزمون‌ها در هر سال و در هر آزمون، بر اساس درصد پاسخ‌گویی به سؤال‌ها به ۱۰ دهک تقسیم شده‌اند که دهک ۱ بیش‌ترین میزان پاسخ‌گویی و دهک ۱۰ کمترین میزان پاسخ‌گویی را دارد.



هندسه (۱) دهم ریاضی

درس ۱: نسبت و تناسب

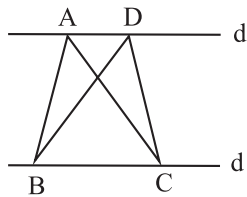
۴۸) اگر در شکل زیر $EC = 2BD = 3DE$ باشد، آن گاه نسبت مساحت مثلث AEC به مساحت مثلث ABE کدام است؟



	۵۷%
	۵۱%
	آبان ۱۳۹۹

- ۶/۵ (۱)
- ۵/۶ (۲)
- ۴/۳ (۳)
- ۳/۴ (۴)

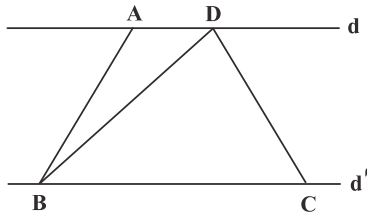
۴۹) در شکل مقابل $d \parallel d'$ و مساحت مثلث ABC ، 8 واحد مربع است. اگر $BD = 4$ باشد، فاصله نقطه C از BD کدام است؟



	۳۷%
	۳۰%
	آبان ۱۳۹۷

- ۲ (۱)
- ۴ (۲)
- ۶ (۳)
- ۸ (۴)

۵۰) در شکل مقابل، $d \parallel d'$ ، $AD = 6$ و $BC = 27$ است. نسبت فاصله C تا BD به فاصله A تا BD کدام است؟



	۳۳%
	۲۷%
	مرداد ۱۳۹۷

- ۳ (۱)
- ۳/۵ (۲)
- ۴/۵ (۳)
- ۴ (۴)

۵۱) اندازه‌ی زاویه‌های مثلثی به نسبت ۲، ۳ و ۵ می‌باشد. اختلاف بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین زاویه در این مثلث چند درجه است؟

	۳۹%
	۳۲%
	آذر ۱۳۹۶

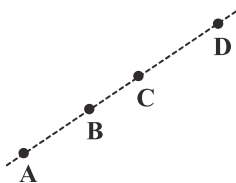
- ۵۴ (۱)
- ۳۶ (۲)
- ۱۸ (۳)
- ۷۲ (۴)

۵۲) هرگاه $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{6} = 0/6$ باشد، آن گاه حاصل $x - y + z$ کدام است؟

	۶۰%
	۵۳%
	مهر ۱۳۹۶

- ۲ (۱)
- ۲ (۲)
- ۳/۴ (۳)
- ۳ (۴)

۵۳) در شکل زیر، چهار نقطه A, B, C, D طوری روی یک خط قرار گرفته‌اند که $\frac{AB}{BC} = \frac{AC}{CD} = \frac{3}{2}$ ؛ اگر $AD = 10$ باشد، طول پاره خط BD کدام است؟



	۴۶%
	۳۳%
	مرداد ۱۳۹۷

- ۶/۴ (۱)
- ۶/۲۵ (۲)
- ۶ (۳)
- ۵/۷۵ (۴)

۵۴ اگر $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ باشد، آنگاه حاصل $\frac{a^2 + c^2}{b^2 + d^2}$ همواره برابر کدام یک از مقادیر زیر است؟ ($b, d \neq 0$)

- ۵۱٪
- ۲۸٪
- بهمن ۱۳۹۷

- (۱) $\frac{a+b}{c+d}$
- (۲) $\frac{a+c}{b+d}$
- (۳) $\frac{ad}{bc}$
- (۴) $\frac{ac}{bd}$

۵۵ اگر $\frac{a}{1} = \frac{b}{2} = \frac{c}{3} = \frac{d}{4+a}$ باشد، آنگاه کمترین مقدار $a + b + c + d$ کدام است؟

- ۲۹٪
- ۲۳٪
- آبان ۱۴۰۰

- (۱) -۲۵
- (۲) -۲۰
- (۳) -۱۵
- (۴) -۱۰

۵۶ در مثلثی به اضلاع $a=3, b=4, c=6$ حاصل $\frac{h_a - h_c}{h_b}$ کدام است؟ (h_a, h_b, h_c به ترتیب ارتفاعهای نظیر اضلاع a, b, c می‌باشند).

- ۳۴٪
- ۲۲٪
- مرداد ۱۳۹۷

- (۱) $\frac{1}{3}$
- (۲) $\frac{2}{3}$
- (۳) $\frac{3}{4}$
- (۴) $\frac{1}{4}$

۵۷ می‌دانیم $\frac{a+3c}{2a+7c} = \frac{7}{16}$ است. اگر پاره‌خطی به طول b واسطه‌ی هندسی بین دو پاره‌خط به طول‌های a و c باشد، نسبت $\frac{a}{b}$ کدام است؟

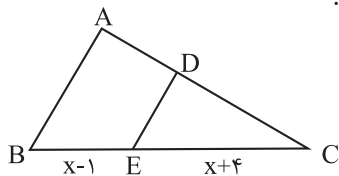
- ۴۵٪
- ۳۰٪
- مرداد ۱۳۹۶

- (۱) $\frac{1}{2}$
- (۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- (۳) ۲
- (۴) $\sqrt{2}$

درس ۲: قضیه تالس

۵۸ در شکل زیر $DE \parallel AB$ و $2CD = 3AD$ ، مقدار x برابر است با:

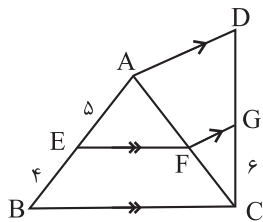
- ۶۵٪
- ۵۵٪
- مرداد ۱۳۹۶



- (۱) ۱۰
- (۲) ۱۱
- (۳) ۱۲
- (۴) ۱۳

۵۹ در شکل مقابل $EF \parallel BC$ و $AD \parallel FG$. اگر $AE = 5$ و $EB = 4$ و $GC = 6$ باشد، GD کدام است؟

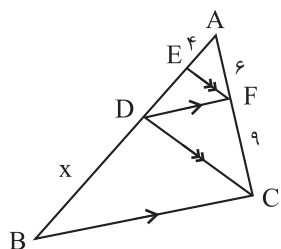
- ۴۸٪
- ۴۳٪
- مرداد ۱۳۹۶



- (۱) ۷
- (۲) $\frac{7}{5}$
- (۳) ۸
- (۴) $\frac{8}{5}$

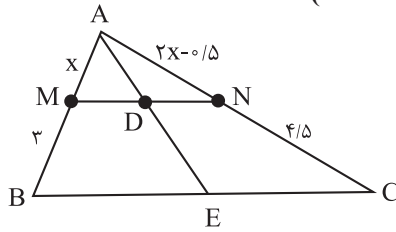
۶۰ در شکل زیر، $DF \parallel BC$ و $EF \parallel DC$ است. با توجه به اندازه‌های روی شکل، $x = BD$ کدام است؟

- ۷۷٪
- ۶۵٪
- دی ۱۳۹۷



- (۱) ۱۸
- (۲) ۱۵
- (۳) ۱۲
- (۴) ۹

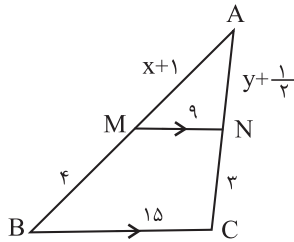
۶۱ در شکل زیر $MN \parallel BC$ است. طول کدام است؟ ($AD = 1/2$)



- ۳/۴ (۱)
- ۳/۵ (۲)
- ۳/۶ (۳)
- ۳/۲ (۴)

%۵۲
 %۴۲
 دی ۱۳۹۶

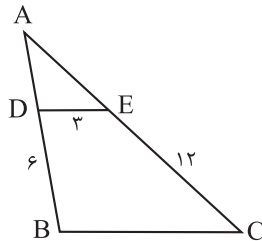
۶۲ مطابق شکل در مثلث ABC داریم: $MN \parallel BC$. در این صورت $x + y$ کدام است؟



- ۷ (۱)
- ۸ (۲)
- ۹ (۳)
- ۱۰ (۴)

%۵۷
 %۴۹
 شهریور ۱۳۹۷

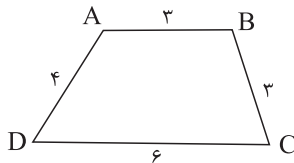
۶۳ در شکل زیر، محیط مثلث ADE برابر ۹ است. طول ضلع BC کدام است؟ ($DE \parallel BC$)



- ۹ (۱)
- ۱۰ (۲)
- ۱۰/۵ (۳)
- ۱۲ (۴)

%۵۷
 %۳۴
 دی ۱۳۹۷

۶۴ اگر ساق‌های دوزنقه شکل زیر را از سمت رأس‌های A و B امتداد دهیم تا یکدیگر را در نقطه M قطع کنند، آنگاه محیط مثلث MAB چقدر است؟ ($AB \parallel CD$)

