

درس اول: معادله و مسائل توصیفی

۱ جواب معادله $\frac{x}{2} + \frac{x+1}{3} = 6 - 2x$ کدام است؟

- (۱) -۲
- (۲) ۲
- (۳) $-\frac{1}{2}$
- (۴) $\frac{1}{2}$

	۷۱٪
	۲۸٪
	شهریور ۱۴۰۰

۲ اگر عبارت «عددی منهای چهار، برابر با دو برابر قرینه آن به علاوه ۵ است» را بخواهیم به معادله تبدیل کنیم، کدام گزینه صحیح است؟ (عدد مورد نظر را x در نظر بگیرید)

- (۱) $x - 4 = 2x + 5$
- (۲) $x - 4 = \frac{2}{x} + 5$
- (۳) $x - 4 = -2x + 5$
- (۴) $x - 4 = 2x - 5$

	۶۸٪
	۴۹٪
	شهریور ۱۳۹۶

۳ اگر طول یک مستطیل را با x و عرض آن را با y نشان دهیم و بدانیم که طول مستطیل از ۳ برابر عرض آن دو واحد بیشتر باشد، در این صورت کدام گزینه محیط مستطیل را به درستی نشان می‌دهد؟

- (۱) $P(x) = \frac{4}{3}x - \frac{2}{3}$
- (۲) $P(y) = 8y + 4$
- (۳) $P(x) = \frac{8}{3}x + \frac{4}{3}$
- (۴) $P(y) = 4y + 2$

	۶۴٪
	۲۰٪
	بهمن ۱۴۰۰

۴ مجموع چهار عدد مضرب ۷ متوالی برابر ۱۵۴ است. کوچکترین عدد کدام است؟

- (۱) ۲۸
- (۲) ۳۵
- (۳) ۴۲
- (۴) ۴۹

	۳۸٪
	۲۰٪
	آبان ۱۳۹۹

۵ جواب معادله $\frac{x}{2} + \frac{2x-3}{6} = 7$ کدام است؟

- (۱) ۶
- (۲) ۹
- (۳) ۱۲
- (۴) ۱۵

	۵۵٪
	۳۷٪
	مهر ۱۳۹۹

۶ کارخانه ذوب آهن اصفهان، از روز شنبه هر روز تولید خود را دو برابر کرده است. در پایان روز چهارشنبه تولید فولاد به سقف ۴۸ هزار تن رسیده است. مجموع تولید فولاد در این پنج روز چند هزار تن است؟

- (۱) ۵۴
- (۲) ۷۲
- (۳) ۹۳
- (۴) ۸۱

	۵۴٪
	۳۶٪
	بهمن ۱۴۰۰

۷ در یک پارکینگ عمومی برای هر ساعت، مبلغ ۱۵۰ تومان به اضافه ورودی ثابت ۶۰۰ تومان پرداخت می‌شود. با پرداخت مبلغ ۳۰۰۰ تومان، از این پارکینگ چند ساعت می‌توان استفاده نمود؟

- (۱) ۴
- (۲) ۵
- (۳) ۱۶
- (۴) ۲۰

	۵۳٪
	۲۵٪
	آذر ۱۳۹۶

۸ عددی را بیابید که نصف آن عدد منهای ۵، برابر با نصف همان عدد، به علاوه یک باشد؟

	%۵۳
	%۳۴
	مهر ۱۳۹۸

- ۱۲ (۱) ۱۸ (۲) ۲۴ (۳) ۳۰ (۴)

۹ عرض مستطیلی، ربع طول آن است. اگر محیط مستطیل ۴۰ واحد باشد، مساحت مستطیل چقدر است؟

	%۴۶
	%۲۹
	آبان ۱۳۹۹

- ۵۶ (۱) ۲۷ (۲) ۶۴ (۳) ۱۲۸ (۴)

۱۰ خانواده‌ای دارای سه فرزند است. دو فرزند کوچکتر ۵ سال اختلاف سنی دارند و سن بزرگترین فرزند برابر با مجموع سن دو

فرزند دیگر است. اگر مجموع سن فرزندان ۲۶ سال باشد، سن بزرگترین فرزند کدام است؟

	%۴۶
	%۲۸
	بهمن ۱۳۹۹

- ۱۱ (۱) ۱۲ (۲) ۱۳ (۳) ۱۴ (۴)

۱۱ نصف عددی به علاوه عدد ۲، برابر ثلث آن عدد، به علاوه عدد ۶ است، آن عدد کدام است؟

	%۴۵
	%۲۸
	آذر ۱۳۹۶

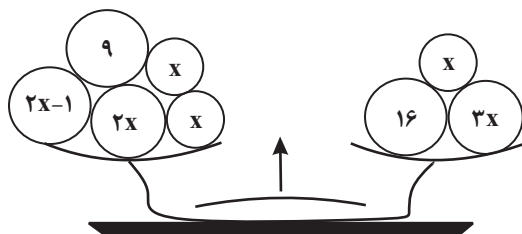
- ۱۲ (۱) -۱۲ (۲) ۲۴ (۳) -۲۴ (۴)

۱۲ اگر جواب معادله $2ax - 8 = \frac{5}{y}x - a$ برابر ۴ باشد، a کدام است؟

	%۴۳
	%۲۴
	آذر ۱۳۹۹

- ۲ (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) ۲ (۳) $-\frac{1}{2}$ (۴)

۱۳ ترازوی شکل زیر در حالت تعادل قرار دارد. مقدار x کدام است؟



	%۴۳
	%۳۱
	مرداد ۱۳۹۹

- ۲ (۱) ۴ (۲) ۶ (۳) ۸ (۴)

۱۴ دو برابر عددی، به علاوه عدد ۷ برابر است با نصف قرینه آن عدد، منهای عدد ۸، عدد مورد نظر کدام است؟

	%۴۱
	%۲۳
	آذر ۱۳۹۷

- ۱۰ (۱) -۱۰ (۲) ۶ (۳) -۶ (۴)

۱۵ در فلکی صد سکه ۵۰ تومانی و ۱۰۰ تومانی وجود دارد، اگر مجموع پول کلک ۶۰۰۰ تومان باشد، تعداد سکه‌های ۵۰ تومانی کدام است؟

	%۴۱
	%۲۲
	فروردین ۱۳۹۹

- ۲۰ (۱) ۸۰ (۲) ۴۰ (۳) ۶۰ (۴)

۱۶ مریم ۳ دفتر و ۴ خودکار را به قیمت ۳۰ هزار تومان و زهرا ۵ دفتر و ۶ خودکار را به قیمت ۴۹ هزار تومان خریده است. قیمت یک دفتر به تنهایی چند هزار تومان است؟

	%۴۰
	%۱۹
	آذر ۱۴۰۱

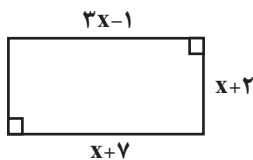
- ۸ (۱) ۷ (۲) ۶ (۳) ۵ (۴)

۱۷ اگر $\frac{1}{4}$ طول میله‌ای را از آن جدا کنیم، اختلاف طول دو تکه برابر ۶۰ سانتی‌متر خواهد شد. طول اولیه میله چند سانتی‌متر است؟

