توان‌های گویا و عبارت‌های جبری

درخت دانش

فصل سوم

با درخت دانش، گام به گام پیشرفت خود را ارزیابی کنید.

گام اول: میزان تسلط خود را با رنگ مشخص کنید.
آبی: مسلطم.
سبز: نسبتاً مسلطم.
زرد: مسلط نیستم.
گام‌های بعدی: اگر در گام اول دانش خود را در حد رنگ زرد ارزیابی کردید اما در نوبت‌های بعدی پیشرفت کردید، می‌توانید خانه‌های سبز یا آبی را رنگ کنید. هرگاه به رنگ‌ها نگاه کنید متوجه می‌شوید در کدام قسمت‌ها نیاز به تمرین بیش‌تر دارید.

توان‌های گویا و عبارت‌های جبری

۶۷ سؤال شناسنامه‌دار، شامل:
۵۵ سؤال از مدارس سراسر کشور
۱۲ سؤال ویژه‌ی استعدادهای درخشان

آبی / سبز / زرد

۱. ریشه و توان (۱۷ سؤال شناسنامه‌دار)

	تعداد سؤال
ریشه‌ی دوم و سوم اعداد و تقریب آن‌ها	۱۰
ریشه‌ی چهارم و پنجم اعداد و تقریب آن‌ها	۷

آبی / سبز / زرد

۲. ریشه‌ی n ام (۶ سؤال شناسنامه‌دار)

تعریف و خواص ریشه‌ی n ام یک عدد	۶
اعمال بر روی ریشه‌ی n ام	

آبی / سبز / زرد

۳. توان‌های گویا (۱۱ سؤال شناسنامه‌دار)

تعریف و قوانین توان‌های گویا	٤
فرمول‌های ریشه‌ی n ام	۷

آبی / سبز / زرد

۴. عبارت‌های جبری (۲۱ سؤال شناسنامه‌دار)

اتحادهای جبری و تجزیه‌ی چندجمله‌ای‌ها	۱۲
عبارت‌های گویا، ساده‌سازی و اعمال بر روی آن‌ها	٤
گویا کردن مخرج کسرها	۵

۱. ریشه و توان

ریشه‌ی دوم و سوم اعداد و تقریب آن‌ها

مرجع

۱۵۱. درستی یا نادرستی هر یک از عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

الف) عددهای منفی ریشه‌ی سوم ندارند.

ب) تساوی $\sqrt{(-۳)^۲} = (\sqrt{-۳})^۲$ درست است.

پ) عدد صفر تنها عددی است که ریشه‌ی دومش با خودش برابر است.

ت) تنها دو عدد وجود دارد که ریشه‌ی سوم‌شان با خودشان برابر است.

(صفحه‌ی ۴۸- مکمل و مرتبط با فعالیت)

الف) اهواز- غیر دولتی شهید ابراهیمی - دی ۹۵ **(۷ تکرار)**
ب) پیرانشهر- شاهد- دی ۹۵ **(۵ تکرار)**
پ) اهواز- غیر دولتی دارالفنون- دی ۹۵ **(۶ تکرار)**
ت) سیرجان- شاهد- دی ۹۵ **(۵ تکرار)**

۱۵۲. مشخص کنید هر یک از عددهای رادیکالی زیر بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار دارند.

الف) $\sqrt{۱۰}$ ب) $\sqrt{۷۵}$

پ) $-۷\sqrt{۳}$ ت) $\sqrt[۳]{۵۶}$

ث) $\sqrt[۳]{-۰/۰۱}$ ج) $\sqrt[۳]{۲۵}-۲$

(صفحه‌ی ۴۹- کار در کلاس- مشابه تمرین ۲)

الف) ساری- فردوس- دی ۹۵
ب) کرج- شاهد نعمتی‌ها- دی ۹۵
پ) جوانرود- معلم- دی ۹۵
ت) اهواز- یادگار امام- دی ۹۵
ث) قوچان- شاهد رفعت- دی ۹۵
ج) تهران- غیر دولتی ندای کوثر- دی ۹۵
(۲۱ تکرار)

۱۵۳. چند عدد صحیح x وجود دارد به‌طوری‌که $-۲ \le \sqrt{x} \le ۷$؟

(صفحه‌ی ۵۰- کار در کلاس- مکمل و مرتبط با تمرین ۴)

کرمان- نمونه دولتی سیدکمال‌الدین موسوی- دی ۹۵ **(۶ تکرار)**

۱۵۴. مقدار تقریبی هر یک از عددهای رادیکالی زیر را تا یک رقم اعشار به‌دست آورید.

الف) $\sqrt{۱۸}$ ب) $\sqrt{۲۷}$

پ) $\sqrt[۳]{۱۰}$ ت) $\sqrt[۳]{۲۰}$

(صفحه‌ی ۵۲- مشابه تمرین ۲)

الف) نیشابور- شاهد ابوذر غفاری- دی ۹۵
ب) مریوان- غیر دولتی یاسا- دی ۹۵
پ) خوی- نمونه دولتی شهدای فرهنگی- دی ۹۵
ت) شیراز- آل محمد- دی ۹۵
(۱۱ تکرار)

۱۵۵. محل تقریبی تمام عددهای زیر را روی یک محور مشخص کنید.

$$A=\sqrt{۸}\ ,\ B=\sqrt{۱۰}\ ,\ C=\sqrt[۳]{۱۰}\ ,\ D=\sqrt[۳]{۳}\ ,\ E=\sqrt[۳]{۲۷}$$

(صفحه‌ی ۵۰- کار در کلاس- مشابه تمرین ۳)

قوچان- شاهد رفعت- دی ۹۵
سیرجان- شاهد- دی ۹۵
مینودشت- پروین- دی ۹۵
(۶ تکرار)

۱۵۶. زیر هر رادیکال سه عدد قرار دهید تا نامساوی برقرار باشد.

الف) $۷ < \sqrt{\square} < ۸$ ب) $۳ < \sqrt[۳]{\bigcirc} < ۴$

(صفحه‌ی ۵۰- کار در کلاس- مشابه تمرین ۴)

الف) اصفهان- غیر انتفاعی جامع- دی ۹۵
ب) دزفول- شهید باهنر- دی ۹۵
(۶ تکرار)

۱۵۷. اگر a عددی بین صفر و یک باشد، اعداد $\sqrt{a}$ ، $a^۳$ ، $\sqrt[۳]{a}$ ، $a^۲$ را به‌ترتیب از کوچک به بزرگ مرتب کنید.

(صفحه‌ی ۵۷- مکمل و مشابه تمرین ۱-ب)

کرمان- نمونه دولتی سیدکمال‌الدین موسوی- دی ۹۵ **(۵ تکرار)**

۱۵۸. اگر $۰ < a < ۱$ باشد، آنگاه حاصل عبارت زیر را تعیین کنید.

$$A=\left|a-\sqrt{a}\right|-\left|a-\sqrt[۳]{a}\right|+\left|\sqrt{a}-\sqrt[۳]{a}\right|$$

(صفحه‌ی ۵۲- مکمل و مرتبط با تمرین ۴)

یزد- امام حسین- دی ۹۵ **(۵ تکرار)**

۱۵۹. در جاهای خالی علامت مناسب (> = <) قرار دهید.

الف) $\sqrt[۳]{-۰/۰۰۱}\ \bigcirc\ -۰/۱$ ب) $\sqrt{\sqrt{۲}}\ \bigcirc\ \sqrt{۲}$

پ) $\sqrt{۵}\ \bigcirc\ \sqrt[۳]{۶}$

(صفحه‌ی ۵۳- مشابه تمرین ۷)

الف) بناب- نمونه دولتی شهید چمران- دی ۹۵
ب) تهران- صدیقه رودباری- دی ۹۵
پ) اصفهان- شیخ زاده هراتی- دی ۹۵
(۱۶ تکرار)

۱۶۰. حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $\sqrt{(۱-\sqrt{۲})^۲}$

ب) $\sqrt[۳]{\sqrt{۶۴}}$

پ) $\sqrt[۳]{۳^۶\times ۵^۶}$

ت) $\sqrt{(-۳)^۲}-\sqrt[۳]{(-۵)^۳}$

ث) $\sqrt{\sqrt{۸۱}}+\sqrt{\sqrt[۳]{۶۴}}$

ج) $\sqrt{۱۲۸}+۲\sqrt{۵۱۲}-۳\sqrt{۳۲}$

چ) $\sqrt[۳]{۸۱}-\sqrt[۳]{-۲۴}+\sqrt[۳]{۲۷}$

ح) $۲\sqrt{۱۲}+۳\sqrt{۷۵}+۲\sqrt[۳]{\sqrt{۷۲۹}}+۲\sqrt{۴۸}$

(صفحه‌ی ۴۸- مکمل و مشابه فعالیت)

مرجع:
الف) جوانرود- معلم- دی ۹۵
ب) همدان- شهدای جاویدالاثر- دی ۹۵
پ) سیرجان- نمونه دولتی اندیشه- دی ۹۵
ت) تهران- فرزانگان مدرن- دی ۹۵
ث) سنندج- زانیاران- دی ۹۵
ج) خوی- نمونه دولتی شهدای فرهنگی- دی ۹۵
چ) تهران- ممتاز حنان- دی ۹۵
ح) نیشابور- شاهد ابوذر غفاری- دی ۹۵
(۲۴ تکرار)

ریشه‌ی چهارم و پنجم اعداد و تقریب آن‌ها

۱۶۱. جاهای خالی را با عبارات یا عددهای مناسب پر کنید.

الف) هر عدد مثبت دارای .... ریشه‌ی چهارم است که .... یکدیگرند.

ب) هر عدد دارای .... ریشه‌ی پنجم است که اگر عدد .... باشد، ریشه‌ی پنجم آن مثبت و اگر عدد منفی باشد، ریشه‌ی پنجم آن .... است.

پ) عددهای ۳ و .... ریشه‌های چهارم عدد .... هستند.

ت) ریشه‌ی پنجم عدد $\frac{-۱}{۳۲}$ برابر است با ....

(صفحه‌ی ۵۰- فعالیت- مشابه تمرین ۱ و صفحه‌ی ۵۱- کار در کلاس- مکمل و مشابه تمرین‌های ۴ و ۵)

مرجع:
الف) پیرانشهر- شاهد- دی ۹۵
ب) ایلام- حسین‌بن علی- دی ۹۵
پ) مشهد- شاهد فردوسی- دی ۹۵
ت) کرج- پنج تن آل عبا- دی ۹۵
(۱۹ تکرار)

۱۶۲. درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را بررسی کنید.

الف) $\sqrt[۴]{۸۱}=\pm ۳$

ب) $\sqrt[۳]{۰/۰۲۷}=\sqrt[۴]{۰/۰۰۸۱}$

پ) $\sqrt[۴]{a^۴}=a$

ت) $(\sqrt[۴]{-۲})^۴=\sqrt[۴]{(-۲)^۴}=\sqrt[۴]{۱۶}$

ث) $\sqrt[۳]{-۳}\times\sqrt[۳]{-۹}\times\sqrt[۴]{(-۳)^۴}=۹$

(صفحه‌ی ۵۵- فعالیت- مکمل و مرتبط با تمرین‌های ۳ و ۴)

مرجع:
الف) چالوس- شاهد- دی ۹۵
ب) گرمسار- شهید ثانی- دی ۹۵
پ) ساری- فردوس- دی ۹۵
ت) شیراز- شاهد علامه امینی- دی ۹۵
ث) سنندج- زانیاران- دی ۹۵
(۸ تکرار)

۱۶۳. حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $\sqrt[۴]{(-۳)^۸}$

ب) $\sqrt[۵]{-۰/۰۰۰۳۲}$

پ) $\sqrt[۴]{۱۶}\times\sqrt[۴]{۸۱}$

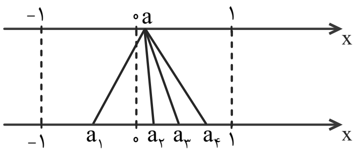
ت) $\sqrt[۵]{(۱-\sqrt{۳})^۵}$

ث) $\sqrt[۴]{۸۱}-\sqrt[۳]{-۲۷}$

(صفحه‌ی ۵۵- کار در کلاس- مشابه تمرین ۱)

مرجع:
الف) کرمان- شهدای ۱۰- دی ۹۵
ب) خمینی شهر- شاهد ثارالله- دی ۹۵
پ) گنبد کاووس- مختومقلی فراغی- دی ۹۵
ت) جوانرود- معلم- دی ۹۵
ث) اهواز- غیر دولتی شهید ابراهیمی- دی ۹۵
(۲۷ تکرار)

۱۶۴. در شکل زیر، نقطه‌ای از محور بالا به ریشه‌های سوم و چهارم و پنجم خود وصل شده است. مشخص کنید کدام ریشه‌ی سوم، کدام چهارم و کدام پنجم است؟



(صفحه‌ی ۵۲- مکمل و مرتبط با تمرین ۵- ب)

مرجع:
بیجار- نمونه دولتی شهید رجایی- دی ۹۵
(۷ تکرار)

۱۶۵. مشخص کنید هر یک از عددهای رادیکالی زیر، بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار دارند؟

الف) $\sqrt[۴]{۳۷}$

ب) $\sqrt[۵]{۲۰۰}$

پ) $\sqrt[۵]{-۳۰۰}$

(صفحه‌ی ۵۱- مشابه تمرین ۱)

مرجع:
الف) جوانرود- معلم- دی ۹۵
ب) سمنان- نمونه دولتی عفاف- دی ۹۵
پ) گرمسار- شهید ثانی- دی ۹۵
(۱۱ تکرار)

فصل سوم

مرجع

۱۶۶. در جاهای خالی علامت مناسب (> = <) قرار دهید.