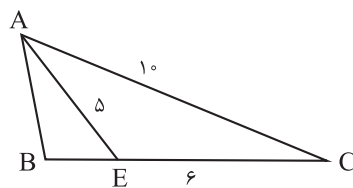


- ۸ (۱)
- ۹ (۲)
- ۱۰ (۳)
- ۷/۵ (۴)

%۶۲
 %۴۷
 آذر ۱۳۹۷

درس ۳: تشابه مثلث‌ها

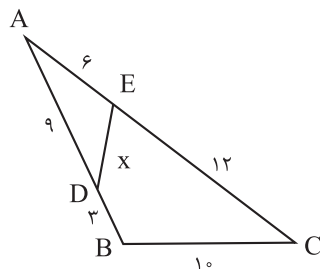
۶۵ در شکل مقابل، دو مثلث ABC و ABE متشابه‌اند. طول AB کدام است؟



- ۴ (۱)
- ۵ (۲)
- ۳ (۳)
- ۹/۲ (۴)

%۴۳
 %۲۰
 شهریور ۱۳۹۷

۶۶ در شکل زیر، مقدار x کدام است؟

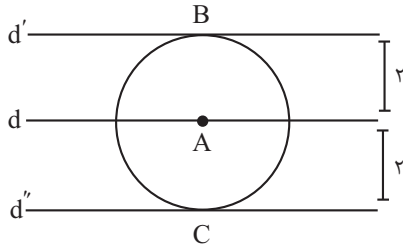


- ۱/۳ (۱)
- ۴/۵ (۲)
- ۵ (۳)
- ۱۴/۳ (۴)

%۵۱
 %۴۱
 دی ۱۳۹۷

پاسخ تشریحی فصل اول

مطابق شکل خطوط d' و d'' در نقطه B و C بر دایره مماس هستند که همان نقاط مطلوب سؤال است.

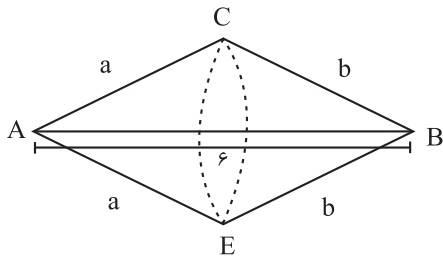


۵۰٪ دانش آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که به مکان هندسی‌های مربوط به نقاط متساوی‌الفاصله از یک نقطه و خط توجه کرده‌اند.

نکته

نقاطی که به فاصله یکسان از یک نقطه مشخص هستند، تشکیل دایره می‌دهند. نقاطی که به فاصله یکسان از خط هستند، به صورت دو خط موازی در طرفین آن خط قرار می‌گیرند.

گزینه ۱



مطابق شکل، نقاط برخورد دو کمان را C و E می‌نامیم، به طوری که در مثلث ABC ، $AC = a$ و $BC = b$ باشد، طبق نامساوی مثلث داریم:

$$AC + BC > AB \Rightarrow a + b > AB \Rightarrow a + b > c$$

پس $a + b$ می‌تواند c باشد.

۵۳٪ دانش آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که به نامساوی مثلثی و کاربرد آن در اینگونه مسائل تسلط کافی داشته‌اند.

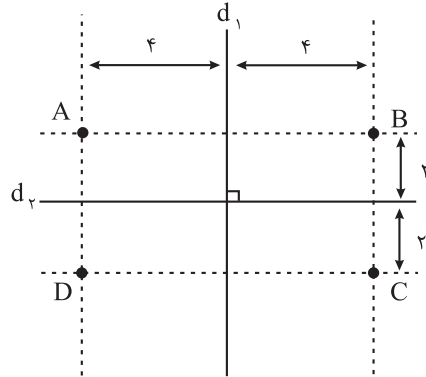
نکته

اگر پاره خط AB را فرض کنیم و به مرکز A کمانی به شعاع a و به مرکز B به شعاع b رسم کنیم، آن‌گاه داریم:

- $a + b > AB \rightarrow$ کمان‌ها در دو نقطه متقاطع‌اند.
- $a + b = AB \rightarrow$ کمان‌ها در یک نقطه مماس‌اند.
- $a + b < AB \rightarrow$ کمان‌ها یکدیگر را قطع نمی‌کنند.

فصل ۱: ترسیم‌های هندسی و استدلال

گزینه ۳



مکان هندسی نقاطی که از یک خط به یک فاصله باشند، دو خط موازی در طرفین آن خط است.

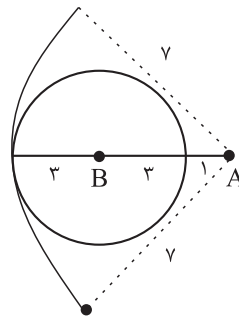
مطابق شکل چهار نقطه A ، B ، C ، D به فاصله ۴ از خط d_1 و به فاصله ۲ از خط d_2 قرار دارند.

۴۴٪ دانش آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که به مکان هندسی مربوط به نقاط متساوی‌الفاصله از یک خط توجه کرده‌اند.

نکته

مکان هندسی نقاطی که از یک خط به یک فاصله هستند به صورت دو خط موازی با آن خط در طرفین آن است.

گزینه ۲



مطابق شکل مکان هندسی نقاطی که از B به فاصله ۳ هستند، دایره‌ای به مرکز B و شعاع ۳ است و مکان هندسی نقاطی که از A به فاصله ۷ هستند نیز دایره‌ای به مرکز A و شعاع ۷ است که مطابق شکل این دو مکان هندسی تنها در یک نقطه مشترک هستند.

۳۰٪ دانش آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که به نامساوی مثلثی و کاربرد آن در اینگونه مسائل تسلط کافی داشته‌اند.

نکته

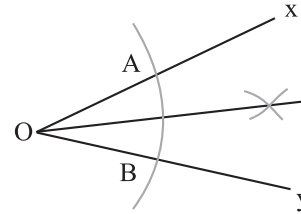
مکان هندسی نقاطی که از نقطه A به فاصله r هستند یک دایره به مرکز نقطه A و شعاع r است.

گزینه ۳

نقاطی که به فاصله ۲ واحد از نقطه A می‌باشند، روی دایره‌ای به مرکز A و شعاع ۲ واحد قرار دارند و نقاطی که به فاصله ۲ واحد از خط d می‌باشند، دو خط d' و d'' به موازات خط d در طرفین خط d هستند.

گزینه ۵

زاویه \hat{xOy} را در نظر بگیرید، برای رسم نیمساز این زاویه ابتدا کماتی به شعاع دلخواه و به مرکز O رسم می‌کنیم. تا اضلاع زاویه را قطع کند، نقاط تقاطع را A و B می‌نامیم، کمان‌های دوم و سوم با شعاع‌های برابر و به طولی بزرگ‌تر از نصف طول AB و به مرکزهای A و B رسم می‌کنیم تا یکدیگر را قطع کنند، با وصل کردن این نقطه به O نیمساز زاویه \hat{xOy} به دست می‌آید. بنابراین حداقل با رسم سه کمان می‌توانیم نیمساز یک زاویه را رسم کنیم.



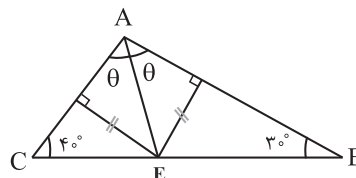
۵۳٪ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که به روش رسم گفته شده برای نیمساز در کتاب درسی توجه کرده‌اند.

نکته

حداقل به سه کمان برای ترسیم نیمساز یک زاویه نیاز داریم.

گزینه ۶

با توجه به این که نقطه E که بر روی خط AE قرار دارد از اضلاع AB و AC به یک اندازه است، نتیجه می‌گیریم، AE نیمساز زاویه \hat{A} است، پس داریم:



$$\Delta ABC: \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \rightarrow 2\theta + 40^\circ + 30^\circ = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \theta = 55^\circ = \hat{CAE}$$

۳۴٪ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که به خواص نیمساز و مجموع زوایای داخلی مثلث توجه کرده‌اند.

نکته

اگر یک نقطه از خطی که از رأس زاویه می‌گذرد، از دو ضلع زاویه به یک اندازه باشد، آن‌گاه آن خط نیمساز زاویه است.

گزینه ۷

با توجه به این که فاصله هر نقطه روی نیمساز از دو ضلع زاویه به یک اندازه است، داریم:

$$\hat{xOy} \text{ نیمساز زاویه } Oz \Rightarrow AH = AH' \rightarrow 2a - 1 = a + 0/5 \Rightarrow a = 1/5$$

با توجه به این که دو مثلث OAH' و OAH هم‌نهشت هستند، داریم:

$$OH = OH' = fa + 1 \xrightarrow{a=1/5} OH' = 7$$

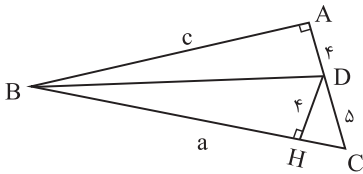
۴۷٪ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که به خواص نیمساز و شکل ایجاد شده بعد از رسم آن توجه کرده‌اند.

نکته

فاصله هر نقطه روی نیمساز یک زاویه از دو ضلع زاویه به یک اندازه است.