	%۳۵
	%۱۹
	مهر ۱۴۰۱

- ۹۰ (۱) ۱۲۰ (۲) ۱۵۰ (۳) ۱۸۰ (۴)

۱۸ مساحت مستطیل شکل مقابل کدام است؟



	%۳۴
	%۳۱
	شهریور ۱۳۹۹

- ۲۴ (۱) ۴۲ (۲) ۶۶ (۳) ۷۸ (۴)

۱۹ اگر به دو برابر عددی ۶ واحد اضافه کنیم، حاصل برابر تفاضل نصف آن عدد از عدد ۳۱ می‌باشد. آن عدد کدام است؟

	%۳۲
	%۲۵
	شهریور ۱۳۹۹

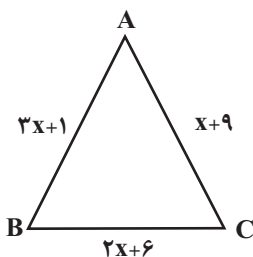
- ۱۰ (۱) ۱۲/۵ (۲) ۱۵ (۳) ۱۷/۵ (۴)

۲۰ در یک کارخانه، حقوق یک مهندس دو برابر تکنسین و $\frac{2}{3}$ مدیر است. قسمت تولید این کارخانه ۵ مدیر، ۱۰ مهندس و ۱۵ تکنسین دارد. ریاست کارخانه برای این قسمت ماهانه ۷۵ میلیون تومان حقوق پرداخت می‌کند. حقوق یک تکنسین در این کارخانه ماهانه چند میلیون تومان است؟

	%۳۱
	%۱۸
	آبان ۱۳۹۸

- ۱/۲ (۱) ۱/۵ (۲) ۱/۸ (۳) ۲ (۴)

۲۱ اگر مثلث شکل زیر، یک مثلث متساوی‌الساقین باشد، در این صورت مقدار x کدام نمی‌تواند باشد؟



	%۳۰
	%۲۵
	مهر ۱۳۹۹

- ۳ (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴)

درس دوم: حل معادله درجه ۲ و کاربردها

۲۲ ریشه‌های کدام معادله ۳- و ۵ هستند؟

$$x^2 - 8x + 15 = 0 \quad (1)$$

$$x^2 + 8x - 15 = 0 \quad (2)$$

$$x^2 - 2x - 15 = 0 \quad (3)$$

$$x^2 + 2x + 15 = 0 \quad (4)$$

	%۵۵
	%۳۰
	آذر ۱۴۰۰

۲۳ اگر $x = -2$ یکی از ریشه‌های معادله $x^2 + kx + 6 = 0$ باشد، در این صورت ریشه دیگر آن کدام است؟

(۱) -۵ (۲) ۵ (۳) -۳ (۴) ۳

	%۴۷
	%۲۴
	آبان ۱۴۰۰

۲۴ کدام معادله دارای جواب‌های $x = 3$ و $x = -4$ است؟

$$x^2 + 7x - 12 = 0 \quad (1)$$

$$x^2 - 7x + 12 = 0 \quad (3)$$

$$x^2 + x + 12 = 0 \quad (2)$$

$$x^2 + x - 12 = 0 \quad (4)$$

	%۴۶
	%۲۷
	آبان ۱۳۹۸

۲۵ معادله درجه دومی که ریشه‌های آن $x = -8$ و $x = 3$ باشند، کدام می‌تواند باشد؟

$$x^2 + 5x - 24 = 0 \quad (1)$$

$$x^2 - 11x + 24 = 0 \quad (3)$$

$$x^2 - 5x + 24 = 0 \quad (2)$$

$$x^2 + 11x - 24 = 0 \quad (4)$$

	%۴۵
	%۲۶
	آبان ۱۳۹۹

$$8 + x^2 = 3x^2$$

۲۶ کدام یک از گزینه‌های زیر جواب معادله روبرو می‌باشد؟

(۱) فقط ۲ (۲) ۳ (۳) فقط -۲ (۴) ۲ یا -۲

	%۴۵
	%۲۳
	آذر ۱۳۹۶

۲۷ ریشه کوچک‌تر معادله $(3x + 2)^2 = 12x + 40$ کدام است؟

(۱) ۶ (۲) -۹ (۳) ۳ (۴) -۲

	%۴۴
	%۲۴
	آذر ۱۴۰۰

۲۸ محیط مربعی که طول قطر آن $\sqrt{10}$ است، کدام است؟

(۱) $\sqrt{5}$ (۲) $4\sqrt{5}$

(۳) $\sqrt{10}$ (۴) $4\sqrt{10}$

	%۴۳
	%۲۰
	مرداد ۱۳۹۹

۳۹

جواب کوچکتر معادله $(x+2)(x-3) = x+9$ کدام است؟

- ۳ (۱) -۳ (۲) ۵ (۳) -۵ (۴)

	%۴۳
	%۲۲
	آبان ۱۳۹۸

۳۰

قدر مطلق اختلاف ریشه‌های معادله $25 = (3-4x)^2$ کدام است؟

- $\frac{5}{4}$ (۱) $\frac{5}{2}$ (۲) $\frac{7}{4}$ (۳) $\frac{7}{2}$ (۴)

	%۴۲
	%۲۲
	فروردین ۱۴۰۰

۳۱

سه عدد طبیعی متوالی مضرب ۵ را در نظر بگیرید که حاصل ضرب بزرگترین عدد در کوچکترین عدد از عدد میانی ۱۸۵ واحد

بیشتر است؛ عدد بزرگتر کدام است؟

- ۲۰ (۱) ۲۵ (۲) ۳۰ (۳) ۳۵ (۴)

	%۴۲
	%۲۱
	آبان ۱۴۰۰

۳۲

جواب‌های معادله $(x+2)(x-3) = (x-3)$ کدام است؟

- ۳ فقط (۱) (۲) فقط -۱ -۱، ۳ (۳) -۳، ۳ (۴)

	%۴۲
	%۲۶
	بهمن ۱۳۹۸

۳۳

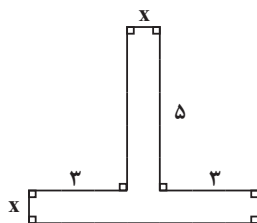
در مورد جواب‌های معادله $(x+2)(x-4) = -3(x-4)$ کدام گزینه صحیح است؟

- (۱) فقط یک جواب منفی دارد. (۲) یک جواب مثبت و یک جواب منفی دارد.
(۳) فقط یک جواب مثبت دارد. (۴) دو جواب هم علامت دارد.

	%۳۸
	%۲۱
	آذر ۱۳۹۸

۳۴

اگر مساحت شکل زیر ۶۰ واحد مربع باشد، x چند واحد است؟



- ۶ (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۸ (۴)

	%۳۷
	%۲۲
	بهمن ۱۴۰۱

۳۵

ریشه‌های معادله $(x-8)(x+6) = 2x-16$ کدام است؟

- (۱) فقط -۴ (۲) ۸ و -۴ (۳) فقط ۸ (۴) ۴ و -۸

	%۳۶
	%۲۰
	شهریور ۱۳۹۹

۳۶ در یک کارگاه تولید بخاری برقی، سود حاصل از فروش x بخاری به طور تقریبی از رابطه $P(x) = x^2 - 2x - 3$ به دست می‌آید. به ازای فروش چند عدد بخاری کارگاه به نقطه سر به سر خود می‌رسد؟

	%۳۶
	%۱۹
	آبان ۱۳۹۹

- ۱ (۴) ۳ (۳) ۴ (۲) ۲ (۱)

۳۷ در مورد جواب‌های معادله $(x-4)(x-3) = (x-3)(2-x)$ چه می‌توان گفت؟

	%۳۶
	%۱۲
	آبان ۱۴۰۱

- (۱) معادله دارای ۳ جواب متمایز است.
 (۲) معادله دارای ۲ جواب متمایز است.
 (۳) معادله دارای یک ریشه مضاعف مثبت است.
 (۴) معادله فقط دارای یک جواب منفی است.