الف) $\sqrt[3]{3}$ ○ $\sqrt[5]{3}$

ب) $\sqrt[4]{0/0001}$ ○ $0/1$

پ) $\sqrt[3]{\frac{-1}{2}}$ ○ $\sqrt[5]{\frac{-1}{2}}$

ت) $\sqrt[5]{-100}$ ○ $\sqrt[3]{-100}$

ث) $\sqrt[3]{2}$ ○ $\sqrt[4]{2}$

ج) $\sqrt[5]{10^{-6}}$ ○ $\sqrt[5]{-2^3}$

چ) $\sqrt[4]{0/5}$ ○ $\sqrt[5]{0/5}$

ح) $\sqrt[4]{(-4)^4}$ ○ $\sqrt[3]{64}$

(صفحه‌ی ۵۳- مکمل و مشابه تمرین ۷)

الف) یزد- غیر دولتی روش نوین- دی ۹۵
ب) اهواز- غیر دولتی شایستگان- دی ۹۵
پ) جیرفت- شاهد- دی ۹۵
ت) دشتی- فرزانگان- دی ۹۵
ث) سیرجان- شاهد- دی ۹۵
ج) اصفهان- شهدای هاتف- دی ۹۵
چ) مریوان- وحدت- دی ۹۵
ح) کرمانشاه- هماهنگ ناحیه ۳- دی ۹۵
(۱۵ تکرار)

۱۶۷. در جاهای خالی علامت مناسب (> = <) قرار دهید.

الف) $a > 1 \Rightarrow a$ ○ $\sqrt[5]{a}$

ب) $0 < a < 1 \Rightarrow \sqrt[3]{a}$ ○ $\sqrt[5]{a}$

پ) $a > 1 \Rightarrow \sqrt[4]{a}$ ○ $\sqrt[5]{a}$

ت) $a < -1 \Rightarrow a$ ○ $\sqrt[5]{a}$

ث) $-1 < a < 0 \Rightarrow \sqrt[5]{a}$ ○ $\sqrt[3]{a}$

(صفحه‌ی ۵۷- مکمل و مرتبط با تمرین ۱- ب)

الف) تهران- نمونه دولتی نظام مافی- دی ۹۵
ب) اهواز- غیر دولتی دانشگاه- دی ۹۵
پ) تهران- صدیقه رودباری- دی ۹۵
ت) شیراز- شاهد علامه امینی- دی ۹۵
ث) شیراز- آل محمد- دی ۹۵
(۹ تکرار)

۲. ریشه‌ی n اُم

تعریف و خواص ریشه‌ی n ام یک عدد

اعمال بر روی ریشه‌ی n ام

۱۶۸. در جاهای خالی عبارت مناسب قرار دهید.

الف) عددهای .... ریشه‌های زوج دارند که این ریشه‌ها .... یکدیگرند.

ب) اگر n زوج باشد، $\sqrt[n]{a^n}$ برابر با .... است.

پ) ریشه‌ی هفتم ۱۲۸- برابر است با ....

ت) عددهای منفی، ریشه‌ی .... ندارند.

ث) عدد ۲ ریشه‌ی هفتم عدد .... است.

(صفحه‌ی ۵۴- فعالیت- مکمل و مرتبط با تمرین‌های ۱ و ۲)

الف) بیجار- کوثر- دی ۹۵
ب) بندر لنگه- بوخش گزیر- دی ۹۵
پ) اهواز- حضرت معصومه- دی ۹۵
ت) نجف‌آباد- شهدای مکه- دی ۹۵
ث) تهران- اسما ۲- دی ۹۵
(۲۱ تکرار)

۱۶۹. درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را بررسی کنید.

الف) اگر n زوج باشد، آنگاه $\sqrt[n]{a^n} = a$.

ب) عبارت $(\sqrt[6]{(-2)^3})^2$ یک عبارت تعریف نشده است.

پ) تساوی $\sqrt[n]{a+b} = \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$ برای هر عدد حقیقی a و b برقرار است.

ت) اگر $x > 1$، آنگاه $\sqrt[3]{x} < \sqrt{x}$

ث) تساوی $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ برای هر عدد دلخواه a و b و هر عدد طبیعی n برقرار است.

(صفحه‌ی ۵۸- مکمل و مشابه تمرین‌های ۳ تا ۶)

الف) سمنان- نمونه دولتی عفاف- دی ۹۵
(۹ تکرار)
ب) دزفول- شهید باهنر- دی ۹۵
(۶ تکرار)
پ) ساری- دبیرستان ۲۹ آبان- دی ۹۵
(۸ تکرار)
ت) کرج- نمونه دولتی کاشانی‌پور- دی ۹۵
(۵ تکرار)
ث) کرمانشاه- غیر دولتی علوم پزشکی- دی ۹۵
(۷ تکرار)

مرجع

۱۷۰. حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $\sqrt[6]{(1-\sqrt{2})^6}$ ب) $\sqrt[8]{0.00000001}$

پ) $\sqrt{4^3}\times\sqrt{2\sqrt[7]{128}}$ ت) $5\sqrt[7]{3^{15}}+2\sqrt[7]{3}-2\sqrt[7]{3^8}$

ث) $\sqrt[11]{2\sqrt{2}-3}\times\sqrt[11]{3+2\sqrt{2}}$ ج) $\sqrt[5]{-32}+3\sqrt[7]{10^{-7}}$

چ) $\sqrt[5]{-2}\times\sqrt[5]{16}$ ح) $\sqrt[4]{(2\sqrt{5}-5\sqrt{2})^4}-\sqrt{(5\sqrt{2}-2\sqrt{5})^2}$

خ) $\sqrt{(2-\sqrt{5})^2}+\sqrt[4]{(\sqrt{5}-2)^4}+\sqrt[3]{(2-\sqrt{5})^3}-\sqrt[5]{(\sqrt{5}-2)^5}$

(صفحه‌ی ۵۵- فعالیت- مکمل و مرتبط با تمرین ۳ و کار در کلاس- مکمل و مرتبط با تمرین ۲)

الف) بجنورد- دانش- دی ۹۵
ب) اهواز- غیر دولتی شریف- دی ۹۵
پ) پیرانشهر- شاهد- دی ۹۵
ت) اهواز- حضرت معصومه- دی ۹۵
ث) اصفهان- شهید اژه‌ای (سمپاد) - دی ۹۵
ج) شهرکرد- هماهنگ- دی ۹۵
چ) مشهد- آقا مصطفی- دی ۹۵
ح) فسا- حافظ- دی ۹۵
خ) اردبیل- شهید بهشتی- دی ۹۵
(۱۷ تکرار)

۱۷۱. اگر $0<a<1$، آنگاه حاصل $\sqrt{a^2}+\sqrt[4]{(a-1)^4}+\sqrt[6]{(1-a)^6}$ را به‌دست آورید.

(صفحه‌ی ۵۶- فعالیت- مکمل و مرتبط با تمرین ۱)

سمنان- نمونه دولتی رشد- دی ۹۵
(۴ تکرار)

۱۷۲. در جاهای خالی علامت مناسب ($<\ =\ >$) قرار دهید.

الف) $(0.2)^7 \bigcirc (0.2)^3$ ب) $(-0.4)^3 \bigcirc (-0.4)^9$

پ) $(\sqrt{2})^9 \bigcirc (\sqrt{2})^{11}$ ت) $\sqrt[5]{0.2} \bigcirc \sqrt[8]{0.2}$

ث) $\sqrt[7]{3} \bigcirc \sqrt[14]{3}$ ج) $\sqrt[5]{32} \bigcirc \sqrt[7]{128}$

چ) $\sqrt[5]{-10} \bigcirc \sqrt[7]{-10}$

(صفحه‌ی ۵۷- مکمل و مشابه تمرین ۱)

الف) اصفهان- غیر انتفاعی جامع- دی ۹۵
ب) مشهد- یادگاران امام خمینی- دی ۹۵
پ) اهواز- حضرت معصومه- دی ۹۵
ت) اهواز- غیر دولتی دارالفنون- دی ۹۵
ث) تهران- غیر دولتی نور- دی ۹۵
ج) اصفهان- شهدای هاتف- دی ۹۵
چ) سمنان- نمونه دولتی عفاف- دی ۹۵
(۱۱ تکرار)

۱۷۳. در هر یک از تساوی‌های زیر، مقدار x را بیابید.

الف) $\sqrt[6]{x}=\frac{1}{2}$ ب) $\sqrt[5]{x}=-2$

(صفحه‌ی ۵۴- فعالیت- مکمل و مرتبط با تمرین ۱)

اسفراین- شاهد نرجس- دی ۹۵
(۷ تکرار)

۳. توان‌های گویا

تعریف و قوانین توان‌های گویا

۱۷۴. حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $(5^{-\frac{3}{2}})^{\frac{6}{5}}$ ب) $5^{\frac{9}{5}}\times 5^{\frac{2}{4}}$

پ) $(\sqrt[3]{27^{-2}})^{\frac{-1}{2}}$ ت) $4^{\frac{1}{2}}+27^{\frac{-1}{3}}$

(صفحه‌ی ۶۰- مکمل و مشابه فعالیت ۲)

الف) آبادان- شاهد خاتم‌الانبیا- دی ۹۵
ب) کهنوج- نمونه دولتی فرهنگیان- دی ۹۵
پ) تهران- نمونه دولتی سلمان فارسی- دی ۹۵
ت) خمینی شهر- شاهد ثارا...- دی ۹۵
(۴ بار)

مرجع

۱۷۵. هر یک از توان‌های کسری زیر را در صورت امکان به صورت رادیکالی بنویسید.

الف) $۴^{\frac{۳}{۷}}$　　ب) $۱۷^{\frac{-۱}{۲}}$

پ) $(۳)^{\frac{۲}{۵}}$　　ت) $((-۲)^{۲})^{\frac{۲}{۳}}$

ث) $\left(\frac{۱}{۵}\right)^{\frac{-۱}{۳}}$　　ج) $۳^{\frac{۳}{۵}} \times ۳^{\frac{۵}{۷}}$

چ) $۲^{\frac{۶}{۸}} \times ۴^{\frac{۲}{۳}}$

(صفحه‌ی ۶۱- کار در کلاس- مکمل و مشابه تمرین ۱)

الف) گنبدکاووس- غیر دولتی صباح- دی ۹۵
ب) بابل- عفاف- دی ۹۵
پ) شیراز- غیر دولتی امام رضا- دی ۹۵
ت) بناب- نمونه دولتی شهید چمران- دی ۹۵
ث) سیرجان- نمونه دولتی اندیشه- دی ۹۵
ج) بیجار- نمونه دولتی شهید رجایی- دی ۹۵
چ) سیرجان- شاهد- دی ۹۵
(۱۷ تکرار)

۱۷۶. هر یک از رادیکال‌های زیر را در صورت امکان به صورت اعداد با توان کسری بنویسید.

الف) $\sqrt[۵]{۲^{۳}}$　　ب) $\sqrt[۶]{(\sqrt{۵}-۲)^{۳}}$

پ) $\sqrt[۵]{-۲۷}$　　ت) $\dfrac{\sqrt[۳]{۹} \times ۳^{۲}}{\sqrt{۲۷} \times ۸۱}$

ث) $\sqrt{\sqrt[۳]{-۲}}$

(صفحه‌ی ۶۱- کار در کلاس- مکمل و مشابه تمرین ۲)

الف) بابل- عفاف- دی ۹۵
ب) بجنورد- شاهد نجابت- دی ۹۵
پ) بردسیر- شایستگان- دی ۹۵
ت) اصفهان- غیر دولتی شیخ انصاری- دی ۹۵
ث) دزفول- شهید باهنر- دی ۹۵
(۸ تکرار)

۱۷۷. در جاهای خالی علامت مناسب $(< = >)$ قرار دهید.