گزینه ۸

از D عمود DH را بر ضلع BC رسم می‌کنیم، D روی نیمساز زاویه B است، پس از دو ضلع آن به یک فاصله است، پس داریم:



$$\left. \begin{array}{l} DH = DA \\ \hat{A} = \hat{H} = 90^\circ \\ \text{مشترک } BD \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta ADB \cong \Delta HDB \Rightarrow BH = AB = c$$

$$\xrightarrow{BC=a} a - c = HC$$

در مثلث قائم‌الزاویه DHC داریم:

$$\Delta DHC: HC^2 + HD^2 = DC^2 \rightarrow HC^2 + f^2 = d^2$$

$$\Rightarrow HC^2 = 9 \Rightarrow HC = a - c = 3$$

۲۷٪ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که به خواص نیمساز و رابطه فیثاغورس تسلط کافی داشته‌اند.

نکته

هر گاه که در سؤالی نیمساز داشتیم و به دنبال طولی بودیم، حتماً به این قضیه که فاصله هر نقطه روی نیمساز از دو سر اضلاع زاویه یکسان است، دقت کنید.

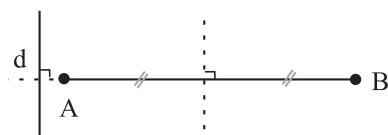
گزینه ۹

مکان هندسی نقاطی که از دو سر پاره خط به یک فاصله هستند، عمود منصف آن پاره خط است، پس با توجه به این نکته به بررسی هر یک از گزینه‌ها می‌پردازیم:

گزینه «۱»: مطابق شکل اگر d بر AB عمود باشد، با عمود منصف تلاقی ندارد.



گزینه «۲»: مطابق شکل اگر d بر امتداد AB عمود باشد، با محور عمود منصف تلاقی ندارد.



پاسخ تشریحی فصل اول

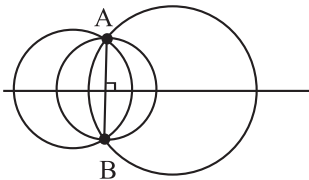
۴۰٪ دانش آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که به ویژگی‌های مربوط به مکان هندسی خاص در شکل توجه کرده‌اند.

نکته

خط‌المركزین دو دایره متقاطع، همواره عمودمنصف وتر مشترک آن‌ها است ولی عکس این قضیه در حالتی صادق است که شعاع دو دایره الزاماً برابر باشد.

گزینه ۱۲ «۴»

اگر AB وترى از دایره باشد، آن‌گاه مرکز از نقاط A و B به یک فاصله یا به عبارتی روی عمودمنصف پاره خط AB واقع است، چون این نقطه می‌تواند هر کجای عمودمنصف AB باشد، پس بی‌شمار دایره می‌توانیم رسم کنیم.



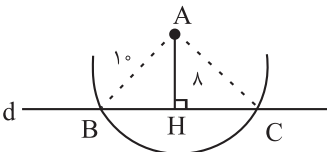
۳۰٪ دانش آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که بررسی حالت‌های مختلف را به درستی انجام داده‌اند.

نکته

مرکز دایره روی عمودمنصف وترهای دایره قرار دارد، به عبارتی عمودمنصف‌های تمام وترهای داخل دایره در مرکز دایره هم‌رس هستند.

گزینه ۱۳ «۴»

نقطه A از نقاط B و C به یک فاصله است، بنابراین روی عمودمنصف پاره خط BC واقع است، داریم:



$$\Delta ABH = AB^2 = AH^2 + BH^2 \Rightarrow 10^2 = 8^2 + BH^2$$

$$\Rightarrow BH^2 = 36 \Rightarrow BH = 6$$

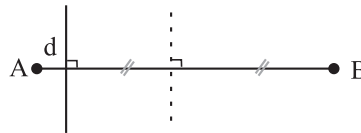
برای این که دو کمان به مراکز B و C و به شعاع R یکدیگر را در دو نقطه قطع کنند کافی است R بزرگ‌تر از نصف BC، یعنی $R > 6$ باشد.

۲۹٪ دانش آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که توانسته‌اند شکل مطلوب سؤال را به درستی رسم کنند و با توجه به اطلاعات آن به سؤال پاسخ دهند.

نکته

اگر پاره خط AB را در نظر بگیرید و بخواهید دو کمان به شعاع R و به مراکز A و B رسم کنید که یکدیگر را در دو نقطه قطع کنند، آن‌گاه $R > \frac{AB}{2}$ ، اگر بخواهیم یکدیگر را در یک نقطه قطع کنند، آن‌گاه $R = \frac{AB}{2}$ و اگر بخواهیم تقاطع نداشته باشند، آن‌گاه باید $R < \frac{AB}{2}$ باشد.

گزینه «۳»: مطابق شکل اگر d بر AB عمود باشد، با محور عمودمنصف تلاقی ندارد.



گزینه «۴»: اگر d موازی AB باشد حتماً عمودمنصف آن را در یک نقطه قطع می‌کند.



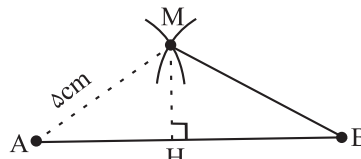
۳۶٪ دانش آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که توانسته‌اند حالت‌های هر چهار گزینه را به درستی بررسی کنند.

نکته

فاصله هر نقطه روی عمودمنصف از دو سر پاره خط به یک اندازه است.

گزینه ۱ «۲»

از آن‌جا که نقطه M از دو سر پاره خط به یک فاصله قرار دارد ($MA = MB$)، بنابراین روی عمود منصف این پاره خط قرار دارد، پس داریم:



$$\Delta AHM : AH^2 + MH^2 = AM^2$$

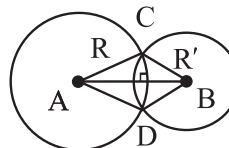
$$\Rightarrow 4^2 + MH^2 = 5^2 \Rightarrow MH = 3$$

۴۳٪ دانش آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که به رسم شکل مناسب و استفاده از اطلاعات آن به خوبی توجه کرده‌اند.

نکته

هر نقطه‌ای که از دو سر پاره خط به یک فاصله باشد، روی عمودمنصف آن پاره خط قرار دارد.

گزینه ۱ «۱»



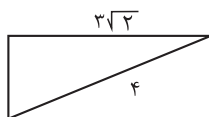
مطابق شکل دو دایره به مرکزهای A و B یکدیگر را در دو نقطه C و D قطع کرده‌اند. بنابراین CD وتر مشترک برای دو دایره است، در این صورت داریم:

$$\left. \begin{array}{l} AC = AD = R \Rightarrow \text{روی عمودمنصف CD است A} \\ BC = BD = R' \Rightarrow \text{روی عمودمنصف CD است B} \end{array} \right\} \text{AB روی عمودمنصف CD است}$$

توجه کنید: گزینه‌های «۲» و «۴» در صورتی درست هستند که شعاع دو دایره برابر باشد.

گزینه «۱» ۱۴

قطر مستطیل، و تر مثلث قائم الزاویه‌ای است که رئوس آن سه رأس مستطیل است، بنابراین همواره طول قطر مستطیل از طول اضلاع آن بیش تر است.



تناقض) $3\sqrt{2} \approx 3 \times 1.4 = 4.2 > 4$

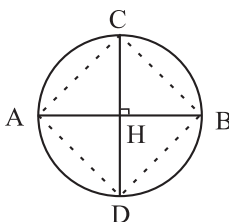
۲۸٪ دانش آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که به کاربرد نامساوی مثلثی در اشکال مختلف توجه کرده‌اند.

نکته

همواره طول قطر مستطیل از طول تمام اضلاع آن بیشتر است.

گزینه «۱» ۱۵

با توجه به این که قطرهای چهارضلعی $ACBD$ ، قطرهای دایره نیز می‌باشند، پس با یکدیگر برابر هستند، از طرفی بر هم عمود هستند و هم‌دیگر را نصف می‌کنند پس می‌توانیم نتیجه بگیریم چهارضلعی $ACBD$ ، مربع می‌باشد.



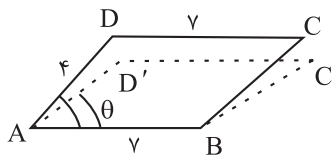
۳۹٪ دانش آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که به ترکیب مکان هندسی‌ها و شکل حاصل از آن‌ها توجه کرده‌اند.

نکته

اگر قطرهای یک چهارضلعی برابر و عمودمنصف یکدیگر باشند، آن‌گاه آن چهارضلعی مربع است.

گزینه «۴» ۱۶

با توجه به فرضیات مسئله با تغییر زاویه \hat{A} می‌توانیم بی‌شمار متوازی‌الاضلاع غیرهم‌نهشت با اضلاع ۴ و ۷ رسم کنیم.



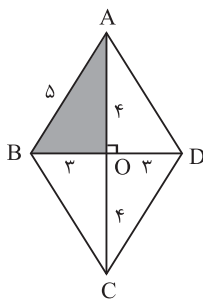
۴۳٪ دانش آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که به رسم متوازی‌الاضلاع تسلط کافی داشته‌اند.

نکته

برای رسم یک متوازی‌الاضلاع باید جدا از معلوم بودن اضلاع آن، زاویه‌ی اضلاع هم معلوم باشد تا متوازی‌الاضلاع رسم شده یکتا باشد.