۳۸ مجموع ریشه‌های معادله $x^4 - 4x^2 = 0$ کدام است؟

	%۳۳
	%۱۷
	آذر ۱۳۹۷

- ۱ (۴) صفر (۳) ۴ (۲) -۴ (۱)

۳۹ ریشه کوچکتر معادله $3x^2 - 12x - 63 = 0$ کدام است؟

	%۳۲
	%۱۶
	آبان ۱۳۹۸

- ۳ (۴) -۳ (۳) ۷ (۲) -۷ (۱)

۴۰ مجموع مربع‌های دو عدد فرد طبیعی متوالی برابر ۲۹۰ است. عدد کوچکتر کدام است؟

	%۳۰
	%۱۹
	شهریور ۱۴۰۰

- ۱۵ (۱) ۱۳ (۲)
 ۱۱ (۳) ۱۷ (۴)

۴۱ در مستطیلی که طول آن ۳ برابر عرض آن است، طول قطر $4\sqrt{10}$ است. در این صورت مساحت مستطیل کدام است؟

	%۲۸
	%۱۸
	مرداد ۱۴۰۰

- ۲۴ (۱) ۴۸ (۲) ۷۲ (۳) ۹۶ (۴)

۴۲ مجموع ریشه‌های متمایز معادله $= 0 = 11(x-5)^2 + (2x-1)(x-5)^2$ کدام است؟

	%۲۷
	%۱۸
	آبان ۱۴۰۱

- ۱۰ (۱) -۱۰ (۲)
 ۵ (۳) صفر (۴)

۴۳ در حل معادله $4x^2 - 4x - 5 = 0$ به روش مربع کامل، پس از آنکه ضریب x^2 برابر یک شد، مقداری که به دو طرف معادله اضافه می‌شود، کدام است؟

	%۴۴
	%۲۵
	آبان ۱۳۹۹

- (۱) $\frac{4}{9}$ (۲) $\frac{9}{4}$ (۳) ۱ (۴) $\frac{1}{4}$

۴۴ در حل معادله درجه دوم $x^2 - 6x = 1$ به روش مربع کامل چه عددی را باید به طرفین معادله اضافه کنیم؟

	%۴۴
	%۳۱
	آذر ۱۳۹۸

- (۱) ۳۶ (۲) -۳۶ (۳) -۹ (۴) ۹

۴۵ برای حل معادله $x^2 - 10x = 1$ به روش مربع کامل کردن، وقتی ضریب x^2 برابر یک است، چه عددی را باید به طرفین معادله اضافه کنیم؟

	%۴۱
	%۲۳
	آذر ۱۳۹۶

- (۱) ۲۵ (۲) ۱۰ (۳) ۵ (۴) ۲۰

۴۶ در حل معادله درجه دوم $5x^2 - 8x = 0$ به روش مربع کامل پس از یک شدن ضریب x^2 ، کدام عدد را باید به طرفین معادله اضافه کنیم؟

	%۳۷
	%۲۰
	آبان ۱۳۹۸

- (۱) $\frac{64}{100}$ (۲) $\frac{64}{25}$ (۳) $\frac{16}{100}$ (۴) $\frac{25}{16}$

۴۷ اگر بخواهیم معادله $2x^2 + 3x = 1$ را به روش مربع کامل حل کنیم، در این صورت کدام معادله حاصل می‌شود؟

	%۳۱
	%۱۳
	آبان ۱۴۰۰

- (۱) $(x + \frac{3}{2})^2 = \frac{13}{4}$ (۲) $(x + \frac{3}{4})^2 = \frac{17}{16}$
 (۳) $(x + \frac{3}{4})^2 = \frac{25}{16}$ (۴) $(x + \frac{3}{2})^2 = \frac{11}{4}$

۴۸ مبین (Δ) معادله درجه دوم $-2x^2 + 9x + 5 = 0$ کدام است؟

	%۶۲
	%۳۱
	آذر ۱۴۰۰

- (۱) ۴۱ (۲) $\sqrt{41}$ (۳) ۱۲۱ (۴) ۱۱

۴۹ ریشه کوچکتر معادله $2x^2 - 7x + 3 = 0$ کدام است؟

	%۵۱
	%۲۸
	آذر ۱۳۹۸

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) ۳ (۴) -۳

۵۰ دلتا (Δ) و جواب کوچک تر معادله $2x^2 - 3x + 1 = 0$ به ترتیب از راست به چپ کدام اند؟

(۱) ۱ و -۱ (۲) ۱ و ۱ (۳) $\sqrt{2}$ و $\frac{1}{2}$ (۴) ۱ و $\frac{1}{2}$

	%۵۰
	%۳۰
	آبان ۱۳۹۹

۵۱ اگر $x = -2$ ریشه معادله $\Delta x^2 - ax + 3a = 0$ باشد، مقدار a کدام است؟

(۱) -۲۰ (۲) ۲۰ (۳) -۴ (۴) ۴

	%۴۹
	%۲۹
	اردیبهشت ۱۳۹۹

۵۲ قدر مطلق اختلاف ریشه های معادله $15x^2 + 28x + 13 = 0$ کدام است؟

(۱) $\frac{2}{15}$ (۲) $\frac{28}{15}$ (۳) $\frac{13}{15}$ (۴) $\frac{15}{28}$

	%۳۷
	%۱۶
	بهمن ۱۳۹۹

۵۳ معادله $ax^2 + 3x - 5 = 0$ در چه شرایطی، فاقد ریشه حقیقی است؟

(۱) $a < \frac{9}{20}$ (۲) $a > \frac{9}{20}$
 (۳) $a < -\frac{9}{20}$ (۴) $a > -\frac{9}{20}$

	%۳۵
	%۱۶
	آذر ۱۴۰۱

۵۴ ریشه بزرگتر معادله $\frac{x^2}{4} + 2x - 21 = 0$ کدام است؟

(۱) -۱۴ (۲) ۱۴
 (۳) -۶ (۴) ۶

	%۳۴
	%۱۶
	آبان ۱۴۰۰

۵۵ کدام معادله زیر، ریشه حقیقی ندارد؟

(۱) $x^2 - 3x + 1 = 0$ (۲) $25x^2 + 20x + 4 = 0$
 (۳) $\frac{1}{3}x^2 + 2x - \frac{5}{2} = 0$ (۴) $-3x^2 + 4x - 3 = 0$

	%۳۲
	%۱۶
	آذر ۱۳۹۷

۵۶ کدام گزینه ریشه معادله $34x^2 - 79x + 45 = 0$ است؟

(۱) $-\frac{34}{45}$ (۲) $\frac{34}{45}$ (۳) $-\frac{45}{34}$ (۴) $\frac{45}{34}$