الف) $۲^{\frac{۳}{۴}} \bigcirc ۳^{\frac{۳}{۴}}$　　ب) $\left(\frac{۳}{۴}\right)^{\frac{-۱}{۲}} \bigcirc \left(\frac{۳}{۴}\right)^{\frac{-۲}{۵}}$

پ) $\sqrt[۹]{\left(\frac{-۱}{۲۷}\right)^{-۳}} \bigcirc -(۹)^{\frac{۱}{۲}}$

(صفحه‌ی ۶۱- مرتبط با تمرین ۲)

الف) اهواز- غیر دولتی شهید ابراهیمی- دی ۹۵
ب) تهران- روشنگران- دی ۹۵
پ) تهران- صدیقه رودباری- دی ۹۵
(۵ تکرار)

فرمول‌های ریشه‌ی n ام

۱۷۸. حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $\sqrt{\sqrt[۳]{۹} \times \sqrt{۹}}$　　ب) $\sqrt[۳]{۴} \times \sqrt[۴]{۸} \times \sqrt[۱۲]{۱۲۸}$

پ) $\sqrt[۳]{\sqrt[۴]{۱۰^{۱۵}}} \div \sqrt[۶]{\sqrt{۱۰^{۳}}}$　　ت) $\dfrac{(\sqrt[۵]{۲۷})^{\frac{۱}{۶}} + \sqrt[۱۵]{\sqrt{۲۷}}}{(\sqrt[۳]{۳})^{\frac{۳}{۱۰}}}$

ث) $\sqrt{۲} \times \sqrt[۳]{۳}$

(صفحه‌ی ۶۱- مکمل و مرتبط با تمرین‌های ۲ و ۳)

الف) تهران- نمونه دولتی نظام مافی- دی ۹۵
ب) سنندج- زانیاران- دی ۹۵
پ) بجنورد- دانش- دی ۹۵
ت) شهریار- نمونه دولتی عزیزاله پزشکی- دی ۹۵
ث) خمینی شهر- شهید ثارا...- دی ۹۵
(۱۶ تکرار)

۱۷۹. از رابطه‌ی زیر، مقدار x را به‌دست آورید.　$x\sqrt{x} = \sqrt[۵]{۴}$

(صفحه‌ی ۶۰- مکمل و مرتبط با فعالیت ۲)

گرمسار- شهید ثانی- دی ۹۵
(۵ تکرار)

۱۸۰. از معادله‌ی $\dfrac{۸^{\frac{۱}{۳}} \times \sqrt{۳۲}}{\sqrt[۵]{۱۶}} = \sqrt[۱۰]{x^{۹}}$ ، مقدار x را به‌دست آورید.

(صفحه‌ی ۶۰- مکمل و مرتبط با فعالیت ۲)

عجب شیر- نمونه دولتی تربیت- دی ۹۵
(۴ تکرار)

پاسخ‌نامه‌ی فصل سوم

پاسخ تشریحی: حسین حاجیلو

۱۵۱.

الف) نادرست؛ همه‌ی عددهای منفی ریشه‌ی سوم دارند، مثلاً $-۸ = (-۲)^۳$، پس $\sqrt[۳]{-۸} = -۲$.

ب) نادرست؛ زیرا $\sqrt{(-۳)^۲} = \sqrt{۹} = ۳$، اما عددی وجود ندارد که توان دوم آن برابر (-۳) شود، بنابراین $\sqrt{-۳}$ و در نتیجه $(\sqrt{-۳})^۲$ تعریف نشده است.

پ) درست.

ت) نادرست؛ ریشه‌ی سوم سه عدد ۱، ۰ و ۱− با خودشان برابر است.

۱۵۲.

الف) باید عددهای مربع کامل، بلافاصله قبل و بلافاصله بعد از عدد ۱۰ را پیدا کنیم:

$$۳^۲ = ۹ \, , \, ۴^۲ = ۱۶$$
$$۹ < ۱۰ < ۱۶ \Rightarrow \sqrt{۹} < \sqrt{۱۰} < \sqrt{۱۶}$$
$$\Rightarrow \sqrt{۳^۲} < \sqrt{۱۰} < \sqrt{۴^۲} \Rightarrow ۳ < \sqrt{۱۰} < ۴$$

ب) باید عددهای مربع کامل، بلافاصله قبل و بلافاصله بعد از ۷۵ را پیدا کنیم:

$$۸^۲ = ۶۴ \, , \, ۹^۲ = ۸۱$$
$$۶۴ < ۷۵ < ۸۱ \Rightarrow \sqrt{۶۴} < \sqrt{۷۵} < \sqrt{۸۱}$$
$$\Rightarrow \sqrt{۸^۲} < \sqrt{۷۵} < \sqrt{۹^۲} \Rightarrow ۸ < \sqrt{۷۵} < ۹$$

پ) ابتدا عدد ۷ را به زیر رادیکال می‌بریم:

$$۷\sqrt{۳} = \sqrt{۷^۲} \times \sqrt{۳} = \sqrt{۷^۲ \times ۳} = \sqrt{۴۹ \times ۳} = \sqrt{۱۴۷}$$

پس باید عددهای مربع کامل، بلافاصله قبل و بلافاصله بعد از ۱۴۷ را پیدا کنیم:

$$۱۲^۲ = ۱۴۴ \, , \, ۱۳^۲ = ۱۶۹$$
$$۱۴۴ < ۱۴۷ < ۱۶۹ \Rightarrow \sqrt{۱۴۴} < \sqrt{۱۴۷} < \sqrt{۱۶۹}$$
$$\Rightarrow \sqrt{۱۲^۲} < \sqrt{۱۴۷} < \sqrt{۱۳^۲} \Rightarrow ۱۲ < \sqrt{۱۴۷} < ۱۳$$
$$\Rightarrow -۱۳ < -\sqrt{۱۴۷} < -۱۲ \Rightarrow -۱۳ < -۷\sqrt{۳} < -۱۲$$

ت) باید عددهای مکعب کامل، بلافاصله قبل و بلافاصله بعد از ۵۶ را پیدا کنیم:

$$۳^۳ = ۲۷ \, , \, ۴^۳ = ۶۴$$
$$۲۷ < ۵۶ < ۶۴ \Rightarrow \sqrt[۳]{۲۷} < \sqrt[۳]{۵۶} < \sqrt[۳]{۶۴}$$
$$\Rightarrow \sqrt[۳]{۳^۳} < \sqrt[۳]{۵۶} < \sqrt[۳]{۴^۳} \Rightarrow ۳ < \sqrt[۳]{۵۶} < ۴$$

ث) از آنجا که $-۱ < -۰/۰۱ < ۰$، داریم:

$$\sqrt[۳]{-۱} < \sqrt[۳]{-۰/۰۱} < \sqrt[۳]{۰} \Rightarrow -۱ < \sqrt[۳]{-۰/۰۱} < ۰$$

ج) ابتدا عددهای مکعب کامل، بلافاصله قبل و بلافاصله بعد از ۲۵ را پیدا می‌کنیم:

$$۲^۳ = ۸ \, , \, ۳^۳ = ۲۷$$
$$۸ < ۲۵ < ۲۷ \Rightarrow \sqrt[۳]{۸} < \sqrt[۳]{۲۵} < \sqrt[۳]{۲۷}$$
$$\Rightarrow \sqrt[۳]{۲^۳} < \sqrt[۳]{۲۵} < \sqrt[۳]{۳^۳} \Rightarrow ۲ < \sqrt[۳]{۲۵} < ۳$$
$$\Rightarrow ۲-۲ < \sqrt[۳]{۲۵}-۲ < ۳-۲ \Rightarrow ۰ < \sqrt[۳]{۲۵}-۲ < ۱$$

۱۵۳. از آنجا که $\sqrt{x}$ همواره عددی غیر منفی است، نامعادله‌های $-۲ \le \sqrt{x} \le ۷$ را می‌توان به‌صورت $۰ \le \sqrt{x} \le ۷$ نوشت که در این‌صورت:

$$۰ \le \sqrt{x} \le ۷ \Rightarrow ۰^۲ \le (\sqrt{x})^۲ \le ۷^۲ \Rightarrow ۰ \le x \le ۴۹$$

که عددهای صحیح ۰ , ۱ , ۲ , ... , ۴۸ , ۴۹ در این نامعادله‌ها صدق می‌کنند و تعداد آنها پنجاه تاست.

۱۵۴.

الف) ابتدا توجه کنید که:

$$\begin{cases} ۴^۲ = ۱۶ \\ ۵^۲ = ۲۵ \end{cases} \text{و } ۱۶ < ۱۸ < ۲۵ \Rightarrow \sqrt{۱۶} < \sqrt{۱۸} < \sqrt{۲۵}$$
$$\Rightarrow ۴ < \sqrt{۱۸} < ۵$$

همچنین داریم $\begin{cases} ۱۸-۱۶ = ۲ \\ ۲۵-۱۸ = ۷ \end{cases}$، یعنی ۱۸ به ۱۶ نزدیکتر است تا به ۲۵، پس برای محاسبه‌ی $\sqrt{۱۸}$ تا یک رقم اعشار، به‌عنوان حدس اولیه، دو مقدار ۴/۲ و ۴/۳ را امتحان می‌کنیم:

$$\begin{cases} (۴/۲)^۲ = ۱۷/۶۴ \\ (۴/۳)^۲ = ۱۸/۴۹ \end{cases}$$

از آنجا که $(۴/۲)^۲$ به ۱۸ نزدیکتر است، می‌توان گفت $\sqrt{۱۸} \simeq ۴/۲$.

ب) ابتدا توجه کنید که:

$$\begin{cases} ۵^۲ = ۲۵ \\ ۶^۲ = ۳۶ \end{cases} \text{و } ۲۵ < ۲۷ < ۳۶ \Rightarrow \sqrt{۲۵} < \sqrt{۲۷} < \sqrt{۳۶}$$
$$\Rightarrow ۵ < \sqrt{۲۷} < ۶$$

همچنین داریم $\begin{cases} ۲۷-۲۵ = ۲ \\ ۳۶-۲۷ = ۹ \end{cases}$، یعنی ۲۷ به ۲۵ نزدیکتر است تا به ۳۶، پس به‌عنوان حدس اولیه برای محاسبه‌ی $\sqrt{۲۷}$ تا یک رقم اعشار، دو مقدار ۵/۱ و ۵/۲ را امتحان می‌کنیم:

$$\begin{cases} (۵/۱)^۲ = ۲۶/۰۱ \\ (۵/۲)^۲ = ۲۷/۰۴ \end{cases}$$

از آنجا که $(۵/۲)^۲$ به ۲۷ نزدیکتر است، پس می‌توان گفت $\sqrt{۲۷} \simeq ۵/۲$.

پ) ابتدا توجه کنید که

$$\begin{cases} ۲^۳ = ۸ \\ ۳^۳ = ۲۷ \end{cases} \text{و } ۸ < ۱۰ < ۲۷ \Rightarrow \sqrt[۳]{۸} < \sqrt[۳]{۱۰} < \sqrt[۳]{۲۷}$$
$$\Rightarrow ۲ < \sqrt[۳]{۱۰} < ۳$$

همچنین داریم $\begin{cases}۱۰-۸=۲\\ ۲۷-۱۰=۱۷\end{cases}$، یعنی ۱۰ به ۸ نزدیکتر است تا به ۲۷، پس به‌عنوان حدس اولیه برای محاسبه‌ی $\sqrt[۳]{۱۰}$ تا یک رقم اعشار، دو مقدار ۲/۱ و ۲/۲ را امتحان می‌کنیم:

$$\begin{cases}(۲/۱)^۳=۹/۲۶۱\\ (۲/۲)^۳=۱۰/۶۴۸\end{cases}$$

از آنجا که $(۲/۲)^۳$ به ۱۰ نزدیکتر است، می‌توان گفت $\sqrt[۳]{۱۰}\simeq ۲/۲$.