گزینه «۲» ۱۷

در لوزی قطرهای عمودمنصف یکدیگرند، بنابراین طبق رابطه فیثاغورس در مثلث AOB سه ضلع این مثلث مشخص است به صورت یکتا رسم می‌شود. برای رسم سه مثلث دیگر هم به این صورت است و در نهایت لوزی $ABCD$ به صورت یکتا رسم می‌شود.



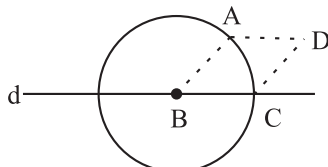
۴۱٪ دانش آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که به هم‌نهشت بودن اشکال قابل رسم و نشمردن حالت‌های تکراری توجه کرده‌اند.

نکته

یک چهارضلعی را با داشتن طول قطرهای و زاویه بین آن‌ها می‌توان به صورت یکتا رسم کرد، حال در یک لوزی با توجه به این که زاویه بین قطرهای ۹۰ درجه است، کافی است طول قطرهای را داشته باشیم تا لوزی به صورت یکتا رسم شود.

گزینه «۲» ۱۸

با توجه به این که نقاط A و C روی محیط دایره قرار دارند، نتیجه می‌گیریم، $AB = BC$ از طرفی طبق فرض سؤال فاصله D از A و C نیز برابر BC است، پس هر چهار ضلع $ABCD$ با یکدیگر برابر است و لزومی هم ندارد پاره خط AB بر خط d عمود باشد تا تشکیل مربع دهد بنابراین چهارضلعی $ABCD$ لوزی است.



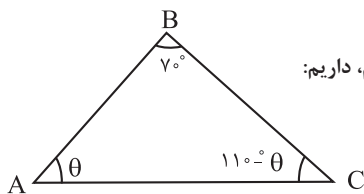
۴۵٪ دانش آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که به ترسیم و خواص چهارضلعی‌ها تسلط کافی داشته‌اند.

نکته

چهارضلعی که اضلاع آن با هم برابر باشد، لوزی نام دارد و اگر یکی از زاویه‌های لوزی قائمه باشد، آن‌گاه چهارضلعی حاصل مربع خواهد شد.

گزینه «۳» ۱۹

مطابق شکل اگر $\hat{A} = \theta$ بنامیم، داریم:



$$BC > AB \Rightarrow \hat{A} > \hat{C} \Rightarrow \theta > 110^\circ - \theta \Rightarrow 2\theta > 110^\circ \Rightarrow \theta > 55^\circ$$

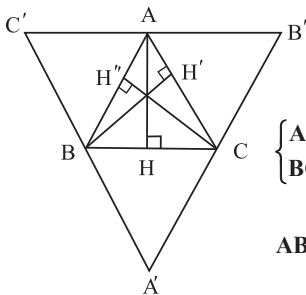
$$\theta \in \mathbb{Z} \rightarrow \min(\theta) = 56^\circ$$

پاسخ تشریحی فصل اول

۳۳٪ دانش آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند. چرا که به نوع مثلث با توجه به روابط بین زوایا رسیده‌اند.

نکته

محل تلاقی عمودمنصف‌های یک مثلث قائم‌الزاویه وسط وتر آن است.



گزینه ۳۳

با توجه به فرض مسئله، نتیجه می‌گیریم:

$$\begin{cases} AH \perp BC \\ BC \parallel B'C' \end{cases} \Rightarrow AH \perp B'C' \text{ (I)}$$

از طرفی برای چهارضلعی‌های $ABCB'$ و $C'BCA$ داریم:

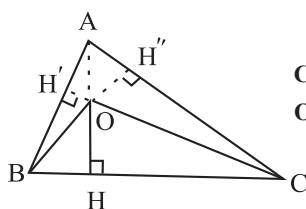
$$\left. \begin{aligned} AB' \parallel BC, AB \parallel CB' \\ C'A \parallel BC, AC \parallel C'B \end{aligned} \right\} \Rightarrow AB' = BC = AC' \text{ (II)}$$

با توجه به نتایج (I) و (II) و تعمیم آن برای بقیه شکل نتیجه می‌گیریم محل تلاقی ارتفاع‌ها در مثلث ABC ، محل تلاقی عمودمنصف‌ها در مثلث $A'B'C'$ است.

۳۲٪ دانش آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند. چرا که توانستند در شکل متوازی‌الاضلاع‌ها را مشخص کنند.

نکته

اگر دو جفت خط موازی یک‌دیگر را قطع کنند، متوازی‌الاضلاع پدید می‌آید.



گزینه ۱

در شکل واضح است که OH ، CH' و BH'' سه ارتفاع مثلث OBC هستند که در نقطه A هم‌رس‌اند.

۳۴٪ دانش آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند. چرا که به ویژگی‌های مربوط به نقاط هم‌رسی در مثلث‌های مختلف توجه کرده‌اند.

نکته

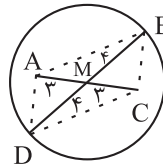
اگر در مثلث دلخواه ABC ، محل تلاقی ارتفاع‌ها را O بنامیم، آن‌گاه به ترتیب محل هم‌رسی ارتفاع‌های مثلث OAB ، OBC و OAC ، نقاط A ، B و C خواهد بود.

۳۶٪ دانش آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند. چرا که به این نکته توجه داشته‌اند که زاویه مقابل ضلع بزرگ‌تر، بزرگ‌تر است.

نکته

اگر در مثلث دلخواه ABC ، $AB > BC$ باشد، آن‌گاه حتماً $\hat{C} > \hat{A}$ خواهد بود.

گزینه ۱



مطابق شکل واضح است که قطرهای چهارضلعی $ABCD$ منصف یک‌دیگرند، بنابراین $ABCD$ متوازی‌الاضلاع با قطرهایی به طول ۶ و ۸ است.

۵۰٪ دانش آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند. چرا که به خواص متوازی‌الاضلاع تسلط کافی داشته‌اند.

نکته

اگر در یک چهارضلعی قطرهای منصف یک‌دیگر باشند، آن‌گاه آن چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.

گزینه ۳۳

استدلالی که بر پایه مجموعه متناهی از مشاهدات انجام شده باشد، استدلال استقرایی نام دارد.

۴۰٪ دانش آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند. چرا که به انواع استدلال و تعریف و نحوه بررسی آن‌ها تسلط کافی داشته‌اند.

نکته

اگر چند حالت از پدیده یا اتفاقی را بررسی کنیم و نتیجه آن را برای بقیه حالات نیز تعیین کنیم، از استدلال استقرایی استفاده کرده‌ایم.

گزینه ۴

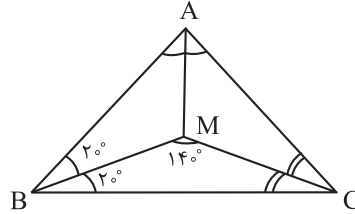
با توجه به این که مجموع زوایای داخلی مثلث 180° است، داریم:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \xrightarrow{\hat{A} = \hat{B} + \hat{C}} 2\hat{A} = 180^\circ \Rightarrow \hat{A} = 90^\circ$$

بنابراین مثلث ABC یک مثلث قائم‌الزاویه است. در نتیجه محل تلاقی عمودمنصف‌های اضلاع این مثلث دقیقاً وسط ضلع BC (وتر مثلث) قرار دارد.

گزینه ۲۵

نیمسازهای داخلی هر مثلث همرس هستند، با توجه به این که AM و CM نیمساز داخلی هستند و در نقطه M یکدیگر را قطع کردند، بنابراین BM نیز باید نیمساز داخلی $\triangle ABC$ باشد، پس $\angle MBC = 20^\circ$ داریم:



$$\begin{cases} \triangle BMC: \hat{MBC} + \hat{BMC} + \hat{MCB} = 180^\circ \rightarrow 20^\circ + 140^\circ + \hat{MCB} = 180^\circ \\ \Rightarrow \hat{MCB} = 20^\circ \\ \triangle MC: \hat{MCB} = \hat{MCA} = 20^\circ \end{cases}$$

$$\triangle ABC: \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \hat{A} + 2(20^\circ) + 2(20^\circ) = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{A} = 100^\circ \xrightarrow{MA \text{ نیمساز}} \hat{MAB} = 50^\circ$$

$$\triangle BAM: \hat{ABM} + \hat{AMB} + \hat{MAB} = 180^\circ \rightarrow 20^\circ + \hat{AMB} + 50^\circ = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{AMB} = 110^\circ$$

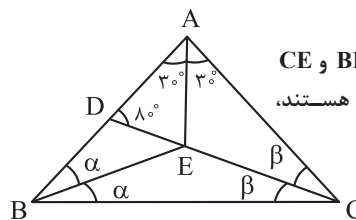
۳۷٪ دانش آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که به خواص مربوط به نقطه همرسی نیمسازها تسلط کافی داشته‌اند.

نکته

نیمسازهای داخلی هر مثلث دلخواه، درون مثلث همرس هستند.

گزینه ۲۶

با توجه به این که AE ، BE و CE نیمسازهای داخلی مثلث ABC هستند، داریم:



$$\triangle ADC: \hat{CDA} + \hat{A} + \hat{DCA} = 180^\circ \rightarrow 80^\circ + 2(30^\circ) + \beta = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \beta = 40^\circ$$

$$\triangle ABC: \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \rightarrow 2(30^\circ) + 2\alpha + 2\beta = 180^\circ$$

$$\rightarrow 60^\circ + 2\alpha + 80^\circ = 180^\circ \Rightarrow \alpha = 20^\circ$$

۳۴٪ دانش آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که به خواص نقطه همرسی نیمسازها و مجموع زوایای داخلی مثلثها توجه کرده‌اند.