	%۳۲
	%۱۳
	آبان ۱۴۰۱

۵۷ معادله $(x-2)^2 = k - 2$ دارای ریشه مضاعف است. مقدار k کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۲ (۳) ۶ (۴) ۴

	%۲۹
	%۱۵
	آذر ۱۳۹۷

۵۸ معادله $x^2 + mx + n = 0$ دارای ریشه مضاعف $x = -\frac{3}{4}$ است، مقدار n کدام است؟

- (۱) $\frac{9}{4}$ (۲) $\frac{9}{16}$ (۳) $\frac{4}{9}$ (۴) $\frac{16}{9}$

	%۲۵
	%۱۶
	آذر ۱۴۰۱

۵۹ ریشه کوچکتر معادله $3x^2 + 5x - 28 = 0$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{7}{3}$ (۲) $\frac{7}{3}$ (۳) -4 (۴) ۴

	%۲۲
	%۱۳
	آبان ۱۴۰۱

درس سوم: معادله‌های شامل عبارتهای گویا

۶۰ جواب معادله $\frac{2x-5}{1-2x} = 4$ کدام است؟

- (۱) $\frac{9}{2}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{3}{4}$ (۴) $\frac{9}{10}$

	%۵۲
	%۳۱
	آذر ۱۴۰۱

۶۱ جواب معادله $\frac{3x-5}{1-2x} = 3$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{5}{3}$ (۳) $\frac{8}{3}$ (۴) $\frac{8}{9}$

	%۴۹
	%۲۷
	آذر ۱۴۰۰

۶۲ جواب معادله گویای $\frac{3x-5}{3-4x} = -2$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{1}{5}$ (۴) $-\frac{1}{5}$

	%۴۷
	%۲۵
	آذر ۱۳۹۸

۶۳ جواب معادله $\frac{x-2}{x-3} = \frac{x+1}{x+2}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{7}{2}$ (۴) $\frac{49}{4}$

	%۴۰
	%۲۷
	آذر ۱۳۹۸

پاسخ تشریحی فصل اول

۲۰٪ دانش آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که به تبدیل فارسی به زبان ریاضی و به مفهوم ساختن تابع اشراف داشته‌اند.

گزینه «۱»

عدد اول مضرب ۷ را x در نظر می‌گیریم، عددهای متوالی مضرب ۷ باید اختلاف ۷ واحدی با هم داشته باشند.

$$x + (x+7) + (x+14) + (x+21) = 154$$

$$4x + 42 = 154 \Rightarrow 4x = 154 - 42$$

$$\Rightarrow 4x = 112 \Rightarrow x = \frac{112}{4} = 28$$

کوچک‌ترین عدد: $x = 28$
چهار عدد مضرب ۷ متوالی: ۲۸، ۳۵، ۴۲، ۴۹

۳۸٪ دانش آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که به نوع نوشتن اعداد متوالی و مضارب آشنایی داشته‌اند.

نکته

۴ مضرب ۴: $x, x+4, x+8, \dots$

۵ مضرب ۵: $x, x+5, x+10, \dots$

گزینه «۲»

معادله را در مخرج مشترک (۶) ضرب می‌کنیم:

$$6\left(\frac{x}{2}\right) + 6\left(\frac{2x-3}{6}\right) = 6 \times 7$$

$$\Rightarrow 3x + 2x - 3 = 42 \Rightarrow 5x = 42 + 3 \Rightarrow 5x = 45 \Rightarrow x = \frac{45}{5} = 9$$

۳۷٪ دانش آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که به حل معادله درجه اول توجه داشته‌اند.

نکته

برای از بین بردن مخرج کسرها در معادلات درجه اول کسری باید کل معادله را در مخرج مشترک ضرب کرد.

گزینه «۳»

تولید روز شنبه را x فرض می‌کنیم و برای هر روز از یکشنبه تولید را نسبت به روز قبل دو برابر می‌کنیم:

روز	یکشنبه	دوشنبه	سه‌شنبه	چهارشنبه
مقدار تولید	x	$2x$	$4x$	$8x$

تولید روز چهارشنبه را برابر ۴۸ قرار می‌دهیم:

$$16x = 48 \Rightarrow x = \frac{48}{16} = 3$$

$$93 = 3(1+2+4+8) = 3 \cdot 1x \xrightarrow{x=3} 3 \cdot 16 = 48$$

۳۹٪ دانش آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که با توجه به مفاهیم موجود در مسأله توانسته‌اند جمله فارسی را به زبان ریاضی نوشته و معادله حاصل را حل کنند.

فصل ۱: معادله درجه دوم

گزینه «۲»

معادله را در مخرج مشترک (۶) ضرب می‌کنیم.

$$\frac{x}{2} + \frac{x+1}{3} = 6 - 2x$$

$$6 \times \frac{x}{2} + 6 \times \frac{x+1}{3} = 6(6 - 2x)$$

$$\Rightarrow 3x + 2(x+1) = 36 - 12x$$

$$\Rightarrow 3x + 2x + 2 + 12x = 36$$

$$17x = 36 - 2 \Rightarrow 17x = 34 \Rightarrow x = \frac{34}{17} = 2$$

۲۸٪ دانش آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که به حل معادلات درجه اول با ضرایب کسری دقت داشته‌اند.

نکته

در حل معادلات درجه اول و کسری، باید کل معادله را در مخرج مشترک تمام کسرها ضرب کنیم.

گزینه «۳»

عدد مورد نظر را x در نظر می‌گیریم:

$$x - 4 = \text{عددی منهای چهار}$$

$$5(-x) + 5 = -2x + 5 = \text{دو برابر قرینه به علاوه ۵}$$

$$x - 4 = -2x + 5$$

دو عبارت برابر هستند پس:

۴۹٪ دانش آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که به تبدیل عبارت فارسی به ریاضی اشراف داشته‌اند.

نکته

تبدیل عبارت فارسی به زبان ریاضی:

$$\frac{1}{2x} = \text{معکوس دو برابر عدد}, \quad 2\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{2}{x} = \text{دو برابر معکوس عدد}$$

$$-2x = 2(-x) = \text{دو برابر قرینه عدد}, \quad 2x = \text{دو برابر عدد}$$

گزینه «۲»

طول مستطیل (x) از ۳ برابر عرض (y) دو واحد بیشتر است: $x = 3y + 2$
محیط مستطیل برابر دو طول و دو عرض می‌باشد که می‌توان بر حسب طول (x) یا بر حسب عرض (y) نوشت:

$$\text{محیط (الف)} = 2x + 2y \xrightarrow{x=3y+2} P = 2(3y+2) + 2y$$

$$\Rightarrow P = 6y + 4 + 2y \Rightarrow P = 8y + 4$$

گزینه «۲»:

$$\text{ب) } x = 3y + 2 \Rightarrow x - 2 = 3y \Rightarrow y = \frac{x-2}{3}$$

$$\text{محیط} = 2x + 2y = 2x + 2\left(\frac{x-2}{3}\right) = 2x + \frac{2}{3}x - \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow \text{محیط} = \frac{6}{3}x + \frac{2}{3}x - \frac{4}{3} = \frac{8}{3}x - \frac{4}{3}$$

گزینه ۷

زمان استفاده از پارکینگ را x فرض می‌کنیم و یک معادله می‌سازیم:
 $150x + 600 = 3000$
 $150x = 3000 - 600 = 2400$
 $x = \frac{2400}{150} = \frac{240}{15} = 16$

نکته

۲۵٪ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که به تشکیل معادله ریاضی از مفاهیم فارسی و حل آن دقت داشته‌اند.