ت) ابتدا توجه کنید که

$$\begin{cases}۲^۳=۸\\ ۳^۳=۲۷\end{cases} \text{ و } ۸<۲۰<۲۷\Rightarrow \sqrt[۳]{۸}<\sqrt[۳]{۲۰}<\sqrt[۳]{۲۷}$$

$$\Rightarrow ۲<\sqrt[۳]{۲۰}<۳$$

همچنین داریم $\begin{cases}۲۰-۸=۱۲\\ ۲۷-۲۰=۷\end{cases}$، یعنی ۲۰ به ۲۷ نزدیکتر است تا به ۸، پس برای محاسبه‌ی $\sqrt[۳]{۲۰}$ تا یک رقم اعشار، دو مقدار ۲/۷ و ۲/۸ را امتحان می‌کنیم:

$$\begin{cases}(۲/۷)^۳=۱۹/۶۸۳\\ (۲/۸)^۳=۲۱/۹۵۲\end{cases}$$

از آنجا که $(۲/۷)^۳$ به ۲۰ نزدیکتر است، می‌توان گفت $\sqrt[۳]{۲۰}\simeq ۲/۷$.

۱۵۵. مشخص می‌کنیم که هر کدام از این اعداد بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار دارند. در مورد ریشه‌های دوم داریم:

$$\begin{cases}۲^۲=۴\\ ۳^۲=۹\end{cases} \text{ و } ۴<۸<۹\Rightarrow \sqrt{۴}<\sqrt{۸}<\sqrt{۹}$$

$$\Rightarrow ۲<\sqrt{۸}<۳\Rightarrow ۲<\mathbf{A}<۳$$

$$\begin{cases}۳^۲=۹\\ ۴^۲=۱۶\end{cases} \text{ و } ۹<۱۰<۱۶\Rightarrow \sqrt{۹}<\sqrt{۱۰}<\sqrt{۱۶}$$

$$\Rightarrow ۳<\sqrt{۱۰}<۴\Rightarrow ۳<\mathbf{B}<۴$$

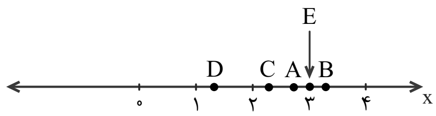
$$\begin{cases}۱^۳=۱\\ ۲^۳=۸\\ ۳^۳=۲۷\end{cases} \text{ و } \begin{cases}۱<۳<۸\\ ۸<۱۰<۲۷\end{cases}\Rightarrow \begin{cases}\sqrt[۳]{۱}<\sqrt[۳]{۳}<\sqrt[۳]{۸}\\ \sqrt[۳]{۸}<\sqrt[۳]{۱۰}<\sqrt[۳]{۲۷}\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}۱<\sqrt[۳]{۳}<۲\Rightarrow ۱<\mathbf{D}<۲\\ ۲<\sqrt[۳]{۱۰}<۳\Rightarrow ۲<\mathbf{C}<۳\end{cases}$$

$$۳^۳=۲۷\Rightarrow \sqrt[۳]{۲۷}=۳\Rightarrow \mathbf{E}=۳$$

با توجه به توضیحات داده شده می‌توان گفت:

$$۱<\mathbf{D}<۲<\mathbf{C}<\mathbf{A}<\mathbf{E}=۳<\mathbf{B}$$



توضیح آنکه $\mathbf{A}=\sqrt{۸}$ و $\mathbf{C}=\sqrt[۳]{۱۰}$ هر دو بین دو و سه قرار دارند، اما ۸ به $۳^۲=۹$ نزدیکتر است و ۱۰ به $۲^۳=۸$، پس $\sqrt{۸}$ به ۳ و $\sqrt[۳]{۱۰}$ به ۲ نزدیکتر است.

۱۵۶.

الف)

$$۷<\sqrt{\mathbf{x}}<۸\Rightarrow ۷^۲<(\sqrt{\mathbf{x}})^۲<۸^۲\Rightarrow ۴۹<\mathbf{x}<۶۴$$

پس هر عددی بزرگتر از ۴۹ و کوچکتر از ۶۴ می‌تواند در جای خالی قرار بگیرد، مثلاً ۵۰، ۵۵ و ۶۰.

ب)

$$۳<\sqrt[۳]{\mathbf{y}}<۴\Rightarrow ۳^۳<(\sqrt[۳]{\mathbf{y}})^۳<۴^۳\Rightarrow ۲۷<\mathbf{y}<۶۴$$

پس هر عددی بزرگتر از ۲۷ و کوچکتر از ۶۴ می‌تواند در جای خالی قرار بگیرد، مثلاً ۳۰، ۴۰ و ۵۰.

۱۵۷. می‌دانیم اگر عددی بین صفر و یک در عدد مثبت $\mathbf{a}$ ضرب شود، حاصل عددی کوچکتر از $\mathbf{a}$ می‌شود، بنابراین برای عدد $۰<\mathbf{a}<۱$ داریم $\mathbf{a}^۳<\mathbf{a}^۲<\mathbf{a}$، در نتیجه برای ریشه‌های عدد $۰<\mathbf{a}<۱$ داریم $\mathbf{a}<\sqrt{\mathbf{a}}<\sqrt[۳]{\mathbf{a}}$، با این توضیحات می‌توان گفت اگر $۰<\mathbf{a}<۱$، آنگاه $\mathbf{a}^۳<\mathbf{a}^۲<\mathbf{a}<\sqrt{\mathbf{a}}<\sqrt[۳]{\mathbf{a}}$.

به‌عنوان مثال عدد $\mathbf{a}=\left(\frac{۱}{۲}\right)^۶$ را در نظر بگیرید:

$$\mathbf{a}^۳=\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۱۸}=\frac{۱}{۲^{۱۸}}$$

$$\mathbf{a}^۲=\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۱۲}=\frac{۱}{۲^{۱۲}}$$

$$\mathbf{a}=\left(\frac{۱}{۲}\right)^۶=\frac{۱}{۲^۶}$$

$$\sqrt{\mathbf{a}}=\sqrt{\left(\frac{۱}{۲}\right)^۶}=\frac{۱}{۲^۳}$$

$$\sqrt[۳]{\mathbf{a}}=\sqrt[۳]{\left(\frac{۱}{۲}\right)^۶}=\frac{۱}{۲^۲}$$

$$\frac{۱}{۲^{۱۸}}<\frac{۱}{۲^{۱۲}}<\frac{۱}{۲^۶}<\frac{۱}{۲^۳}<\frac{۱}{۲^۲}$$

$$\Rightarrow \mathbf{a}^۳<\mathbf{a}^۲<\mathbf{a}<\sqrt{\mathbf{a}}<\sqrt[۳]{\mathbf{a}}$$

۱۵۸. می‌دانیم اگر عددی بین صفر و یک در عدد مثبت $\mathbf{a}$ ضرب شود، حاصل، عددی کوچکتر از $\mathbf{a}$ می‌شود، بنابراین برای عدد $۰<\mathbf{a}<۱$ داریم $\mathbf{a}^۳<\mathbf{a}^۲<\mathbf{a}$. در نتیجه برای ریشه‌های عدد $۰<\mathbf{a}<۱$ داریم $\mathbf{a}<\sqrt{\mathbf{a}}<\sqrt[۳]{\mathbf{a}}$.

با این توضیحات می‌توان گفت اگر $۰ < a < ۱$، داریم:

$$a < \sqrt{a} \Rightarrow a - \sqrt{a} < ۰$$
$$\Rightarrow |a - \sqrt{a}| = -(a - \sqrt{a}) = \sqrt{a} - a$$
$$a < \sqrt[۳]{a} \Rightarrow a - \sqrt[۳]{a} < ۰$$
$$\Rightarrow |a - \sqrt[۳]{a}| = -(a - \sqrt[۳]{a}) = \sqrt[۳]{a} - a$$
$$\sqrt{a} < \sqrt[۳]{a} \Rightarrow \sqrt{a} - \sqrt[۳]{a} < ۰$$
$$\Rightarrow |\sqrt{a} - \sqrt[۳]{a}| = -(\sqrt{a} - \sqrt[۳]{a}) = \sqrt[۳]{a} - \sqrt{a}$$
$$A = (\sqrt{a} - a) - (\sqrt[۳]{a} - a) + (\sqrt[۳]{a} - \sqrt{a}) = ۰$$

۱۵۹.

الف) توجه کنید که $۱۰^{-۳} = ۰/۰۰۱$، پس:

$$\sqrt[۳]{-۰/۰۰۱} = \sqrt[۳]{-۱۰^{-۳}} = \sqrt[۳]{(-۱۰^{-۱})^۳} = -۱۰^{-۱} = -۰/۱$$
$$\Rightarrow \sqrt[۳]{-۰/۰۰۱} = -۰/۱$$

ب) ابتدا توجه کنید که اگر عددی بزرگتر از یک در عدد مثبت a ضرب شود، حاصل عددی بزرگتر از a می‌شود، بنابراین برای عدد $a > ۱$ داریم $a < a^۲ < a^۳$، در نتیجه برای ریشه‌های عدد $a > ۱$ داریم $\sqrt[۳]{a} < \sqrt{a} < a$. می‌دانیم $۱^۲ < ۲ < ۲^۲$، پس $۱ < \sqrt{۲} < ۲$، از طرفی می‌دانیم که اگر $a > ۱$، آنگاه $\sqrt{a} < a$، پس با در نظر گرفتن $a = \sqrt{۲}$، داریم $\sqrt{\sqrt{۲}} < \sqrt{۲}$.

پ) داریم $۲^۲ < ۵ < ۳^۲$، پس $۲ < \sqrt{۵} < ۳$ و همچنین $۱^۳ < ۶ < ۲^۳$، پس $۱ < \sqrt[۳]{۶} < ۲$، پس $\sqrt{۵} > \sqrt[۳]{۶}$.

۱۶۰.

الف) می‌دانیم $\sqrt{u^۲} = |u|$، پس:

$$\sqrt{(۱ - \sqrt{۲})^۲} = |۱ - \sqrt{۲}| = -(۱ - \sqrt{۲}) = \sqrt{۲} - ۱$$

دقت کنید که $\sqrt{۲} \simeq ۱/۴$، پس $۱ - \sqrt{۲} < ۰$.

ب) می‌دانیم $\sqrt{u^۲} = |u|$ و $\sqrt[۳]{u^۳} = u$، پس:

$$\sqrt[۳]{\sqrt{۶۴}} = \sqrt[۳]{\sqrt{۸^۲}} = \sqrt[۳]{۸} = \sqrt[۳]{۲^۳} = ۲$$

پ)

$$\sqrt[۳]{۳^۶ \times ۵^۶} = \sqrt[۳]{((۳ \times ۵)^۲)^۳} = (۳ \times ۵)^۲ = ۱۵^۲ = ۲۲۵$$

ت)

$$\begin{cases} \sqrt{(-۳)^۲} = |-۳| = ۳ \\ \sqrt[۳]{(-۵)^۳} = -۵ \end{cases}$$
$$\Rightarrow \sqrt{(-۳)^۲} - \sqrt[۳]{(-۵)^۳} = ۳ - (-۵) = ۸$$

ث)

$$\sqrt{\sqrt{۸۱}} = \sqrt{\sqrt{۹^۲}} = \sqrt{۹} = \sqrt{۳^۲} = ۳$$
$$\sqrt{\sqrt[۳]{۶۴}} = \sqrt{\sqrt[۳]{۴^۳}} = \sqrt{۴} = \sqrt{۲^۲} = ۲$$
$$\Rightarrow \sqrt{\sqrt{۸۱}} + \sqrt{\sqrt[۳]{۶۴}} = ۳ + ۲ = ۵$$

ج) می‌دانیم اگر a و b دو عدد مثبت باشند، آنگاه:

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$$

پس:

$$\begin{cases} \sqrt{۱۲۸} = \sqrt{۲^۷} = \sqrt{۲^۶ \times ۲} = ۲^۳\sqrt{۲} = ۸\sqrt{۲} \\ \sqrt{۵۱۲} = \sqrt{۲^۹} = \sqrt{۲^۸ \times ۲} = ۲^۴\sqrt{۲} = ۱۶\sqrt{۲} \\ \sqrt{۳۲} = \sqrt{۲^۵} = \sqrt{۲^۴ \times ۲} = ۲^۲\sqrt{۲} = ۴\sqrt{۲} \end{cases}$$
$$\Rightarrow \sqrt{۱۲۸} + ۲\sqrt{۵۱۲} - ۳\sqrt{۳۲}$$
$$= ۸\sqrt{۲} + ۲ \times ۱۶\sqrt{۲} - ۳ \times ۴\sqrt{۲} = ۲۸\sqrt{۲}$$

چ) می‌دانیم که برای هر دو عدد دلخواه a و b

$$\sqrt[۳]{ab} = \sqrt[۳]{a}\sqrt[۳]{b}$$

پس:

$$\begin{cases} \sqrt[۳]{۸۱} = \sqrt[۳]{۳^۴} = \sqrt[۳]{۳^۳ \times ۳} = ۳\sqrt[۳]{۳} \\ \sqrt[۳]{-۲۴} = \sqrt[۳]{-۸ \times ۳} = \sqrt[۳]{(-۲)^۳ \times ۳} = -۲\sqrt[۳]{۳} \\ \sqrt[۳]{۲۷} = \sqrt[۳]{۳^۳} = ۳ \end{cases}$$
$$\Rightarrow \sqrt[۳]{۸۱} - \sqrt[۳]{-۲۴} + \sqrt[۳]{۲۷} = ۳\sqrt[۳]{۳} + ۲\sqrt[۳]{۳} + ۳ = ۵\sqrt[۳]{۳} + ۳$$

ح)

$$\sqrt{۱۲} = \sqrt{۴ \times ۳} = \sqrt{۲^۲ \times ۳} = ۲\sqrt{۳}$$
$$\sqrt{۷۵} = \sqrt{۲۵ \times ۳} = \sqrt{۵^۲ \times ۳} = ۵\sqrt{۳}$$
$$\sqrt[۳]{\sqrt{۷۲۹}} = \sqrt[۳]{\sqrt{۳^۶}} = \sqrt[۳]{۳^۳} = ۳$$
$$\sqrt{۴۸} = \sqrt{۱۶ \times ۳} = \sqrt{۴^۲ \times ۳} = ۴\sqrt{۳}$$
$$\Rightarrow ۲\sqrt{۱۲} + ۳\sqrt{۷۵} + ۲\sqrt[۳]{\sqrt{۷۲۹}} + ۲\sqrt{۴۸}$$
$$= ۴\sqrt{۳} + ۱۵\sqrt{۳} + ۶ + ۸\sqrt{۳} = ۲۷\sqrt{۳} + ۶$$

۱۶۱.