نکته

در حل این گونه سؤالات از این که نیمساز زاویه را به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کند و مجموع زوایای هر مثلث 180° است، استفاده کنید.

گزینه ۲۷

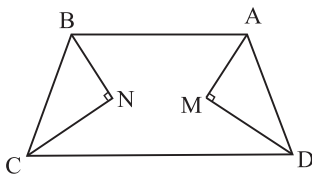
برخی نتایج مهم و پرکاربرد که با استدلال استنتاجی به دست می‌آید، قضیه نامیده می‌شود.

۴۸٪ دانش آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که به انواع استدلال و نتایج حاصل از آنها تسلط کافی داشته‌اند.

نکته

برای اثبات نتایج مهم و کاربردی که باید همواره در تمام حالات درست باشند، از استدلال استنتاجی بهره می‌بریم.

گزینه ۲۸



با توجه به این که مجموع زوایای داخلی هر چهارضلعی 360° است، داریم:

$$\triangle ABCD: \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360^\circ \rightarrow \hat{A} + 2\hat{A} + 2\hat{A} + 4\hat{A} = 10\hat{A} = 360^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{A} = 36^\circ, \hat{B} = 72^\circ, \hat{C} = 108^\circ, \hat{D} = 144^\circ$$

با توجه به این که $\hat{A} + \hat{D} = 180^\circ$ است، اگر نیمسازهای داخلی آن را رسم کنیم داریم:

$$\triangle AMD: \hat{AMD} + \hat{MAD} + \hat{MDA} = 180^\circ \rightarrow \hat{AMD} + \frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{D}}{2}$$

$$= \hat{AMD} + \frac{180^\circ}{2} = 180^\circ \Rightarrow \hat{AMD} = 90^\circ$$

بنابراین نیمسازهای داخلی دو زاویه A و D به هم عمود هستند، با همین استدلال نتیجه می‌گیریم نیمسازهای داخلی B و C نیز بر هم عمود هستند که با توجه به گزینه‌ها، گزینه «۱» درست است.

۲۰٪ دانش آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که به مکمل بودن جفت رأس‌های چهارضلعی توجه کرده‌اند.

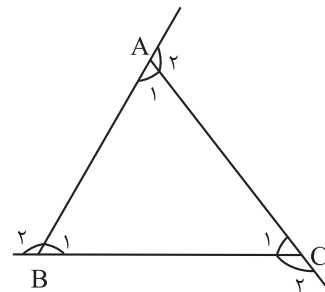
نکته

اگر در چهارضلعی $ABCD$ ، $\hat{A} + \hat{B} = \hat{C} + \hat{D} = 180^\circ$ باشد، آن‌گاه

نیمسازهای داخلی A ، B و C ، D بر هم عمود هستند.

گزینه «۱» ۲۹

در مثلث، اندازه هر زاویه خارجی برابر با مجموع دو زاویه داخلی غیرمجاورش می‌باشد، پس داریم:



$$\begin{cases} \hat{A}_2 = \hat{B}_1 + \hat{C}_1 \\ \hat{B}_2 = \hat{A}_1 + \hat{C}_1 \Rightarrow \hat{A}_2 + \hat{B}_2 + \hat{C}_2 = 2(\hat{A}_1 + \hat{B}_1 + \hat{C}_1) \\ \hat{C}_2 = \hat{A}_1 + \hat{B}_1 \end{cases}$$

با توجه به این که مجموع زوایای داخلی هر مثلث ۱۸۰ درجه است، پس داریم:

$$\hat{A}_2 + \hat{B}_2 + \hat{C}_2 = 360^\circ$$

در نتیجه گزینه «۱» نادرست است.
البته که با یک مثال نقض (مثلث متساوی‌الاضلاع) نیز می‌توانستیم نادرستی حکم گزینه «۱» را اثبات کنیم.

۹۳٪ دانش آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که به خوبی توانسته‌اند گزینه‌ها را بررسی کنند تا گزاره نادرست مشخص شود.

نکته

اندازه هر زاویه خارجی برابر مجموع دو زاویه داخلی غیرمجاورش می‌باشد.

گزینه «۲» ۳۰

به بررسی هر یک از گزینه‌ها می‌پردازیم:
گزینه «۱»: در استدلال استقرایی از جزء به کل می‌رسیم.
گزینه «۲»: طبق متن کتاب درسی این گزینه صحیح است.
گزینه «۳»: قضیه، نتایج مهم و کاربردی است که با استدلال استنتاجی به دست می‌آورد.
گزینه «۴»: عکس قضیه ممکن است درست باشد یا نادرست.

۵۱٪ دانش آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که به ویژگی‌های انواع استدلال و متن کتاب درسی تسلط کافی داشته‌اند.

نکته

در استدلال استنتاجی طبق گزاره‌های منطقی، دلیل می‌آوریم.
در استدلال استقرایی با بررسی موضوعی در چند حالت، نتیجه کلی در آن موضوع گرفته می‌شود یا به اصطلاح «از جزء به کل می‌رسیم».

گزینه «۳» ۳۱

با توجه به اطلاعات سؤال برای مثلث ADC داریم:

$$\hat{\Delta ADC} : \hat{C} = 180^\circ - (\hat{A}_1 + \hat{D}_1) = 180^\circ - (80^\circ + 40^\circ) = 60^\circ$$

از طرفی \hat{D}_1 زاویه خارجی مثلث ABD است، پس برابر با مجموع دو زاویه داخلی غیرمجاورش یعنی $(\hat{A}_1 + \hat{B})$ می‌باشد، بنابراین داریم:

$$\hat{B} + \hat{A}_1 = \hat{D}_1 = 40^\circ \Rightarrow \begin{cases} \hat{A}_2 < \hat{D}_1 \\ \hat{B} < \hat{D}_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \hat{A}_2 < \hat{A}_1 \\ \hat{B} < \hat{C} \\ \hat{A}_2 < \hat{C} \end{cases}$$

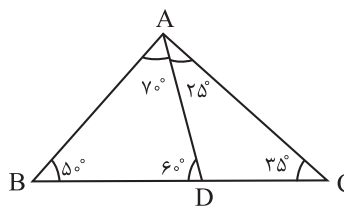
در نتیجه گزینه «۳» الزاماً صحیح نمی‌باشد.

۵۷٪ دانش آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که به ویژگی‌های مربوط به زوایای مثلث توجه کرده‌اند.

نکته

هر زاویه داخلی در مثلث از زوایای خارجی غیر مجاورش کم‌تر می‌باشد.

گزینه «۲» ۳۲



مطابق شکل با توجه به اطلاعات مسئله و این که مجموع زوایای داخلی مثلث ۱۸۰ است تمام زوایا در شکل را مشخص می‌کنیم و به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

- گزینه «۱»: $\hat{\Delta ABC} : \hat{B} > \hat{C} \Rightarrow AC > AB$ (درست است).
- گزینه «۲»: $\hat{\Delta ABD} : \hat{A} > \hat{D} \Rightarrow BD > AB$ (نادرست است).
- گزینه «۳»: $\hat{\Delta ADC} : \hat{D} > \hat{C} \Rightarrow AC > AD$ (درست است).
- گزینه «۴»: $\hat{\Delta ABD} : \hat{A} > \hat{B} \Rightarrow BD > AD$ (درست است).

۲۹٪ دانش آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که توانسته‌اند شکل مطلوب سؤال را رسم کنند و با توجه به آن به سؤال پاسخ دهند.

نکته

در این گونه سؤالات برای این که اندازه اضلاع را با هم مقایسه کنیم، باید در مثلی که این دو ضلع بخشی از آن هستند، زوایای روبه‌رو به آن اضلاع را مقایسه کنیم.

گزینه «۳» ۳۳

مجموع دو زاویه B و C، برابر ۱۳۰ درجه است، بنابراین حداقل یکی از زوایای B و C از زاویه A بزرگ‌تر است، در این صورت ضلع روبه‌رو به زاویه مورد نظر (\hat{C} یا \hat{B}) بزرگ‌تر از ضلع BC است، پس قطعاً ضلع BC بزرگ‌ترین ضلع مثلث ABC نیست.

گزینه ۳۷ «۲»

نقطه همرسی نیمسازهای زوایای داخلی هر مثلث، همواره درون مثلث است ولی نقطه همرسی عمودمنصفها یا ارتفاعها بسته به شرایط می تواند داخل، خارج و یا روی محیط مثلث باشد.

۳۸٪ دانش آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده اند، چرا که توانسته اند گزاره ها را به درستی بررسی کنند.

نکته

به جدول نقاط همرسی زیر توجه کنید:

نوع مثلث	مثلث با سه زاویه حاده	مثلث با زاویه منفرجه	مثلث قائم الزاویه
رأس قائمه	داخل	بالای رأس منفرجه	داخل
وسط وتر	داخل	پایین ضلع روبه روی زاویه منفرجه	داخل
نیمساز زوایای داخلی	داخل	داخل	داخل

گزینه ۳۸ «۳»

با توجه به متن کتاب درسی در اثبات یک قضیه به روش غیرمستقیم یا برهان خلف، حکم را نادرست می گیریم و با فرض نادرست مواجه می شویم.