نکته

اگر هزینه متغیر تولید x واحد کالا برابر ۲۰۰ و هزینه ثابت ۵۰ باشد معادله هزینه به صورت $C(x) = 200x + 50$ می‌باشد.

گزینه ۸

عدد موردنظر را x در نظر می‌گیریم:

$$5 - \frac{x}{2} = \text{نصف عدد منهای } 5$$

$$\text{دو عبارت با هم برابرند پس: } \frac{x}{2} - 5 = \frac{1}{4}x + 1$$

دو عبارت با هم برابرند پس:

$$\frac{x}{2} - 5 = \frac{1}{4}x + 1 \quad \times(4) \rightarrow$$

$$4\left(\frac{x}{2} - 5\right) = 4\left(\frac{1}{4}x + 1\right) \Rightarrow 2x - 20 = x + 4$$

$$\Rightarrow 2x - x = 4 + 20 \Rightarrow x = 24$$

۲۹٪ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که به تبدیل عبارتهای فارسی به ریاضی دقت داشته‌اند و با ایجاد معادله به حل آن پرداخته‌اند.

نکته

(عرض + طول) = ۲ محیط مستطیل
 عرض \times طول = مساحت مستطیل

گزینه ۱۰

سن فرزندان را از کوچک به بزرگ a ، b و c در نظر می‌گیریم پس:

$$b - a = 5 \quad \text{اختلاف سنی دو فرزند کوچک‌تر}$$

$$c = a + b \quad \text{سن فرزند بزرگ‌تر برابر مجموع دو فرزند دیگر}$$

$$a + b + c = 26 \Rightarrow c + c = 26 \quad \text{مجموع سن فرزندان}$$

$$\Rightarrow 2c = 26 \Rightarrow c = 13 \quad \text{سن بزرگ‌ترین فرزند}$$

$$a + b = 13$$

$$-a + b = 5 \Rightarrow 2b = 18 \Rightarrow b = 9$$

بنابراین:

$$a + b = 13 \Rightarrow a + 9 = 13 \Rightarrow a = 4$$

۲۸٪ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که به تبدیل فارسی به ریاضی عبارات توجه ویژه‌ای داشته‌اند.

گزینه ۱۱

عدد موردنظر را x فرض می‌کنیم:

$$\frac{x}{2} = \text{نصف عدد و } \frac{x}{3} = \text{ثلث عدد}$$

حال معادله را تشکیل می‌دهیم:

$$\frac{x}{2} + 2 = \frac{x}{3} + 6 \quad \text{کل معادله را در مخرج مشترک کسرها یعنی عدد ۶ ضرب می‌کنیم}$$

$$6 \times \frac{x}{2} + 6 \times 2 = 6 \times \frac{x}{3} + 6 \times 6 \Rightarrow 3x + 12 = 2x + 36$$

$$\Rightarrow 3x - 2x = 36 - 12 \Rightarrow x = 24$$

۲۸٪ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که به تبدیل عبارت فارسی به زبان ریاضی و حل معادله درجه اول توجه داشته‌اند.

نکته

$\frac{x}{2} = \text{نصف عدد}$ $\frac{x}{3} = \text{ثلث عدد}$
 $\frac{x}{4} = \text{ربع عدد}$ $\frac{x}{5} = \text{خمس عدد}$

نکته

عدد x را در نظر بگیرد:

$$\text{نصف عدد} = \frac{1}{2}x$$

$$\text{ثلث عدد} = \frac{1}{3}x$$

$$\text{نصف ثلث عدد} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}x \right) = \frac{1}{6}x$$

$$\text{ثلث نصف عدد} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}x \right) = \frac{1}{6}x$$

گزینه ۹

طول مستطیل را x و عرض آن را y فرض می‌کنیم بنابراین:

$$4y = x \Rightarrow y = \frac{1}{4}x \Rightarrow \text{عرض ربع طول}$$

$$\text{محیط} = 2(x + y) \Rightarrow \text{عرض} + \text{طول} = 2 \Rightarrow \text{محیط مستطیل}$$

$$\frac{x=4y}{\text{محیط}=40} \rightarrow 2(4y + y) = 40 \xrightarrow{+(2)} 5y = 20 \Rightarrow y = 4$$

$$x = 4y \xrightarrow{y=4} x = 4(4) \Rightarrow x = 16$$

$$16 \times 4 = 64 = \text{عرض} \times \text{طول} = \text{مساحت مستطیل}$$

پاسخ تشریحی فصل اول

گزینه ۱۵ «۲»

تعداد سکه‌های ۵۰ تومانی را x و تعداد سکه‌های ۱۰۰ تومانی را y فرض می‌کنیم؛ بنابراین $x + y = 100$ (در فلک ۱۰۰ سکه وجود دارد) مجموع سکه‌ها ۶۰۰۰ تومان می‌باشد یعنی $50x + 100y = 6000$. با حل دستگاه دو معادله دو مجهول مقادیر x و y را به دست می‌آوریم:

$$(-50) \begin{cases} x + y = 100 \\ 50x + 100y = 6000 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -50x - 50y = -5000 \\ 50x + 100y = 6000 \end{cases}$$

$$50y = 1000 \Rightarrow y = \frac{1000}{50} = 20$$

$$x = 100 - y = 100 - 20 = 80 : \text{تعداد سکه‌های } 50 \text{ تومانی}$$

گزینه ۱۶ «۱»

قیمت دفتر را x و قیمت خودکار را y فرض می‌کنیم بنابراین:

$$\begin{cases} (5) \times \begin{cases} 3x + 4y = 30 \\ 5x + 6y = 49 \end{cases} \\ (-3) \times \begin{cases} 3x + 4y = 30 \\ 5x + 6y = 49 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 15x + 20y = 150 \\ -15x - 18y = -147 \end{cases} \end{cases}$$

$$2y = 3 \Rightarrow y = \frac{3}{2}$$

$$5x + 6y = 49 \xrightarrow{y = \frac{3}{2}} 5x + 6\left(\frac{3}{2}\right) = 49$$

$$\Rightarrow 5x + 9 = 49 \Rightarrow 5x = 49 - 9 \Rightarrow 5x = 40 \Rightarrow x = \frac{40}{5} = 8 \text{ قیمت دفتر } = 8$$

۱۹٪ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که به تبدیل عبارتهای فارسی به ریاضی و حل دستگاه دو معادله دو مجهولی اهمیت داده‌اند.

نکته

دو معادله $ax + by = c$ و $a'x + b'y = c'$ به تنهایی قابل حل نیستند لذا با تشکیل دستگاه دو معادله دو مجهولی می‌توان مقادیر x و y را به دست آورد.