الف) هر دو عدد مثبت دارای دو ریشه‌ی چهارم است که قرینه‌ی یکدیگرند.

ب) هر دو عدد دارای یک ریشه‌ی پنجم است که اگر عدد مثبت باشد، ریشه‌ی پنجم آن مثبت و اگر عدد منفی باشد، ریشه‌ی پنجم آن منفی است.

پ) اعداد ۳ و -۳ ریشه‌های چهارم عدد $۳^۴ = ۸۱$ هستند.

ت) ریشه‌ی پنجم عدد $\frac{-۱}{۳۲}$ برابر است با $\frac{-۱}{۲}$.

توضیح آنکه $\frac{-۱}{۳۲} = \frac{-۱}{۲^۵} = \left(\frac{-۱}{۲}\right)^۵$، پس:

$$\sqrt[۵]{\frac{-۱}{۳۲}} = \sqrt[۵]{\left(\frac{-۱}{۲}\right)^۵} = -\frac{۱}{۲}$$

۱۶۲.

الف) نادرست؛ هر عدد مثبت دو ریشه‌ی چهارم دارد که از نماد $\sqrt[۴]{\ }$، فقط برای نشان دادن ریشه‌ی چهارم مثبت استفاده می‌کنیم، بنابراین $۳ = \sqrt[۴]{۳^۴} = \sqrt[۴]{۸۱}$.

ب) درست؛ زیرا:

$$\sqrt[۳]{۰/۰۲۷} = \sqrt[۳]{(۰/۳)^۳} = ۰/۳$$
$$\sqrt[۴]{۰/۰۰۸۱} = \sqrt[۴]{(۰/۳)^۴} = ۰/۳$$

پ) نادرست؛ به‌عنوان مثال داریم:

$$\sqrt[۴]{(-۱)^۴} = \sqrt[۴]{۱} = ۱$$

دقت کنید که $\sqrt[۴]{a^۴} = |a|$

ت) نادرست؛ اعداد منفی ریشه‌ی چهارم ندارند، زیرا هیچ عددی را نمی‌توان یافت که چهار بار در خودش ضرب شود و عدد حاصل منفی شود، بنابراین $\sqrt[۴]{-۲}$ تعریف نشده است و در نتیجه $(\sqrt[۴]{-۲})^۴$ نیز تعریف نشده است و نمی‌تواند با عددی برابر باشد.

ث) درست؛ زیرا

$$\sqrt[۳]{-۳}\times\sqrt[۳]{-۹} = \sqrt[۳]{(-۳)\times(-۹)} = \sqrt[۳]{۲۷} = \sqrt[۳]{۳^۳} = ۳$$
$$\sqrt[۴]{(-۳)^۴} = \sqrt[۴]{۸۱} = \sqrt[۴]{۳^۴} = ۳$$
$$\Rightarrow \sqrt[۳]{-۳}\times\sqrt[۳]{-۹}\times\sqrt[۴]{(-۳)^۴} = ۳\times۳ = ۹$$

۱۶۳.

الف)

$$\sqrt[۴]{(-۳)^۸} = \sqrt[۴]{((-۳)^۲)^۴} = \sqrt[۴]{۹^۴} = ۹$$

ب)

$$\sqrt[۵]{-۰/۰۰۰۳۲} = \sqrt[۵]{(-۰/۲)^۵} = -۰/۲$$

پ)

$$\sqrt[۴]{۱۶}\times\sqrt[۴]{۸۱} = \sqrt[۴]{۲^۴}\times\sqrt[۴]{۳^۴} = ۲\times۳ = ۶$$

ت)

$$\sqrt[۵]{(۱-\sqrt{۳})^۵} = ۱-\sqrt{۳}$$

ث)

$$\begin{cases}\sqrt[۴]{۸۱} = \sqrt[۴]{۳^۴} = ۳\\ \sqrt[۳]{-۲۷} = \sqrt[۳]{(-۳)^۳} = -۳\end{cases}$$
$$\Rightarrow \sqrt[۴]{۸۱} - \sqrt[۳]{-۲۷} = ۳-(-۳) = ۶$$

۱۶۴. می‌دانیم که اگر عددی بین صفر و یک در عدد مثبت a ضرب شود، حاصل کوچکتر از a خواهد بود، بنابراین برای عدد $۰<a<۱$ داریم $a>a^۲>a^۳>a^۴>a^۵$، بنابراین در مورد ریشه‌های آن می‌توان گفت که اگر a عددی بین صفر و یک باشد، آنگاه $\sqrt[۵]{a}<\sqrt[۴]{a}<\sqrt[۳]{a}<\sqrt{a}<a$ پس با توجه به محورها، می‌توان گفت $a_۲=\sqrt[۳]{a}$ ، $a_۳=\sqrt[۴]{a}$ و $a_۴=\sqrt[۵]{a}$.

همچنین می‌دانیم که هر عدد مثبت دو ریشه‌ی دوم قرینه و نیز دو ریشه‌ی چهارم قرینه دارد. پس از آنجا که $a_۱$ منفی است، می‌توان گفت $a_۱$ نیز ریشه‌ی چهارم a است؛ به‌عبارت دیگر $a_۱=-\sqrt[۴]{a}$.

۱۶۵.

الف) می‌دانیم $۳^۴=۸۱$، $۲^۴=۱۶$ و $۱۶<۳۷<۸۱$، پس:

$$\sqrt[۴]{۱۶}<\sqrt[۴]{۳۷}<\sqrt[۴]{۸۱}\Rightarrow\sqrt[۴]{۲^۴}<\sqrt[۴]{۳۷}<\sqrt[۴]{۳^۴}$$
$$\Rightarrow ۲<\sqrt[۴]{۳۷}<۳$$

ب) می‌دانیم $۲^۵=۳۲$، $۳^۵=۲۴۳$ و $۳۲<۲۰۰<۲۴۳$، پس:

$$\sqrt[۵]{۳۲}<\sqrt[۵]{۲۰۰}<\sqrt[۵]{۲۴۳}\Rightarrow\sqrt[۵]{۲^۵}<\sqrt[۵]{۲۰۰}<\sqrt[۵]{۳^۵}$$
$$\Rightarrow ۲<\sqrt[۵]{۲۰۰}<۳$$

پ) می‌دانیم $(-۳)^۵=-۲۴۳$، $(-۴)^۵=-۱۰۲۴$ و $-۱۰۲۴<-۳۰۰<-۲۴۳$، پس:

$$\sqrt[۵]{-۱۰۲۴}<\sqrt[۵]{-۳۰۰}<\sqrt[۵]{-۲۴۳}$$
$$\Rightarrow\sqrt[۵]{(-۴)^۵}<\sqrt[۵]{-۳۰۰}<\sqrt[۵]{(-۳)^۵}$$
$$\Rightarrow -۴<\sqrt[۵]{-۳۰۰}<-۳$$

۱۶۶.

الف) اگر $a>۱$ باشد آنگاه $a<a^۲<a^۳<a^۴<a^۵$، $\sqrt[۵]{a}<\sqrt[۴]{a}<\sqrt[۳]{a}<\sqrt{a}<a$.

با توضیح بالا از آنجا که $۳>۱$، داریم $\sqrt[۳]{۳}>\sqrt[۵]{۳}$.

ب) داریم $(۰/۱)^۴=۰/۰۰۰۱$، پس $\sqrt[۴]{۰/۰۰۰۱}=۰/۱$.

پ) می‌دانیم اگر عددی بین صفر و یک در عدد مثبت a ضرب شود، حاصل عددی کوچکتر از a می‌شود، پس برای عدد $۰<a<۱$ داریم $a>a^۲>a^۳>a^۴>a^۵$، در نتیجه برای ریشه‌های عدد $۰<a<۱$، داریم:

$$\sqrt[۵]{a}>\sqrt[۴]{a}>\sqrt[۳]{a}>\sqrt{a}>a$$

با توضیح بالا می‌توان گفت:

$$۰<\frac{۱}{۲}<۱\Rightarrow\sqrt[۳]{\frac{۱}{۲}}<\sqrt[۵]{\frac{۱}{۲}}\xrightarrow{\times(-۱)}-\sqrt[۳]{\frac{۱}{۲}}>-\sqrt[۵]{\frac{۱}{۲}}\quad(*)$$

از آنجا که $-\sqrt[۳]{a}=\sqrt[۳]{-a}$ و $-\sqrt[۵]{a}=\sqrt[۵]{-a}$، از نامساوی $(*)$ نتیجه می‌شود:

$$\sqrt[۳]{-\frac{۱}{۲}}>\sqrt[۵]{-\frac{۱}{۲}}$$

ت) اگر $a>۱$ داریم:

$$\sqrt[۵]{a}<\sqrt[۴]{a}<\sqrt[۳]{a}<\sqrt{a}<a$$

از آنجا که $۱۰۰>۱$، داریم:

$$\sqrt[۵]{۱۰۰}<\sqrt[۳]{۱۰۰}\xrightarrow{\times(-۱)}-\sqrt[۵]{۱۰۰}>-\sqrt[۳]{۱۰۰}\quad(*)$$

از آنجا که $-\sqrt[۳]{a}=\sqrt[۳]{-a}$ و $-\sqrt[۵]{a}=\sqrt[۵]{-a}$، از نامساوی $(*)$ نتیجه می‌شود:

$$\sqrt[۵]{-۱۰۰}>\sqrt[۳]{-۱۰۰}$$

ث) می‌دانیم که برای عدد $a>۱$، داریم: $\sqrt[۴]{a}<\sqrt[۳]{a}$، پس از آنجا که $۲>۱$، داریم $\sqrt[۳]{۲}>\sqrt[۴]{۲}$.

ج) از آنجا که $۱۰^{-۶}$ عددی مثبت است، $\sqrt[۶]{۱۰^{-۶}}$ نیز عددی مثبت است و از آنجا که $-۲^{۳}$ عددی منفی است، $\sqrt[۵]{-۲^{۳}}$ نیز عددی منفی است و عدد مثبت از عدد منفی بزرگتر است، پس $\sqrt[۶]{۱۰^{-۶}}>\sqrt[۵]{-۲^{۳}}$.

چ) می‌دانیم که برای عدد $۰<a<۱$ داریم: $\sqrt[۴]{a}<\sqrt[۵]{a}$، پس از آنجا که $۰<۰/۵<۱$، پس $\sqrt[۴]{۰/۵}<\sqrt[۵]{۰/۵}$.

ح)

$$\sqrt[۴]{(-۴)^{۴}}=\sqrt[۴]{(-۱\times۴)^{۴}}=\sqrt[۴]{(-۱)^{۴}\times۴^{۴}}=\sqrt[۴]{۴^{۴}}=۴$$

$$\sqrt[۳]{۶۴}=\sqrt[۳]{۴^{۳}}=۴\Rightarrow\sqrt[۴]{(-۳)^{۴}}=\sqrt[۳]{۶۴}$$

۱۶۷.