۵۵٪ دانش آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده اند، چرا که به روش های اثبات و روند آنها تسلط کافی داشته اند.

نکته

در اثبات یک قضیه با برهان خلف، حکم را نادرست می گیریم و به یک تناقض یا گزاره ناممکن می رسیم.

گزینه ۳۹ «۳»

در اثبات به کمک برهان خلف، فرض می کنیم که حکم نادرست است و به تناقض می خوریم، در این قضیه $AB \neq AC$ فرض و $\hat{B} \neq \hat{C}$ حکم می باشد، بنابراین ابتدا با فرض $\hat{B} = \hat{C}$ باید اثبات را شروع کنیم.

۳۲٪ دانش آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده اند، چرا که به روش های اثبات و روند آنها تسلط کافی داشته اند.

۴۳٪ دانش آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده اند، چرا که می دانستند ضلع مقابل به زاویه بزرگ تر در مثلث بزرگ تر است.

نکته

اگر در مثلث دلخواه ABC ، $\hat{A} > \hat{B}$ باشد، آن گاه $BC > AC$ است یا به عبارتی ضلع رو به زاویه بزرگ تر، بزرگ تر است از ضلع روبه رو به زاویه کوچک تر.

گزینه ۳۴ «۲»

نقیض گزاره «مجموع زوایای داخلی هر چهارضلعی محدب برابر 360° است.» به صورت «چهارضلعی محدبی وجود دارد که مجموع زوایای داخلی آن 360° نیست.» می باشد.

۷۱٪ دانش آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده اند، چرا که بر نقیض کردن یک گزاره تسلط کافی داشته اند.

نکته

نقیض گزاره ای که می گوید، یک شرط به ازای هر حالتی صادق است را به صورت این که حالتی وجود دارد که آن شرط برقرار نیست، بیان می کنیم.

گزینه ۳۵ «۲»

نقیض گزاره «هر دو خط موازی یکدیگر را قطع نمی کنند.» به صورت «دو خط وجود دارد که یکدیگر را قطع می کنند و موازی هستند.» بیان می شود.

۵۰٪ دانش آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده اند، چرا که می دانستند نقیض یک گزاره ارزش مخالف با خود گزاره دارد و با توجه به این نکته به جواب رسیده اند.

نکته

در هنگام نقیض کردن یک گزاره دقت کنید که تنها باید حکم گزاره را نقیض کنید و در فرض گزاره نباید تغییری ایجاد کنید.

گزینه ۳۶ «۱»

نقیض گزاره «یک چهارضلعی وجود دارد که دو قطر آن برابر نیستند.» را به صورت «همه چهارضلعی ها دو قطر برابر دارند.» یا «چنین نیست که چهارضلعی وجود داشته باشد که دو قطر آن برابر نباشند.» بیان می کنیم.

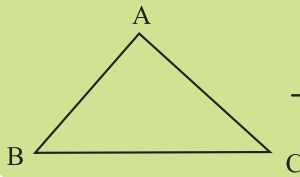
۴۴٪ دانش آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده اند، چرا که به این نکته که نقیض گزاره ارزشی مخالف خود گزاره دارد توجه کرده اند.

نکته

نقیض گزاره ای که می گوید، وجود دارد حالتی که یک شرط برقرار است را به صورت «در همه حالات این شرط برقرار نیست.» یا «چنین نیست که این شرط برقرار باشد.» بیان می کنیم.

پاسخ تشریحی فصل اول

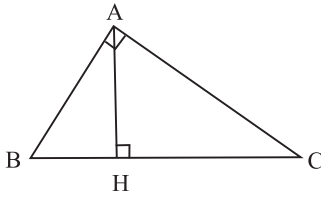
نکته



در مثلث ABC همواره داریم:

$$\begin{cases} AB < AC + BC \\ AC < AB + BC \\ BC < AB + AC \end{cases}$$

گزینه ۴۳ «۱»



در مثلث قائم‌الزاویه، اضلاع قائمه به عبارتی دو ارتفاع از مثلث هستند که با ارتفاع سوم (ارتفاع وارد بر وتر) در رأس قائمه هم‌رس می‌باشند.

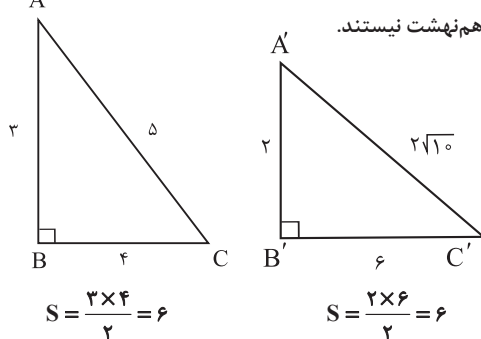
۴۴٪ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که به هم‌رسی ارتفاع‌ها در مثلث تسلط کافی داشته‌اند.

نکته

محل هم‌رسی ارتفاع‌ها در مثلثی که دارای زاویه منفرجه (بزرگ‌تر از 90°) است، خارج مثلث قرار می‌گیرد. در مثلثی که تمام زاویه‌های آن حاده (کوچک‌تر از 90°) است، داخل مثلث قرار می‌گیرد. در مثلث قائم‌الزاویه بر روی محیط مثلث (رأس قائمه) قرار می‌گیرد.

گزینه ۴۴ «۴»

در گزینه‌های «۱»، «۲» و «۳» عکس قضایای داده شده نیز برقرار است، اما عکس قضیه گزینه «۴» لزوماً برقرار نیست. به‌طور کلی مثال دو مثلث قائم‌الزاویه ABC و A'B'C' را در نظر بگیرید؛ مساحت هر دو برابر ۶ است ولی با یک‌دیگر هم‌نهشت نیستند.



$$S = \frac{3 \times 4}{2} = 6$$

$$S = \frac{2 \times 6}{2} = 6$$

۴۵٪ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که درستی گزاره‌ها و عکس آن‌ها را به دقت بررسی کرده‌اند.

نکته

برای اثبات دو شرطی بودن یک قضیه کافی است، خود قضیه و عکس آن درست باشد.

نکته

در اثبات به کمک برهان خلف کافی است، حکم و فرض قضیه را تشخیص دهیم تا با نقیض حکم، اثبات را شروع کنیم.

گزینه ۴۰ «۳»

نقیض گزاره «هیچ مثلثی بیش از یک زاویه قائمه ندارد.» به این صورت است که «مثلثی وجود دارد که بیش از یک زاویه قائمه دارد.»

۷۳٪ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که به این نکته که نقیض گزاره ارزشی مخالف با خود گزاره دارد توجه کرده‌اند.

نکته

نقیض گزاره‌هایی که به برقرار نبودن شرطی به هیچ حالتی اشاره دارند را می‌توان با وجود حداقل یک حالت از برقرار بودن آن شرط بیان کرد.

گزینه ۴۱ «۲»

عکس قضیه گزینه «۲» همواره برقرار نیست، چون اگر قطرهای یک چهارضلعی منصف یک‌دیگر باشند، آن چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است و الزاماً مستطیل نمی‌باشد.

۴۳٪ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که درستی گزاره‌ها و عکس آن‌ها را به دقت بررسی کرده‌اند.

نکته

برای نقض یک قضیه دو شرطی کافی است، برای خود قضیه یا عکس آن یک مثال نقض بیاوریم.

گزینه ۴۲ «۴»

به بررسی هر یک از گزینه‌ها می‌پردازیم: گزینه «۱»: اگر طول کوچک‌ترین ضلع مثلث ۷ باشد، واضح است که طول دو ضلع دیگر، بزرگ‌تر مساوی ۷ است و محیط مثلث حداقل باید ۲۱ باشد. (تناقض)

گزینه «۲»: اگر طول کوچک‌ترین ضلع مثلث ۳ و بزرگ‌ترین ضلع آن ۷ باشد، واضح است که طول ضلع سوم حداکثر می‌تواند ۷ باشد و به عبارتی محیط مثلث حداکثر می‌تواند ۱۷ باشد. (تناقض)

گزینه «۳»: اگر طول بزرگ‌ترین ضلع مثلث ۹ باشد واضح است که مجموع دو ضلع دیگر نیز نباید برابر با ۹ باشد که در این حالت مثلث تشکیل نمی‌شود. (تناقض)

گزینه «۴»: اگر طول کوچک‌ترین ضلع مثلث ۴ و بزرگ‌ترین ضلع آن ۸ باشد، اندازه طول ضلع سوم برابر با ۶ است و مثلثی با اضلاع ۴، ۶ و ۸ با توجه به صادق بودن در نامساوی مثلثی قابل رسم است. (صحیح است)

۴۲٪ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که تمامی گزینه‌ها را با دقت بررسی کرده‌اند و به جواب درست رسیده‌اند.

پاسخ تشریحی فصل دوم

۲۷٪ دانش آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند. چرا که به نکات مربوط به مساحت‌ها و روابطشان توجه کرده‌اند.

نکته

تمام مثلث‌های ایجاد شده بین دو خط موازی دارای ارتفاع‌های یکسان هستند.