گزینه ۱۷ «۲»

طول میله را x در نظر می‌گیریم، میله را به ۲ قسمت $\frac{1}{4}x$ و $\frac{3}{4}x$ تبدیل می‌کنیم:

$$\frac{3}{4}x - \frac{1}{4}x = 60 : \text{اختلاف طول‌ها}$$

$$\frac{2}{4}x = 60 \Rightarrow \frac{1}{2}x = 60 \Rightarrow x = 120$$

۱۹٪ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که به تشکیل معادله ریاضی از جملات فارسی و حل آن اشراف داشته‌اند.

نکته

اگر طول میله‌ای x باشد و به ۲ قسمت مساوی تقسیم کنیم هر قسمت $\frac{1}{2}x$ خواهد بود و اگر به ۳ قسمت مساوی تقسیم کنیم هر قسمت $\frac{1}{3}x$ خواهد بود.

گزینه ۱۲ «۳»

$$2ax - 8 = \frac{5}{y}x - a \xrightarrow{x=4} 2a(4) - 8 = \frac{5}{y}(4) - a$$

$$\Rightarrow 8a - 8 = 10 - a \Rightarrow 8a + a = 10 + 8 \Rightarrow 9a = 18 \Rightarrow a = \frac{18}{9} = 2$$

۲۴٪ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که به حل معادله درجه اول اشراف داشته‌اند.

نکته

در هر معادله با چند پارامتر یکی از آن‌ها پارامتر اصلی محسوب می‌شود. زمانی که جواب داده می‌شود یعنی آن را به جای پارامتر اصلی باید جایگذاری کرد تا پارامتر دیگر خواسته شده به دست آید.

گزینه ۱۳ «۲»

مقادیر موجود در هر کفه ترازو را با هم جمع می‌کنیم و مساوی با هم قرار می‌دهیم.

$$2x - 1 + 2x + x + x + 9 = 6x + 8$$

$$3x + x + 16 = 4x + 16 \text{ کفه سمت راست}$$

$$6x + 8 = 4x + 16 \Rightarrow 6x - 4x = 16 - 8 \Rightarrow 2x = 8 \Rightarrow x = \frac{8}{2} = 4$$

۳۱٪ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که به عمل اصلی بین چند جمله‌ای‌ها توجه داشته‌اند.

نکته

در جمع و تفریق چند جمله‌ای‌ها جملات متشابه با هم جمع یا تفریق می‌شوند. به عنوان مثال:

$$3x^2 - 4x^2 + x + 2x = (3 - 4)x^2 + (1 + 2)x = -x^2 + 3x$$

گزینه ۱۴ «۴»

عدد موردنظر را x فرض می‌کنیم:

$$2x + 7 = 2x + 7 \text{ دو برابر عددی، به علاوه } 7$$

$$8 \text{ منهای } 8 = \frac{1}{y}(-x) - 8 = -\frac{1}{y}x - 8$$

دو عبارت را برابر قرار داده و معادله حاصل را حل می‌کنیم:

$$2x + 7 = -\frac{1}{y}x - 8 \xrightarrow{\times y} 2y(x + 7) = 2\left(-\frac{1}{y}x - 8\right)$$

$$\Rightarrow 4x + 14 = -x - 16 \Rightarrow 4x + x = -16 - 14 \Rightarrow 5x = -30$$

$$\Rightarrow x = \frac{-30}{5} \Rightarrow x = -6$$

۲۳٪ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که به تبدیل عبارت فارسی به زبان ریاضی و حل معادله درجه اول توجه داشته‌اند.

معادلهٔ مجموع حقوق‌ها را که دارای ۳ متغیر است به تنها یک متغیر b که حقوق تکنسین است تبدیل می‌کنیم، پس a و c را برحسب b جایگزین می‌کنیم.

$$\begin{cases} a = 2b \\ c = 3b \end{cases}$$

$$5(3b) + 10(2b) + 15b = 75$$

$$5 \cdot b = 75 \Rightarrow b = \frac{75}{5} = \frac{15}{1} = 15$$

۱۸٪ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که به تبدیل معادل فارسی به زبان ریاضی و حل معادله دارای چندین متغیر توجه ویژه‌ای داشته‌اند.

نکته

در این تیپ تست‌ها باید معادله‌ای که دارای چند متغیر است را به یک متغیر تبدیل کرد، مثلاً در تست فوق a و c را برحسب b نوشته و پس از جایگذاری مقدار b را به دست آورده‌ایم.

گزینهٔ «۴»

در مثلث متساوی‌الساقین دو ضلع با هم برابر خواهند بود:

$$1) \quad 3x + 1 = x + 9 \Rightarrow 3x - x = 9 - 1 \Rightarrow 2x = 8 \Rightarrow x = \frac{8}{2} = 4$$

$$2) \quad 3x + 1 = 2x + 6 \Rightarrow 3x - 2x = 6 - 1 \Rightarrow x = 5$$

$$3) \quad 2x + 6 = x + 9 \Rightarrow 2x - x = 9 - 6 \Rightarrow x = 3$$

بنابراین اگر x یکی از اعضای مجموعه $\{3, 4, 5\}$ باشد دو ضلع مثلث برابر می‌شود و مثلث متساوی‌الساقین خواهیم داشت.

۲۵٪ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که به تعریف مثلث متساوی‌الساقین و حل معادله درجه اول اشراف داشته‌اند.

گزینهٔ «۴»

$$x = -3 \Rightarrow x + 3 = 0$$

$$x = 5 \Rightarrow x - 5 = 0$$

با ضرب عامل‌های به دست آمده معادله درجه دوم را می‌نویسیم:

$$(x + 3)(x - 5) = 0 \xrightarrow{\text{جملهٔ مشترک}} x^2 - 2x - 15 = 0$$

۳۰٪ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که شناخت کافی نسبت به نوشتن معادله درجه دوم با استفاده از جواب‌ها داشته‌اند.

نکته

اگر $x = a$ و $x = b$ جواب‌های معادلهٔ درجهٔ دوم باشند بنابراین معادلهٔ درجه دوم به صورت $(x - a)(x - b) = 0$ می‌باشد.

گزینهٔ «۳»

ابتدا با مساوی قرار دادن مقدار طول‌ها مجهول x را به دست می‌آوریم:

$$2x - 1 = x + 7 \Rightarrow 2x - x = 7 + 1 \Rightarrow 2x = 8 \Rightarrow x = \frac{8}{2} = 4$$

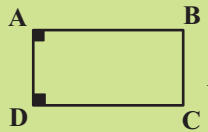
با قرار دادن $x = 4$ طول مستطیل $(3x - 1)$ یا $(x + 7)$ برابر ۱۱ و عرض مستطیل $(x + 2)$ برابر ۶ می‌شود.

$S = \text{طول} \times \text{عرض} = 11 \times 6 = 66$ مساحت مستطیل

۳۱٪ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که شناخت کافی نسبت به اشکال هندسی داشته‌اند.

نکته

در هر مستطیل طول‌ها با هم و عرض‌ها با هم برابرند.



$AB = DC, AD = BC$

گزینهٔ «۱»

عدد موردنظر را x در نظر می‌گیریم:

$$2x + 6 \Rightarrow \text{دو برابر عدد به اضافه ۶}$$

$$31 - \frac{x}{2} \Rightarrow \text{تفاضل نصف عدد از ۳۱}$$

$$2x + 6 = 31 - \frac{x}{2} \xrightarrow{\times 2} 4x + 12 = 62 - x$$

$$\Rightarrow 4x + x = 62 - 12 \Rightarrow 5x = 50 \Rightarrow x = \frac{50}{5} = 10$$

۲۵٪ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که به تبدیل عبارت فارسی به ریاضی دقت داشته‌اند.