الف) به‌عنوان مثال، عدد $a=۲^{۵}$ را در نظر می‌گیریم:

$$\sqrt[۵]{a}=\sqrt[۵]{۲^{۵}}=۲\Rightarrow a>\sqrt[۵]{a}$$

ب) به‌عنوان مثال، عدد $a=\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۱۵}$ را در نظر می‌گیریم:

$$\sqrt[۳]{a}=\sqrt[۳]{\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۱۵}}=\sqrt[۳]{\left(\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۵}\right)^{۳}}=\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۵}=\frac{۱}{۲^{۵}}=\frac{۱}{۳۲}$$

$$\sqrt[۵]{a}=\sqrt[۵]{\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۱۵}}=\sqrt[۵]{\left(\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۳}\right)^{۵}}=\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۳}=\frac{۱}{۲^{۳}}=\frac{۱}{۸}$$

$$\Rightarrow\sqrt[۳]{a}<\sqrt[۵]{a}$$

پ) به‌عنوان مثال، عدد $a=۲^{۲۰}$ را در نظر می‌گیریم:

$$\sqrt[۴]{a}=\sqrt[۴]{۲^{۲۰}}=\sqrt[۴]{(۲^{۵})^{۴}}=۲^{۵}=۳۲$$

$$\sqrt[۵]{a}=\sqrt[۵]{۲^{۲۰}}=\sqrt[۵]{(۲^{۴})^{۵}}=۲^{۴}=۱۶$$

$$\Rightarrow\sqrt[۴]{a}>\sqrt[۵]{a}$$

ت) به‌عنوان مثال، عدد $a=(-۲)^{۵}=-۳۲$ را در نظر می‌گیریم:

$$\sqrt[۵]{a}=\sqrt[۵]{(-۲)^{۵}}=-۲$$

$$a<\sqrt[۵]{a}$$

ث) به‌عنوان مثال، در نظر می‌گیریم $a=\left(\frac{-۱}{۲}\right)^{۱۵}$، داریم:

$$\sqrt[۵]{a}=\sqrt[۵]{\left(\frac{-۱}{۲}\right)^{۱۵}}=\sqrt[۵]{\left(\left(\frac{-۱}{۲}\right)^{۳}\right)^{۵}}=\left(\frac{-۱}{۲}\right)^{۳}=\frac{-۱}{۲^{۳}}=\frac{-۱}{۸}$$

$$\sqrt[۳]{a}=\sqrt[۳]{\left(\frac{-۱}{۲}\right)^{۱۵}}=\sqrt[۳]{\left(\left(\frac{-۱}{۲}\right)^{۵}\right)^{۳}}=\left(\frac{-۱}{۲}\right)^{۵}=\frac{-۱}{۲^{۵}}=\frac{-۱}{۳۲}$$

$$\frac{۱}{۸}>\frac{۱}{۳۲}\Rightarrow\frac{-۱}{۸}<\frac{-۱}{۳۲}\Rightarrow\sqrt[۵]{a}<\sqrt[۳]{a}$$

۱۶۸.

الف) عددهای مثبت ریشه‌ی زوج دارند که این ریشه‌ها قرینه‌ی یکدیگرند.

ب) اگر n زوج باشد، $\sqrt[n]{a^{n}}$ برابر $|a|$ است.

پ) ریشه‌ی هفتم -۱۲۸ برابر است با -۲.

توضیح آنکه $(-۲)^{۷}=-۱۲۸$، پس $\sqrt[۷]{-۱۲۸}=-۲$.

ت) عددهای منفی، ریشه‌ی زوج ندارند.

ث) عدد ۲ ریشه‌ی هفتم عدد ۱۲۸ است.

توضیح آنکه $۲^{۷}=۱۲۸$، پس عدد ۲، ریشه‌ی هفتم عدد ۱۲۸ است.

۱۶۹.

الف) نادرست؛ زیرا اگر n زوج باشد آنگاه $\sqrt[n]{a^{n}}=|a|$.

ب) درست؛ زیرا $-۸=(-۲)^{۳}$، پس عبارت به شکل $(\sqrt[۶]{-۸})^{۲}$ درمی‌آید که در آن عدد منفی زیر رادیکال با فرجه‌ی زوج قرار دارد که تعریف نشده است.

پ) نادرست؛ به‌عنوان مثال $\sqrt{۱+۴}\neq\sqrt{۱}+\sqrt{۴}$ ($\sqrt{۱}+\sqrt{۴}$ برابر ۳ است، اما $\sqrt{۱+۴}=\sqrt{۵}$ عددی بین ۲ و ۳ است).

ت) درست؛ ریشه‌ی سوم عددهای بزرگتر از یک از ریشه‌های هفتم آنها بزرگتر است.

ث) نادرست؛ به‌عنوان مثال $\sqrt{\frac{-۱}{-۴}}\neq\frac{\sqrt{-۱}}{\sqrt{-۴}}$ ($\sqrt{\frac{-۱}{-۴}}=\sqrt{\frac{۱}{۴}}=\frac{۱}{۲}$، اما $\sqrt{-۱}$ و $\sqrt{-۴}$ دو عبارت تعریف نشده‌اند و بنابراین $\frac{\sqrt{-۱}}{\sqrt{-۴}}$ هم تعریف نشده است).

۱۷۰.

الف) می‌دانیم اگر n عددی زوج باشد، آنگاه $\sqrt[n]{a^{n}}=|a|$، پس:

$$\sqrt[۶]{(۱-\sqrt{۲})^{۶}}=|۱-\sqrt{۲}|=-(۱-\sqrt{۲})=\sqrt{۲}-۱$$

دقت کنید که $\sqrt{۲}>۱$، پس $۱-\sqrt{۲}<۰$ و در نتیجه $|۱-\sqrt{۲}|=-(۱-\sqrt{۲})$.

ب) داریم $(۰/۱)^{۸}=۰/۰۰۰۰۰۰۰۱$، پس:

$$\sqrt[۸]{۰/۰۰۰۰۰۰۰۱}=\sqrt[۸]{(۰/۱)^{۸}}=۰/۱$$

پ) داریم $۲^{۷}=۱۲۸$، پس $\sqrt[۷]{۱۲۸}=۲$ و داریم:

$$\sqrt{۴^{۳}}\times\sqrt{۲\sqrt[۷]{۱۲۸}}=\sqrt{۴^{۳}}\times\sqrt{۲\times۲}$$

از طرفی برای دو عدد مثبت a و b داریم $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$، پس عبارت اخیر برابر است با:

$$\sqrt{۴^۳\times\underbrace{(۲\times۲)}_{۴^۱}}=\sqrt{۴^۴}=۴^۲=۱۶$$

ت) با فرض تعریف شده بودن رادیکال‌ها داریم $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$، پس:

$$\begin{cases}\sqrt[۷]{۳^{۱۵}}=\sqrt[۷]{۳^{۱۴}\times۳}=\sqrt[۷]{۳^{۱۴}}\times\sqrt[۷]{۳}=\sqrt[۷]{(۳^۲)^۷}\times\sqrt[۷]{۳}\\ \quad=۳^۲\sqrt[۷]{۳}=۹\sqrt[۷]{۳}\\ \sqrt[۷]{۳^۸}=\sqrt[۷]{۳^۷\times۳}=\sqrt[۷]{۳^۷}\times\sqrt[۷]{۳}=۳\sqrt[۷]{۳}\end{cases}$$

$$\Rightarrow ۵\sqrt[۷]{۳^{۱۵}}+۲\sqrt[۷]{۳}-۲\sqrt[۷]{۳^۸}=۵\times۹\sqrt[۷]{۳}+۲\sqrt[۷]{۳}-۶\sqrt[۷]{۳}$$
$$=۴۱\sqrt[۷]{۳}$$

ث) با فرض تعریف شده بودن رادیکال‌ها داریم $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$، پس:

$$\sqrt[۱۱]{۲\sqrt{۲}-۳}\times\sqrt[۱۱]{۳+۲\sqrt{۲}}=\sqrt[۱۱]{(۲\sqrt{۲}-۳)(۲\sqrt{۲}+۳)}$$
$$=\sqrt[۱۱]{(۲\sqrt{۲})^۲-۳^۲}=\sqrt[۱۱]{۸-۹}=\sqrt[۱۱]{-۱}=-۱$$

ج) داریم $\begin{cases}\sqrt[۵]{-۳۲}=\sqrt[۵]{(-۲)^۵}=-۲\\ \sqrt[۷]{۱۰^{-۷}}=\sqrt[۷]{(۱۰^{-۱})^۷}=\sqrt[۷]{\left(\frac{۱}{۱۰}\right)^۷}=\frac{۱}{۱۰}\end{cases}$، پس:

$$\sqrt[۵]{-۳۲}+۳\sqrt[۷]{۱۰^{-۷}}=-۲+۳\times\frac{۱}{۱۰}=-۲+۰/۳=-۱/۷$$

چ) می‌دانیم $\sqrt[۵]{a}\sqrt[۵]{b}=\sqrt[۵]{ab}$، پس:

$$\sqrt[۵]{-۲}\times\sqrt[۵]{۱۶}=\sqrt[۵]{-۲\times۱۶}=\sqrt[۵]{-۳۲}=\sqrt[۵]{(-۲)^۵}=-۲$$

ح) می‌دانیم $\sqrt[۴]{a^۴}=\sqrt{a^۲}=|a|$، پس:

$$\sqrt[۴]{(۲\sqrt{۵}-۵\sqrt{۲})^۴}-\sqrt{(۵\sqrt{۲}-۲\sqrt{۵})^۲}$$
$$=|۲\sqrt{۵}-۵\sqrt{۲}|-|۵\sqrt{۲}-۲\sqrt{۵}|\quad(*)$$

چون $|-u|=|u|$، پس:

$$|۲\sqrt{۵}-۵\sqrt{۲}|-|۵\sqrt{۲}-۲\sqrt{۵}|$$
$$=|۵\sqrt{۲}-۲\sqrt{۵}|-|۵\sqrt{۲}-۲\sqrt{۵}|=۰$$

توجه کنید که:

$$۵\sqrt{۲}=\sqrt{۵^۲\times۲}=\sqrt{۵۰}\quad و \quad ۲\sqrt{۵}=\sqrt{۲^۲\times۵}=\sqrt{۲۰}$$

و از آنجا که $\sqrt{۵۰}>\sqrt{۲۰}$، داریم $۵\sqrt{۲}>۲\sqrt{۵}$ یا به‌عبارت دیگر $\begin{cases}۵\sqrt{۲}-۲\sqrt{۵}>۰\\ ۲\sqrt{۵}-۵\sqrt{۲}<۰\end{cases}$، پس از $(*)$ نتیجه می‌شود که عبارت مورد نظر برابر است با:

$$-(۲\sqrt{۵}-۵\sqrt{۲})-(۵\sqrt{۲}-۲\sqrt{۵})=۰$$

خ) ابتدا توجه کنید که:

$$۵>۴\Rightarrow\sqrt{۵}>\sqrt{۴}\Rightarrow\sqrt{۵}>۲\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{۵}-۲>۰\\ ۲-\sqrt{۵}<۰\end{cases}$$

و از آنجا که $\sqrt[۴]{a^۴}=\sqrt{a^۲}=|a|$ و $\sqrt[۵]{a^۵}=\sqrt[۳]{a^۳}=a$، داریم:

$$\sqrt{(۲-\sqrt{۵})^۲}+\sqrt[۴]{(\sqrt{۵}-۲)^۴}+\sqrt[۳]{(۲-\sqrt{۵})^۳}-\sqrt[۵]{(\sqrt{۵}-۲)^۵}$$
$$=|۲-\sqrt{۵}|+|\sqrt{۵}-۲|+(۲-\sqrt{۵})-(\sqrt{۵}-۲)$$
$$=(-۲+\sqrt{۵})+(\sqrt{۵}-۲)+(۲-\sqrt{۵})+(۲-\sqrt{۵})=۰$$

۱۷۱. اگر $۰<a<۱$، آنگاه:

$(*)$ a مثبت است.