گزینه ۵۱ «۲»

زاویه‌های مثلث را به صورت $2x$ ، $3x$ و $5x$ در نظر می‌گیریم، با توجه به این که مجموع زوایای داخلی مثلث 180° درجه است، داریم:

$$2x + 3x + 5x = 10x = 180^\circ \Rightarrow x = 18^\circ$$

$$54^\circ = 3x = 3 \times 18^\circ = 54^\circ - 2x = 54^\circ - 36^\circ = 18^\circ$$

۳۲٪ دانش آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند. چرا که به مجموع زوایا در مثلث توجه کرده‌اند.

نکته

برای محاسبه در این گونه سوالات، ضرایبی همانند (x) در نسبت‌های داده شده ضرب می‌کنیم تا مقدار هر زاویه بر حسب (x) به دست آید، سپس به کمک مجموع زوایا، مقدار (x) را مشخص می‌کنیم.

گزینه ۵۲ «۴»

با توجه به صورت سؤال $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{6} = \frac{3}{5}$ یا $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{6} = \frac{6}{10}$ است. طبق ترکیب نسبت از ویژگی‌های تناسب داریم:

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{6} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{(x-y+z)}{(2-3+6)} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{x-y+z}{5} = \frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow x - y + z = 3$$

راه دوم:

با توجه به صورت سؤال مقادیر x ، y و z را داریم که برابر $x = 1/2$ ، $y = 1/3$ و $z = 3/5$ می‌باشند و در نتیجه از ویژگی‌های تناسب، هم می‌توان صرف نظر کرد و با این مقادیر به خواسته سؤال رسید.

۵۳٪ دانش آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند. چرا که به جدول ویژگی‌های تناسب در متن کتاب درسی توجه کرده‌اند.

نکته

هرگاه داشته باشیم، $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ آن‌گاه داریم:

$$\frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

گزینه ۵۳ «۱»

با توجه به شکل و فرض سؤال داریم:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AC}{CD} = \frac{3}{2} \xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}} \frac{AB}{AB+BC} = \frac{AC}{AC+CD} = \frac{3}{3+2}$$

$$\rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AD} = \frac{3}{5} \stackrel{AD=10}{\Rightarrow} AC = 6 \Rightarrow AB = 3/6$$

$$\Rightarrow BD = AD - AB = 10 - 3/6 = 6/4$$

فصل ۲: قضیه تالس، تشابه و کاربردهای آن

گزینه ۴۸ «۱»

با توجه به این که ارتفاع دو مثلث $\triangle AEC$ و $\triangle ABE$ مشترک است، داریم:

$$\frac{S_{\triangle AEC}}{S_{\triangle ABE}} = \frac{EC}{BE} = \frac{EC}{BD+DE} = \frac{EC}{\frac{EC}{2} + \frac{EC}{3}} = \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}} = \frac{6}{5}$$

۵۱٪ دانش آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند. چرا که به رابطه مساحت مثلث‌های هم‌ارتفاع توجه کرده‌اند.

نکته

اگر دو مثلث در یک رأس مشترک باشند و قاعده مقابل به این رأس آن‌ها بر روی یک خط راست باشد، آن‌گاه نسبت مساحت دو مثلث با توجه به برابری ارتفاع آن‌ها، برابر با نسبت قاعده آن دو مثلث است.

گزینه ۴۹ «۲»

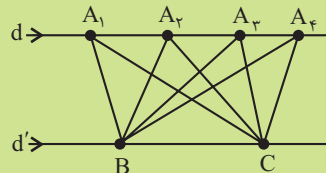
دو مثلث $\triangle ABC$ و $\triangle BDC$ به دلیل داشتن قاعده مشترک (BC) و ارتفاع برابر (فاصله دو خط d و d') دارای مساحت یکسان هستند، پس اگر ارتفاع رسم شده از رأس C در مثلث BDC را CH بنامیم، داریم:

$$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle BDC} = 8 = \frac{BD \times CH}{2} \Rightarrow 16 = 4 \times CH \Rightarrow CH = 4$$

۳۰٪ دانش آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند. چرا که به رابطه بین مساحت مثلث‌ها توجه کرده‌اند.

نکته

در شکل زیر تمام مثلث‌هایی که در قاعده BC مشترک هستند، دارای مساحت یکسان می‌باشند.



گزینه ۵۰ «۳»

دو مثلث $\triangle ADB$ و $\triangle BDC$ به دلیل این که دارای ارتفاع هم‌اندازه (فاصله دو خط d و d') هستند، نسبت مساحت‌هایشان برابر با نسبت قاعده‌های آن‌ها

$$\frac{S_{\triangle BCD}}{S_{\triangle ABD}} = \frac{BC}{AD} = \frac{27}{6} = 4/5$$

است، پس داریم:

از طرفی اگر فاصله C از BD را CH و فاصله A از BD را AH' بنامیم،

$$\frac{S_{\triangle BCD}}{S_{\triangle ABD}} = \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{BD \cdot CH}{\left(\frac{1}{2}\right) \cdot BD \cdot AH'} = \frac{CH}{AH'} = 4/5$$

داریم:

برای عبارت خواسته شده داریم:

$$\frac{h_a - h_c}{h_b} = \frac{\frac{2S}{a} - \frac{2S}{c}}{\frac{2S}{b}} = \frac{b}{a} - \frac{b}{c} = \frac{4}{3} - \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

۲۲٪ دانش آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که به رابطه بین نسبت اضلاع و ارتفاع‌ها توجه کرده‌اند.

نکته

در هر مثلث دلخواه نسبت ارتفاع‌ها، برابر عکس نسبت اضلاع است.

گزینه ۲» ۵۷

اگر عبارت داده شده را ساده کنیم، داریم:

$$\frac{a+3c}{2a+7c} = \frac{7}{16} \Rightarrow 16a+48c = 14a+49c \Rightarrow 2a=c$$

از طرفی b واسطه هندسی a و c است، پس $b^2 = ac$ می‌باشد، در نتیجه داریم:

$$b^2 = ac = a(2a) \Rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

۳۰٪ دانش آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که به مفاهیم تناسب مسلط بوده‌اند.

نکته

اگر b واسط هندسی a و c باشد، آن‌گاه $b^2 = ac$ می‌باشد.

گزینه ۲» ۵۸

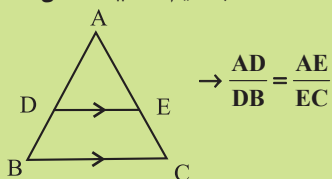
با توجه به قضیه تالس در مثلث ABC ، به دلیل این که $DE \parallel AB$ ، آن‌گاه داریم:

$$\triangle ABC : DE \parallel AB \Rightarrow \frac{DC}{AD} = \frac{EC}{BE} \xrightarrow{2CD=3AD} \frac{3}{2} = \frac{x+4}{x-1}$$

$$\rightarrow 3x-3 = 2x+8 \Rightarrow x=11$$

نکته

هر گاه در یک مثلث دلخواه ABC ، داشته باشیم $DE \parallel BC$ ، آن‌گاه داریم:



۳۳٪ دانش آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که به جدول ویژگی‌های تناسب در متن کتاب درسی توجه کرده‌اند.

نکته

اگر $\frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d}$ ، آن‌گاه $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ است.

گزینه ۴» ۵۴

با استفاده از ویژگی‌های تناسب داریم:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \rightarrow \frac{a^2}{b^2} = \frac{c^2}{d^2} \rightarrow \frac{a^2}{b^2} = \frac{c^2}{d^2} = \frac{a^2+c^2}{b^2+d^2}$$

از طرفی $\frac{a^2+c^2}{b^2+d^2} = \frac{ac}{bd}$ می‌باشد، پس همواره $\frac{a^2}{b^2} = \frac{c^2}{d^2} = \frac{ac}{bd}$ است.

۲۸٪ دانش آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که به جدول ویژگی‌های تناسب در متن کتاب درسی توجه کرده‌اند.

نکته

اگر $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ باشد، آن‌گاه $\frac{a^n+c^n}{b^n+d^n} = \frac{a^n}{b^n} = \frac{c^n}{d^n}$ خواهد بود.

گزینه ۱» ۵۵

طبق ویژگی ترکیب در صورت و مخرج داریم:

$$\frac{a}{1} = \frac{b}{2} = \frac{c}{3} = \frac{d}{4+a} = \frac{a+b+c+d}{10+a} = \frac{a}{1}$$

$$\Rightarrow a+b+c+d = a(10+a) = (a+5-5)(a+5+5)$$

$$\Rightarrow a+b+c+d = (a+5)^2 - 25$$

عبارت فوق به‌ازای $a = -5$ دارای کم‌ترین مقدار است و این مقدار برابر با -25 است.

۲۳٪ دانش آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که به جدول ویژگی‌های تناسب در متن کتاب درسی توجه کرده‌اند.

نکته

برای به‌دست آوردن کم‌ترین یا بیش‌ترین مقدار یک تابع درجه دو می‌توانیم طول رأس سهمی آن را به‌دست آوریم و یا یک مربع دو جمله‌ای به کمک معادله آن تشکیل دهیم و به نحوی مقادیردهی کنیم که بخش مربع دو جمله‌ای برابر صفر شود.