نکته

اگر عدد را x در نظر بگیرید:

$a - x = \text{تفاضل عدد از } a$

$|a - x|$ یا $|x - a| = \text{اختلاف عدد } a \text{ و } x$

گزینهٔ «۲»

حقوق مهندس را a ، حقوق تکنسین را b و حقوق مدیر را c فرض می‌کنیم:

$$a = 2b \Rightarrow \text{مهندس دو برابر تکنسین}$$

$$a = \frac{2}{3}c \xrightarrow{a=2b} \text{مدیر } \frac{2}{3} \text{ مهندس}$$

$$2b = \frac{2}{3}c \Rightarrow b = \frac{1}{3}c \Rightarrow c = 3b$$

$5c + 10a + 15b = 75 \Rightarrow \text{مجموع حقوق‌ها}$

پاسخ تشریحی فصل اول

اگر معادله درجه دوم به دست آمده در هر عددی غیر صفر ضرب شود معادله درجه دوم جدیدی حاصل می‌شود که ریشه‌های آن همان ریشه‌های معادله اول خواهد بود.

۲۶٪ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند. چرا که به نوشتن معادله درجه دوم با استفاده از ریشه‌ها اشراف داشته‌اند.

نکته

اگر $x = a$ و $x = b$ ریشه‌های معادله درجه دوم باشند. معادله درجه دوم برابر است با:

$$(x-a)(x-b) = 0$$

گزینه ۲۶ «۴»

$$\begin{aligned} 8 + x^2 &= 3x^2 \Rightarrow 8 = 2x^2 - x^2 \Rightarrow 8 = 2x^2 \\ 2x^2 &= 8 \Rightarrow x^2 = \frac{8}{2} = 4 \xrightarrow{\text{ریشه‌گیری}} x = \pm 2 \end{aligned}$$

۲۳٪ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند. چرا که به روش ریشه‌گیری در حل معادله درجه دوم دقت کافی داشته‌اند.

نکته

روش ریشه‌گیری:

در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ اگر $b = 0$ باشد، با این شرط که a و c مختلف‌العلامت باشند، دو ریشه قرینه داریم.

$$ax^2 + c = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{-c}{a} \xrightarrow{\text{ریشه‌گیری}} x = \pm \sqrt{\frac{-c}{a}}$$

گزینه ۲۷ «۴»

$$\begin{aligned} (3x+2)^2 &= (3x)^2 + 2(3x)(2) + (2)^2 = 9x^2 + 12x + 4 \\ \text{حال معادله اصلی را ساده می‌کنیم:} \\ (3x+2)^2 &= 12x + 40 \Rightarrow 9x^2 + 12x + 4 = 12x + 40 \\ \Rightarrow 9x^2 + 4 &= 40 \Rightarrow 9x^2 = 40 - 4 \Rightarrow 9x^2 = 36 \Rightarrow x^2 = \frac{36}{9} \\ \Rightarrow x^2 &= 4 \xrightarrow{\text{ریشه‌گیری}} x = \pm 2 \end{aligned}$$

۲۴٪ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند. چرا که به اتحاد و تجزیه و روش ریشه‌گیری در حل معادله درجه دوم اشراف داشته‌اند.

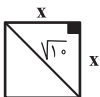
نکته

۱) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$: اتحاد مربع ۲ جمله‌ای

۲) $x^2 = k \xrightarrow{\text{ریشه‌گیری}} x = \pm \sqrt{k}$ $k \geq 0$

گزینه ۲۸ «۲»

ضلع مربع را x در نظر می‌گیریم و داریم:



گزینه ۲۳ «۳»

روش اول: ریشه داده شده را در معادله قرار می‌دهیم تا مقدار مجهول k را به دست آوریم و سپس با جای گذاری k به دست آمده، معادله درجه دوم را حل می‌کنیم تا ریشه دیگر به دست آید:

$$\begin{aligned} x^2 + kx + 6 &= 0 \xrightarrow{x=-2} (-2)^2 + k(-2) + 6 = 0 \\ \Rightarrow 4 - 2k + 6 &= 0 \Rightarrow -2k + 10 = 0 \Rightarrow -2k = -10 \Rightarrow k = 5 \\ \xrightarrow{\text{جمله مشترک}} (x+2)(x+3) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x+2=0 \Rightarrow x=-2 \\ x+3=0 \Rightarrow x=-3 \end{cases}$$

روش دوم: در معادله داده شده مقادیر $a=1$ و $c=6$ معلوم هستند.

می‌دانیم ضرب ریشه‌ها از رابطه $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$ به دست می‌آید. پس:

$$x_1 \times x_2 = \frac{c}{a} \quad \begin{matrix} a=1, c=6 \\ x_1=-2 \end{matrix} \Rightarrow -2x = \frac{6}{1} \Rightarrow -2x = 6 \Rightarrow x = \frac{6}{-2} = -3$$

۲۴٪ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند. چرا که به ریشه و حل معادله درجه دوم و حاصل ضرب ریشه‌ها اشراف داشته‌اند.

نکته

۱) مقدار ریشه در معادله صدق می‌کند یعنی با جای‌گذاری ریشه به جای x تساوی برقرار می‌شود.

۲) ضرب دو ریشه در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$:

$$P = x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

گزینه ۲۴ «۴»

$$\begin{aligned} x = 3 &\Rightarrow x - 3 = 0 \\ x = -4 &\Rightarrow x + 4 = 0 \end{aligned}$$

با ضرب عامل‌های ایجاد شده معادله درجه دوم را می‌نویسیم:

$$(x-3)(x+4) = 0 \xrightarrow{\text{جمله مشترک}} x^2 + x - 12 = 0$$

۲۷٪ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند. چرا که به نوشتن معادله درجه دوم با در دست داشتن جواب‌های معادله اشراف داشته‌اند.

نکته

اگر $x = a$ و $x = b$ جواب‌های معادله درجه دوم باشند از حاصل ضرب عامل‌های $(x-a)$ در $(x-b)$ می‌توان معادله را نوشت.

گزینه ۲۵ «۱»

$$\begin{aligned} x = 3 &\Rightarrow x - 3 = 0 \\ x = -8 &\Rightarrow x + 8 = 0 \end{aligned}$$

از حاصل ضرب عامل‌ها معادله درجه دوم ساخته می‌شود:

$$(x-3)(x+8) = 0 \xrightarrow{\text{جمله مشترک}} x^2 + 5x - 24 = 0$$

نکته

$$(ax + b)^2 = c \xrightarrow[\text{ریشه‌گیری}]{c \geq 0} ax + b = \pm \sqrt{c}$$

گزینه ۳۱ «۱»

عدد میانی را x فرض می‌کنیم، عدد بعدی آن که مضرب ۵ باشد $x + 5$ و عدد قبلی آن که مضرب ۵ باشد $x - 5$ می‌باشد. اختلاف حاصل ضرب عدد بزرگتر و کوچکتر از عدد میانی ۱۸۵ می‌باشد.

$$\underbrace{(x-5)(x+5)}_{\text{مزدوج}} - x = 185 \Rightarrow x^2 - 25 - x = 185$$

$$\Rightarrow x^2 - 25 - x - 185 = 0 \Rightarrow x^2 - x - 210 = 0 \xrightarrow{\text{جمله مشترک}}$$

$$(x-15)(x+14) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 15 \\ x = -14 \end{cases}$$

عدد طبیعی منفی نیست. $x = -14$

پس $x = 15$ قابل قبول است و سه عدد متوالی مضرب ۵ به صورت ۱۰ و ۱۵ و ۲۰ می‌باشد.