$(**)$ $a-۱<۰$

$(***)$ $۱-a>۰$

و می‌دانیم اگر n زوج باشد $\sqrt[n]{u^n}=|u|$، پس:

$$\sqrt{a^۲}+\sqrt[۴]{(a-۱)^۴}+\sqrt[۶]{(۱-a)^۶}$$
$$=|\underbrace{a}_{\text{مثبت}}|+|\underbrace{a-۱}_{\text{منفی}}|+|\underbrace{۱-a}_{\text{مثبت}}|$$
$$=a+(۱-a)+(۱-a)=۲-a$$

۱۷۲. می‌دانیم که اگر عددی بین صفر و یک در عدد مثبت a ضرب شود، حاصل عددی کوچکتر از a می‌شود، بنابراین برای عدد $۰<a<۱$ داریم $\dots<a^۴<a^۳<a^۲<a$، در نتیجه برای ریشه‌های عدد $۰<a<۱$ داریم $a<\sqrt{a}<\sqrt[۳]{a}<\sqrt[۴]{a}<\dots$، با نظیر همین استدلال می‌توان نتیجه گرفت برای توان‌ها و ریشه‌های عدد $a>۱$ داریم $a<a^۲<a^۳<a^۴<\dots$ و $a>\sqrt{a}>\sqrt[۳]{a}>\sqrt[۴]{a}>\dots$.

الف) هرچه توان عدد بین صفر و یک بزرگتر شود، عدد حاصل کوچکتر می‌شود، پس:

$$(۰/۲)^۷<(۰/۲)^۳$$

ب) هرچه توان عدد بین صفر و یک بزرگتر شود، عدد حاصل کوچکتر می‌شود، پس:

$$(۰/۴)^۳>(۰/۴)^۹\xrightarrow{\times(-۱)}-(۰/۴)^۳<-(۰/۴)^۹$$
$$\Rightarrow(-۰/۴)^۳<(-۰/۴)^۹$$

پ) هرچه توان عدد بزرگتر از یک بزرگتر شود، عدد حاصل بزرگتر می‌شود، پس با توجه به اینکه $\sqrt{۲}\simeq۱/۴$، می‌توان گفت:

$$(\sqrt{۲})^۹<(\sqrt{۲})^{۱۱}$$

ت) با توجه به توضیح بالا از آنجا که $۰<۰/۲<۱$، پس $\sqrt[۵]{۰/۲}<\sqrt[۸]{۰/۲}$.

ث) با توجه به توضیح بالا از آنجا که $۳>۱$، پس $\sqrt[۷]{۳}>\sqrt[۱۴]{۳}$.

ج) داریم $\sqrt[۵]{۳۲}=\sqrt[۵]{۲^۵}=۲$ و $\sqrt[۷]{۱۲۸}=\sqrt[۷]{۲^۷}=۲$، پس $\sqrt[۵]{۳۲}=\sqrt[۷]{۱۲۸}$.

چ) اولاً از آنجا که $10 > 1$، با توجه به توضیح بالا، $\sqrt[5]{10} > \sqrt[7]{10}$.
ثانیاً اگر n عددی فرد باشد، آنگاه $\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a}$، پس می‌توان نوشت:

$$\sqrt[5]{10} > \sqrt[7]{10} \Rightarrow -\sqrt[5]{10} < -\sqrt[7]{10} \Rightarrow \sqrt[5]{-10} < \sqrt[7]{-10}$$

۱۷۳. اگر $n \geq 2$ عددی طبیعی باشد، از تساوی $\sqrt[n]{b} = a$ نیز می‌توان نتیجه گرفت که $a^n = b$.

الف)

$$\sqrt[6]{x} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \left(\frac{1}{2}\right)^6 \Rightarrow x = \frac{1}{64}$$

ب)

$$\sqrt[5]{x} = -2 \Rightarrow x = (-2)^5 \Rightarrow x = -32$$

۱۷۴.

الف) با استفاده از تساوی $(a^r)^s = a^{rs}$ که برای عدد مثبت a و توان‌های گویای r و s برقرار است، داریم:

$$(5^{-\frac{3}{2}})^{\frac{6}{5}} = 5^{-\frac{3}{2}\times\frac{6}{5}} = 5^{-\frac{9}{5}} = \frac{1}{5^{\frac{9}{5}}} = \frac{1}{\sqrt[5]{5^9}}$$

ب) با استفاده از تساوی $a^r \times a^s = a^{r+s}$ که برای عدد مثبت a و توان‌های گویای r و s برقرار است، داریم:

$$5^{\frac{9}{5}} \times 5^{\frac{2}{4}} = 5^{\frac{9}{5}} \times 5^{\frac{1}{2}} = 5^{\frac{9}{5}+\frac{1}{2}} = 5^{\frac{23}{10}} = \sqrt[10]{5^{23}}$$

پ) ابتدا حاصل $\sqrt[3]{27^{-2}}$ را به‌دست می‌آوریم:

$$\sqrt[3]{27^{-2}} = \sqrt[3]{(3^3)^{-2}} = \sqrt[3]{(3^{-2})^3} = 3^{-2}$$

بنابراین عبارت مورد نظر سؤال برابر است با:

$$(3^{-2})^{-\frac{1}{2}} = 3^{-2\times(-\frac{1}{2})} = 3^1 = 3$$

ت) داریم:

$$\begin{cases} 4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2 \\ 27^{-\frac{1}{3}} = (3^3)^{-\frac{1}{3}} = 3^{3\times(-\frac{1}{3})} = 3^{-1} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

بنابراین عبارت مورد نظر سؤال برابر است با $2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$.

۱۷۵. اگر m و n دو عدد طبیعی باشند، توان کسری و غیر صحیح $\frac{m}{n}$ را برای عدد مثبت a چنین تعریف می‌کنیم:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

الف) با توجه به توضیح بالا $4^{\frac{3}{7}} = \sqrt[7]{4^3}$.

ب)

$$17^{-\frac{1}{2}} = (17^{-1})^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{17}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{17}} = \frac{1}{\sqrt{17}}$$

پ)

$$(3)^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{3^2} = \sqrt[5]{9}$$

ت) از آنجا که توان کسری برای اعداد منفی تعریف نمی‌شود، با جای‌گذاری $(-2)^2 = 4$ در عبارت، داریم:

$$((-2)^2)^{\frac{2}{3}} = 4^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{4^2} = \sqrt[3]{16}$$

ث)

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{-\frac{1}{3}} = \left(\left(\frac{1}{5}\right)^{-1}\right)^{\frac{1}{3}} = 5^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{5}$$

ج) اگر r و s دو عدد گویا باشند و a عددی مثبت باشد آنگاه $a^r \times a^s = a^{r+s}$، پس:

$$3^{\frac{3}{5}} \times 3^{\frac{5}{7}} = 3^{\frac{3}{5}+\frac{5}{7}} = 3^{\frac{21+25}{35}} = 3^{\frac{46}{35}} = \sqrt[35]{3^{46}}$$

چ) داریم $\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$ و $4 = 2^2$، پس:

$$2^{\frac{6}{8}} \times 4^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{3}{4}} \times (2^2)^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{3}{4}} \times 2^{\frac{4}{3}} = 2^{\frac{3}{4}+\frac{4}{3}} = 2^{\frac{9+16}{12}}$$
$$= 2^{\frac{25}{12}} = \sqrt[12]{2^{25}}$$

۱۷۶. هرگاه $a > 0$، برای هر دو عدد طبیعی m و n، توان کسری و غیر صحیح $\frac{m}{n}$ را برای a به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

الف)

$$\sqrt[5]{2^3} = 2^{\frac{3}{5}}$$

ب)

$$\sqrt[6]{(\sqrt{5}-2)^3} = (\sqrt{5}-2)^{\frac{3}{6}}$$

پ)

$$\sqrt[5]{-27} = -\sqrt[5]{27} = -(27)^{\frac{1}{5}}$$

ت) داریم $9 = 3^2$، $27 = 3^3$ و $81 = 3^4$، پس:

$$\frac{\sqrt[3]{9}\times 3^2}{\sqrt{27\times 81}} = \frac{\sqrt[3]{3^2}\times 3^2}{\sqrt{3^3\times 3^4}} = \frac{3^{\frac{2}{3}}\times 3^2}{3^{\frac{3}{2}}\times 3^4} = \frac{3^{\frac{2}{3}+2}}{3^{\frac{3}{2}+4}} = \frac{3^{\frac{8}{3}}}{3^{\frac{11}{2}}}$$
$$= 3^{\frac{8}{3}-\frac{11}{2}} = 3^{-\frac{17}{6}}$$

ث) $\sqrt[۳]{-۲}$ عددی منفی است، از آنجا که عدد منفی نمی‌تواند زیر رادیکال با فرجه‌ی زوج قرار گیرد، $\sqrt{\sqrt[۳]{-۲}}$ تعریف نشده است.

۱۷۷.

الف) راه حل اول: داریم:

$$۳^{\frac{۳}{۴}}=\sqrt[۴]{۳^{۳}}=\sqrt[۴]{۲۷} \quad \text{و} \quad ۲^{\frac{۳}{۴}}=\sqrt[۴]{۲^{۳}}=\sqrt[۴]{۸}$$

از آنجا که $۲۷>۸$، پس $\sqrt[۴]{۸}<\sqrt[۴]{۲۷}$، یعنی $۲^{\frac{۳}{۴}}<۳^{\frac{۳}{۴}}$.

راه حل دوم: در حالت کلی می‌توان گفت که اگر r عددی گویا و a و b عددهایی مثبت باشند:

$$r>۰ \;,\; a>b \Rightarrow a^{r}>b^{r}$$

$$r<۰ \;,\; a>b \Rightarrow a^{r}<b^{r}$$

بنابراین:

$$\frac{۳}{۴}>۰ \;,\; ۳>۲ \Rightarrow ۳^{\frac{۳}{۴}}>۲^{\frac{۳}{۴}}$$

ب) راه حل اول: داریم: $\left(\frac{۳}{۴}\right)^{\frac{-۱}{۲}}=\left(\left(\frac{۳}{۴}\right)^{-۱}\right)^{\frac{۱}{۲}}=\left(\frac{۴}{۳}\right)^{\frac{۱}{۲}}$ و

$\left(\frac{۳}{۴}\right)^{\frac{-۲}{۵}}=\left(\left(\frac{۳}{۴}\right)^{-۱}\right)^{\frac{۲}{۵}}=\left(\frac{۴}{۳}\right)^{\frac{۲}{۵}}$، یعنی می‌خواهیم $\left(\frac{۴}{۳}\right)^{\frac{۱}{۲}}$ و $\left(\frac{۴}{۳}\right)^{\frac{۲}{۵}}$ را مقایسه کنیم، داریم:

$$\left(\frac{۴}{۳}\right)^{\frac{۱}{۲}}=\left(\frac{۴}{۳}\right)^{\frac{۵}{۱۰}}=\sqrt[۱۰]{\left(\frac{۴}{۳}\right)^{۵}}$$

$$\left(\frac{۴}{۳}\right)^{\frac{۲}{۵}}=\left(\frac{۴}{۳}\right)^{\frac{۴}{۱۰}}=\sqrt[۱۰]{\left(\frac{۴}{۳}\right)^{۴}}$$

از آنجا که $\frac{۴}{۳}>۱$، پس $\left(\frac{۴}{۳}\right)^{۵}>\left(\frac{۴}{۳}\right)^{۴}$، پس $\sqrt[۱۰]{\left(\frac{۴}{۳}\right)^{۵}}>\sqrt[۱۰]{\left(\frac{۴}{۳}\right)^{۴}}$، یعنی $\left(\frac{۳}{۴}\right)^{\frac{-۱}{۲}}>\left(\frac{۳}{۴}\right)^{\frac{-۲}{۵}}$.

راه حل دوم: در حالت کلی می‌توان گفت که اگر a عددی مثبت و r و s عددهایی گویا باشند، داریم:

$$\begin{cases} a>۱ \;,\; r<s \Rightarrow a^{r}<a^{s} \\ ۰<a<۱ \;,\; r<s \Rightarrow a^{r}>a^{s} \end{cases}$$

بنابراین:

$$۰<\frac{۳}{۴}<۱ \;,\; \frac{-۱}{۲}<\frac{-۲}{۵} \Rightarrow \left(\frac{۳}{۴}\right)^{\frac{-۱}{۲}}>\left(\frac{۳}{۴}\right)^{\frac{-۲}{۵}}$$

پ)

$$\sqrt[۹]{\left(\frac{-۱}{۲۷}\right)^{-۳}}=\sqrt[۹]{\left(\left(\frac{-۱}{۲۷}\right)^{-۱}\right)^{۳}}=\sqrt[۹]{(-۲۷)^{۳}}=\sqrt[۹]{-(۲۷)^{۳}}$$

$$=-\sqrt[۹]{۲۷^{۳}}=-۲۷^{\frac{۳}{۹}}=-۲۷^{\frac{۱}{۳}}=-(۳^{۳})^{\frac{۱}{۳}}=-۳$$

$$-(۹)^{\frac{۱}{۲}}=-(۳^{۲})^{\frac{۱}{۲}}=-۳ \Rightarrow \sqrt[۹]{\left(\frac{-۱}{۲۷}\right)^{-۳}}=-(۹)^{\frac{۱}{۲}}$$

۱۷۸.