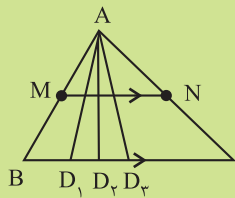
گزینه ۲» ۵۶

اگر مساحت مثلث S در نظر بگیریم، داریم:

$$S = \frac{1}{2}(a \times h_a) = \frac{1}{2}(b \times h_b) = \frac{1}{2}(c \times h_c)$$

$$\Rightarrow h_a = \frac{2S}{a}, h_b = \frac{2S}{b}, h_c = \frac{2S}{c}$$

نکته



اگر در مثلث ABC ، پاره خط MN موازی ضلع BC باشد، آن گاه به ازای هر نقطه روی ضلع BC هم چون (D_1, D_2, D_3) قضیه تالس در مثلث‌های ایجاد شده نیز برقرار است.

گزینه ۶۲

طبق تعمیم قضیه تالس در مثلث ABC ، به دلیل این که $MN \parallel BC$ است، داریم:

$$\Delta ABC : MN \parallel BC \Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

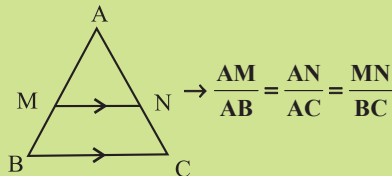
$$\rightarrow \frac{x+1}{(x+1)+4} = \frac{y+\frac{1}{2}}{(y+\frac{1}{2})+3} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5x+5 = 3x+15 \Rightarrow x=5 \\ 5y+\frac{5}{2} = 3y+\frac{21}{2} \Rightarrow y=4 \end{cases} \Rightarrow x+y=9$$

۴۹٪ دانش آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که به قضیه تالس و تعمیم آن توجه کرده‌اند.

نکته

هرگاه در مثلث دلخواه ABC ، $MN \parallel BC$ باشد، آن گاه داریم:



$$\rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

گزینه ۶۳

با توجه به این که محیط ADE برابر ۹ و $DE = 3$ است، نتیجه می‌گیریم $AD + AE = 6$ پس داریم:

$$\Delta ABC : DE \parallel BC \Rightarrow \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} = \frac{AD}{6} = \frac{AE}{12}$$

$$\rightarrow 2AD = AE \xrightarrow{AD+AE=6} AE = 4, AD = 2$$

از طرفی طبق قضیه تالس در مثلث ABC داریم:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC} \rightarrow \frac{2}{2+6} = \frac{3}{BC} \Rightarrow BC = 12$$

۳۴٪ دانش آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که به قضیه تالس توجه کرده‌اند.

گزینه ۵۹

طبق قضیه تالس برای دو مثلث ADC و ABC داریم:

$$\left. \begin{aligned} \Delta ABC : EF \parallel BC &\Rightarrow \frac{AE}{EB} = \frac{AF}{FC} \\ \Delta ADC : FG \parallel AD &\Rightarrow \frac{GD}{GC} = \frac{AF}{FC} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{AE}{EB} = \frac{GD}{GC} \rightarrow \frac{5}{4} = \frac{GD}{6}$$

$$\Rightarrow GD = 7.5$$

۴۳٪ دانش آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که به نکات رابطه تالس مسلط بوده‌اند.

گزینه ۶۰

طبق قضیه تالس در مثلث ADC ، به دلیل این که $EF \parallel DC$ است، داریم:

$$\Delta ADC : EF \parallel DC \Rightarrow \frac{AE}{DE} = \frac{AF}{FC} \rightarrow \frac{4}{DE} = \frac{6}{9} \Rightarrow DE = 6$$

از طرفی در مثلث ABC ، به دلیل این که $DF \parallel BC$ است، داریم:

$$\Delta ABC : DF \parallel BC \Rightarrow \frac{AD}{BD} = \frac{AF}{FC} \rightarrow \frac{AE+DE}{DB} = \frac{10}{x} = \frac{6}{9}$$

$$\Rightarrow x = 15$$

۶۵٪ دانش آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که به کار بردن تالس در ۲ مثلث را به خوبی فرا گرفته‌اند.

نکته

در این گونه سؤالات باید به کمک نوشتن روابط قضیه تالس برای هر جفت خط موازی، طول‌های مجهول را بیابید.

گزینه ۶۱

طبق قضیه تالس در مثلث ABC ، به دلیل این که $MN \parallel BC$ است،

داریم:

$$\Delta ABC : MN \parallel BC \Rightarrow \frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} \rightarrow \frac{x}{3} = \frac{2x-0.5}{4.5}$$

$$\rightarrow 4.5x = 6x - 1.5 \Rightarrow x = 1$$

در مثلث ABE داریم:

$$\Delta ABE : MD \parallel BE \Rightarrow \frac{AM}{MB} = \frac{AD}{DE} \rightarrow \frac{1}{3} = \frac{1/2}{DE} \Rightarrow DE = 3/6$$

۴۲٪ دانش آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که به قضیه تالس توجه کرده‌اند.

نکته

پس از یافتن زوایای برابر در دو مثلث متشابه، نسبت اضلاع متناسب را با توجه به این که آن دو ضلع روبه‌روی دو زاویه برابر هستند، بنویسید.

گزینه ۶۶ «۳»

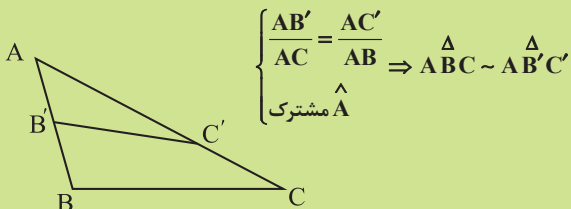
در دو مثلث ABC و ADE ، زاویه A مشترک است و از طرفی $\frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AB} = \frac{1}{2}$ ؛ بنابراین می‌توانیم نتیجه بگیریم دو مثلث به حالت دو ضلع متناسب و زاویه بین برابر، با هم متشابه هستند، پس داریم:

$$\triangle ABC \sim \triangle ADE \Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AB} = \frac{DE}{BC} = \frac{x}{10} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 5$$

۴۱٪ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که به نکته زیر توجه کرده‌اند.

نکته

اگر در مثلث‌های ABC و $AB'C'$ ، زاویه \hat{A} مشترک باشد و دو ضلع از این دو مثلث با یکدیگر متناسب باشند، آن‌گاه دو مثلث به حالت دو ضلع متناسب و زاویه برابر، با هم متشابه هستند. به مثال زیر دقت کنید:



گزینه ۶۷ «۴»

برای دو مثلث ABC و DEC داریم:

$$\begin{cases} \hat{A} = \hat{D} \\ \text{مشترک } \hat{C} \end{cases} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle DEC \Rightarrow \frac{AC}{DC} = \frac{BC}{EC}$$

$$\rightarrow \frac{16}{7} = \frac{BC}{14} \Rightarrow BC = 32$$

از طرفی $BC = BD + DC$ است، پس $BD = 32 - 7 = 25$.

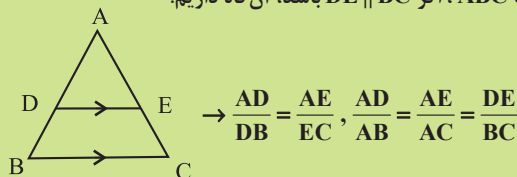
۳۱٪ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که به نکات تشابه مثلث‌ها توجه کرده‌اند.

نکته

در هنگام یافتن مثلث‌های متشابه به زوایای مشترک و زوایای متقابل به رأس توجه کنید.

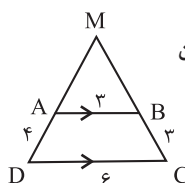
نکته

در مثلث ABC ، اگر $DE \parallel BC$ باشد، آن‌گاه داریم:



گزینه ۶۴ «۳»

طبق تعمیم قضیه تالس در مثلث DMC ، به دلیل این که $AB \parallel DC$ است، داریم:



$$\triangle DMC: AB \parallel DC \Rightarrow \frac{AM}{MD} = \frac{BM}{MC} \rightarrow \frac{AM}{AM+4} = \frac{BM}{BM+3} = \frac{3}{6}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} AM = 4 \\ BM = 3 \end{cases}$$

$$\rightarrow \text{محیط مثلث } MAB = AM + BM + AB = 4 + 3 + 3 = 10$$

۴۷٪ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که به قضیه تالس در مثلث توجه کرده‌اند.

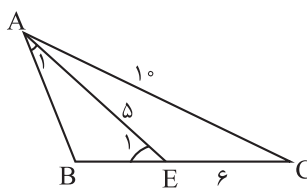
نکته

در محاسبات روابط قضیه تالس می‌توانیم از ویژگی‌های تناسب استفاده کنیم، به‌طور مثال داریم:

$$\frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

گزینه ۶۵ «۱»

با توجه به شکل زوایای برابر را در شکل مشخص می‌کنیم و سپس روابط تشابه را برای دو مثلث به‌دست می‌آوریم، پس داریم:



$$\begin{cases} \hat{B} \text{ مشترک} \\ \hat{A}_1 = \hat{C} \\ \hat{E}_1 = \hat{A} \end{cases} \Rightarrow \frac{AE}{AC} = \frac{BE}{AB} = \frac{AB}{BC} \rightarrow \frac{5}{10} = \frac{BE}{AB} = \frac{AB}{BE+6}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} BE = \frac{AB}{2} \\ BE + 6 = 2AB \end{cases} \Rightarrow \frac{AB}{2} + 6 = 2AB \Rightarrow AB = 4$$

۲۰٪ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که به نوشتن صحیح اضلاع متناسب توجه کرده‌اند.