الف) داریم $\sqrt[n]{a^{m}}=a^{\frac{m}{n}}$، پس:

$$\sqrt{\sqrt[۳]{۹}\times\sqrt{۹}}=(۹^{\frac{۱}{۳}}\times ۹^{\frac{۱}{۲}})^{\frac{۱}{۲}}=(۹^{\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۲}})^{\frac{۱}{۲}}=(۹^{\frac{۵}{۶}})^{\frac{۱}{۲}}=۹^{\frac{۵}{۶}\times\frac{۱}{۲}}$$

$$=۹^{\frac{۵}{۱۲}}=\sqrt[۱۲]{۹^{۵}}$$

ب) داریم $\sqrt[n]{a^{m}}=a^{\frac{m}{n}}$، پس:

$$\sqrt[۳]{۴}\times\sqrt[۴]{۸}\times\sqrt[۱۲]{۱۲۸}=\sqrt[۳]{۲^{۲}}\times\sqrt[۴]{۲^{۳}}\times\sqrt[۱۲]{۲^{۷}}$$

$$=۲^{\frac{۲}{۳}}\times ۲^{\frac{۳}{۴}}\times ۲^{\frac{۷}{۱۲}}=۲^{\frac{۲}{۳}+\frac{۳}{۴}+\frac{۷}{۱۲}}=۲^{\frac{۸+۹+۷}{۱۲}}=۲^{\frac{۲۴}{۱۲}}=۲^{۲}$$

$$=۴$$

پ) داریم $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[mn]{a}$، پس:

$$\sqrt[۳]{\sqrt[۴]{۱۰^{۱۵}}}=\sqrt[۱۲]{۱۰^{۱۵}}=۱۰^{\frac{۱۵}{۱۲}}=۱۰^{\frac{۵}{۴}}$$

$$\sqrt[۶]{\sqrt{۱۰^{۳}}}=\sqrt[۱۲]{۱۰^{۳}}=۱۰^{\frac{۳}{۱۲}}=۱۰^{\frac{۱}{۴}}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt[۳]{\sqrt[۴]{۱۰^{۱۵}}}}{\sqrt[۶]{\sqrt{۱۰^{۳}}}}=\frac{۱۰^{\frac{۵}{۴}}}{۱۰^{\frac{۱}{۴}}}=۱۰^{\frac{۵}{۴}-\frac{۱}{۴}}=۱۰^{\frac{۴}{۴}}=۱۰$$

ت) داریم:

$$(\sqrt[۵]{۲۷})^{\frac{۱}{۶}}=(\sqrt[۵]{۳^{۳}})^{\frac{۱}{۶}}=(۳^{\frac{۳}{۵}})^{\frac{۱}{۶}}=۳^{\frac{۳}{۵}\times\frac{۱}{۶}}=۳^{\frac{۱}{۱۰}}$$

$$\sqrt[۱۵]{\sqrt{۲۷}}=\sqrt[۳۰]{۲۷}=\sqrt[۳۰]{۳^{۳}}=۳^{\frac{۳}{۳۰}}=۳^{\frac{۱}{۱۰}}$$

$$(\sqrt[۳]{۳})^{\frac{۳}{۱۰}}=(۳^{\frac{۱}{۳}})^{\frac{۳}{۱۰}}=۳^{\frac{۱}{۳}\times\frac{۳}{۱۰}}=۳^{\frac{۱}{۱۰}}$$

پس عبارت مورد نظر سؤال برابر است با:

$$\frac{۳^{\frac{۱}{۱۰}}+۳^{\frac{۱}{۱۰}}}{۳^{\frac{۱}{۱۰}}}=\frac{۲\times ۳^{\frac{۱}{۱۰}}}{۳^{\frac{۱}{۱۰}}}=۲$$

ث) اگر a عددی مثبت باشد آنگاه $\sqrt[kn]{a^{km}}=\sqrt[n]{a^m}$، پس:

$$\begin{cases}\sqrt{۲}=\sqrt[۶]{۲^{۳}}\\ \sqrt[۳]{۳}=\sqrt[۶]{۳^{۲}}\end{cases}\Rightarrow \sqrt{۲}\times\sqrt[۳]{۳}=\sqrt[۶]{۲^{۳}}\times\sqrt[۶]{۳^{۲}}=\sqrt[۶]{۲^{۳}\times۳^{۲}}$$

$$=\sqrt[۶]{۸\times۹}=\sqrt[۶]{۷۲}$$

۱۷۹.

$$\begin{cases} x\sqrt{x}=x^{۱}.x^{\frac{۱}{۲}}=x^{۱+\frac{۱}{۲}}=x^{\frac{۳}{۲}}\\ \sqrt[۵]{۴}=۴^{\frac{۱}{۵}}\end{cases}$$

$$x\sqrt{x}=\sqrt[۵]{۴}\Rightarrow x^{\frac{۳}{۲}}=۴^{\frac{۱}{۵}}$$

حال دو طرف معادله‌ی اخیر را به توان $\frac{۲}{۳}$ می‌رسانیم:

$$(x^{\frac{۳}{۲}})^{\frac{۲}{۳}}=(۴^{\frac{۱}{۵}})^{\frac{۲}{۳}}\Rightarrow x^{\frac{۳}{۲}\times\frac{۲}{۳}}=۴^{\frac{۱}{۵}\times\frac{۲}{۳}}\Rightarrow x=۴^{\frac{۲}{۱۵}}$$

$$\Rightarrow x=\sqrt[۱۵]{۴^{۲}}\Rightarrow x=\sqrt[۱۵]{۱۶}$$

۱۸۰. طرف راست تساوی را ساده می‌کنیم، برای این منظور داریم:

$$۸^{\frac{۱}{۳}}=(۲^{۳})^{\frac{۱}{۳}}=۲^{۳\times\frac{۱}{۳}}=۲^{۱}$$

$$\sqrt{۳۲}=\sqrt{۲^{۵}}=۲^{\frac{۵}{۲}}$$

$$\sqrt[۵]{۱۶}=\sqrt[۵]{۲^{۴}}=۲^{\frac{۴}{۵}}$$

$\Rightarrow$ سمت راست تساوی $=\dfrac{۲^{۱}\times۲^{\frac{۵}{۲}}}{۲^{\frac{۴}{۵}}}=\dfrac{۲^{۱+\frac{۵}{۲}}}{۲^{\frac{۴}{۵}}}=\dfrac{۲^{\frac{۷}{۲}}}{۲^{\frac{۴}{۵}}}=۲^{\frac{۷}{۲}-\frac{۴}{۵}}$
$=۲^{\frac{۲۷}{۱۰}}$

از طرفی $\sqrt[۱۰]{x^{۹}}=x^{\frac{۹}{۱۰}}$، پس معادله به‌صورت $x^{\frac{۹}{۱۰}}=۲^{\frac{۲۷}{۱۰}}$ است،

اگر دو طرف این تساوی را به توان $\frac{۱۰}{۹}$ برسانیم داریم:

$$(x^{\frac{۹}{۱۰}})^{\frac{۱۰}{۹}}=(۲^{\frac{۲۷}{۱۰}})^{\frac{۱۰}{۹}}\Rightarrow x^{\frac{۹}{۱۰}\times\frac{۱۰}{۹}}=۲^{\frac{۲۷}{۱۰}\times\frac{۱۰}{۹}}\Rightarrow x^{۱}=۲^{۳}$$

$$\Rightarrow x=۸$$

۱۸۱.

الف) راه حل اول: ابتدا $\sqrt[۳]{۲\sqrt{۲}}$ را ساده می‌کنیم:

$$۲\sqrt{۲}=۲^{۱}\times۲^{\frac{۱}{۲}}=۲^{\frac{۳}{۲}}$$

$$\Rightarrow \sqrt[۳]{۲\sqrt{۲}}=(۲\sqrt{۲})^{\frac{۱}{۳}}=(۲^{\frac{۳}{۲}})^{\frac{۱}{۳}}=۲^{\frac{۳}{۲}\times\frac{۱}{۳}}=۲^{\frac{۱}{۲}}$$

پس داریم:

$$\sqrt{۲\sqrt[۳]{۲\sqrt{۲}}}=\sqrt{۲\times۲^{\frac{۱}{۲}}}=\sqrt{۲^{۱+\frac{۱}{۲}}}=\sqrt{۲^{\frac{۳}{۲}}}=(۲^{\frac{۳}{۲}})^{\frac{۱}{۲}}$$

$$=۲^{\frac{۳}{۲}\times\frac{۱}{۲}}=۲^{\frac{۳}{۴}}=\sqrt[۴]{۲^{۳}}$$

راه حل دوم: از رابطه‌ی $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$ می‌توان نتیجه گرفت که $a\sqrt[m]{b}=\sqrt[m]{a^{m}b}$ (در صورت تعریف شدن)، بنابراین:

$$\sqrt{۲\sqrt[۳]{۲\sqrt{۲}}}=\sqrt{۲\sqrt[۳]{\sqrt{۲^{۲}\times۲}}}=\sqrt{۲\sqrt[۶]{۲^{۳}}}=\sqrt{\sqrt[۶]{۲^{۶}\times۲^{۳}}}$$

$$=\sqrt[۱۲]{۲^{۹}}=\sqrt[۴\times۳]{۲^{۳\times۳}}=\sqrt[۴]{۲^{۳}}$$

دقت کنید که از $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$ می‌توان نتیجه گرفت که (با فرض تعریف شده بودن عبارت‌های رادیکالی):

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}}}=\sqrt[mnp]{a}$$

ب) داریم $\sqrt{\sqrt{۲}}=\sqrt[۴]{۲}$، پس حاصل $\sqrt[۶]{۳\sqrt[۴]{۲}}$ مد نظر است. داریم:

$$\sqrt[۶]{۳\sqrt[۴]{۲}}=\sqrt[۶]{\sqrt[۴]{۳^{۴}\times۲}}=\sqrt[۲۴]{۳^{۴}\times۲}=\sqrt[۲۴]{۱۶۲}$$

پ)

$$\sqrt[۵]{۲\sqrt[۳]{۴\sqrt{۳}}}=\sqrt[۵]{\sqrt[۳]{۲^{۳}\sqrt{۴^{۲}\times۳}}}=\sqrt[۵]{\sqrt[۳]{\sqrt{۲^{۶}\times۴^{۲}\times۳}}}$$

$$=\sqrt[۵\times۳\times۲]{۲^{۶}\times۴^{۲}\times۳}=\sqrt[۳۰]{۲^{۶}\times۲^{۴}\times۳}=\sqrt[۳۰]{۲^{۱۰}\times۳}$$

ت) ابتدا حاصل $\sqrt{۵\sqrt[۳]{۲۵}}$ را به‌دست می‌آوریم:

$$\sqrt{۵\sqrt[۳]{۲۵}}=\sqrt{\sqrt[۳]{۵^{۳}\times۲۵}}=\sqrt[۶]{۵^{۳}\times۲۵}=\sqrt[۶]{۵^{۳}\times۵^{۲}}$$

$$=\sqrt[۶]{۵^{۵}}=۵^{\frac{۵}{۶}}$$

بنابراین حاصل $(۵^{\frac{۵}{۶}})^{۴}$ مد نظر سؤال است که برابر است با:

$$۵^{\frac{۵}{۶}\times۴}=۵^{\frac{۱۰}{۳}}=\sqrt[۳]{۵^{۱۰}}$$

۱۸۲. با توجه به معادله، از آنجا که طرف راست معادله عددی مثبت است، طرف چپ آن نیز باید عددی مثبت باشد که در این‌صورت باید x مثبت باشد.

$$\sqrt[۳]{x\sqrt[۳]{x^{۲}\sqrt{x^{۲}}}}=\sqrt[۳]{x\sqrt[۳]{\sqrt{x^{۴}.x^{۲}}}}=\sqrt[۳]{x\sqrt[۶]{x^{۶}}}$$

$$\xrightarrow[\text{x مثبت است}]{\sqrt[۶]{x^{۶}}=x}\sqrt[۳]{x.x}$$

پس داریم:

$$\sqrt[۳]{x^{۲}}=۲\Rightarrow(\sqrt[۳]{x^{۲}})^{۳}=۲^{۳}\Rightarrow x^{۲}=۲^{۳}\Rightarrow x=\pm\sqrt{۲^{۳}}$$

$$\xrightarrow{x>۰}x=۲\sqrt{۲}$$