۲۱٪ دانش آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که اولاً در تبدیل عبارات فارسی به زبان ریاضی دقت داشته‌اند. ثانیاً به حل معادله درجه دوم به روش تجزیه اشراف داشته‌اند.

نکته

عدد طبیعی x را در نظر بگیرید:

الف) $x-2, x-1, x, x+1, x+2, \dots$ اعداد متوالی (الف)

ب) $x-4, x-2, x, x+2, x+4, \dots$ اعداد زوج و فرد متوالی (ب)

ج) $x-6, x-3, x, x+3, x+6, \dots$ اعداد متوالی مضرب ۳ (ج)

گزینه ۳۲ «۳»

عبارت سمت راست را به سمت چپ تساوی آورده و از $(x-3)$ فاکتور می‌گیریم:

$$(x+2)(x-3) = x-3 \Rightarrow (x+2)(x-3) - (x-3) = 0$$

$$\xrightarrow{\text{فاکتور از } (x-3)} (x-3)(x+2-1) = 0 \Rightarrow (x-3)(x+1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-3=0 \Rightarrow x=3 \\ x+1=0 \Rightarrow x=-1 \end{cases}$$

۲۶٪ دانش آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که به ساختن معادله درجه دوم و حل آن به روش Δ دقت داشته‌اند.

گزینه ۳۳ «۲»

$$(x+2)(x-4) \xrightarrow{\text{اتحاد جمله مشترک}} x^2 + (2-4)x + 2(-4) = x^2 - 2x - 8$$

عبارت سمت راست را به سمت چپ تساوی برده و معادله را پس از ساده کردن حل می‌کنیم:

$$(x+2)(x-4) + 3(x-4) = 0$$

$$x^2 - 2x - 8 + 3x - 12 = 0 \Rightarrow x^2 + x - 20 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{تجزیه جمله مشترک}} (x+5)(x-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x+5=0 \Rightarrow x=-5 \\ x-4=0 \Rightarrow x=4 \end{cases}$$

طبق رابطه فیثاغورس داریم:

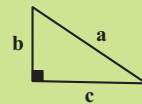
$$x^2 + x^2 = (\sqrt{10})^2 \Rightarrow 2x^2 = 10 \Rightarrow x^2 = \frac{10}{2} \Rightarrow x^2 = 5 \xrightarrow{\text{ریشه‌گیری}}$$

$$x = \pm \sqrt{5} \xrightarrow{\text{ضلع عددی مثبت است}} x = \sqrt{5}$$

محیط مربع مجموع اضلاع آن یعنی $4x$ پس $4\sqrt{5}$ می‌باشد.

۲۰٪ دانش آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که به رابطه فیثاغورس و حل معادله درجه دوم دقت داشته‌اند.

نکته



$$\xrightarrow{\text{فیثاغورس}} a^2 = b^2 + c^2$$

گزینه ۲۹ «۲»

$$(x+2)(x-3) \xrightarrow{\text{جمله مشترک}} x^2 - x - 6$$

$$(x+2)(x-3) = x+9 \Rightarrow x^2 - x - 6 = x+9$$

$$\Rightarrow x^2 - x - 6 - x - 9 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 15 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{جمله مشترک}} (x-5)(x+3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = -3 \end{cases}$$

ریشه کوچکتر $x = -3$

۲۲٪ دانش آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که به حل معادله درجه دوم به روش تجزیه اشراف داشته‌اند.

نکته

یکی از روش‌های حل معادله درجه دوم روش تجزیه می‌باشد که با استفاده از اتحادهای مربع دو جمله‌ای - مزدوج - جمله مشترک به $a \times b = 0$ تجزیه صورت می‌گیرد که $a = 0$ یا $b = 0$ خواهد بود.

گزینه ۳۰ «۲»

$$(3-4x)^2 = 25 \xrightarrow{\text{ریشه‌گیری}} 3-4x = \pm 5$$

$$1) 3-4x = 5 \Rightarrow -4x = 5-3 \Rightarrow -4x = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$$

$$2) 3-4x = -5 \Rightarrow -4x = -5-3 \Rightarrow -4x = -8 \Rightarrow x = \frac{-8}{-4} = 2$$

$$\text{فاکتور مطلق اختلاف ریشه‌ها: } |x_1 - x_2| = \left| 2 - \left(-\frac{1}{2}\right) \right|$$

$$= \left| 2 + \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{4}{2} + \frac{1}{2} \right| = \frac{5}{2}$$

۲۲٪ دانش آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که به حل معادله درجه دوم به روش ریشه‌گیری دقت لازم را داشته‌اند.

پاسخ تشریحی فصل اول



معادله سود را داریم، نقاط سر به سر مقادیر x (تعداد کالا) هستند که به ازای آنها سود صفر می‌گردد:

جمله مشترک $P(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$

$$(x-3)(x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x-3=0 \Rightarrow x=3 \\ x+1=0 \Rightarrow x=-1 \end{cases}$$

x تعداد کالا می‌باشد که نمی‌تواند منفی باشد.

۱۹٪ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که به مفهوم نقطه سر به سر دقت داشته‌اند.



اگر معادله سود $(P(x))$ را برابر صفر قرار دهیم؛ مقادیر x یعنی نقاط سر به سر به دست می‌آیند که x کم‌تر، نقطه سر به سر مطلوب است.

گزینه ۳۷

عبارت سمت راست را به چپ آورده و از $(x-3)$ فاکتور می‌گیریم.

$$\begin{aligned} (x-4)(x-3) &= (x-3)(2-x) \\ \Rightarrow (x-4)(x-3) - (x-3)(2-x) &= 0 \\ \xrightarrow{\text{فاکتور از } (x-3)} (x-3)(x-4 - (2-x)) &= 0 \\ \Rightarrow (x-3)(x-4-2+x) &= 0 \Rightarrow (x-3)(2x-6) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x-3=0 \Rightarrow x=3 \\ 2x-6=0 \Rightarrow 2x=6 \Rightarrow x=\frac{6}{2}=3 \end{cases}$$

پس ریشه مضاعف مثبت $x=3$ داریم.

۱۲٪ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که به روش‌های حل معادلات درجه دوم (تجزیه، ریشه‌گیری، مربع کامل، روش کلی یا Δ) دقت داشته‌اند.



هر معادله درجه دوم به صورت $(x-a)(x-a) = 0$ یا $(x-a)^2 = 0$ دارای ریشه مضاعف $x=a$ می‌باشد.

گزینه ۳۸

ابتدا از x^2 فاکتور می‌گیریم:

$$x^4 - 4x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x^2 - 4) = 0$$

$$x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ مضاعف}$$

$$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \xrightarrow{\text{ریشه‌گیری}} x = \pm 2$$

$$0 + 2 + (-2) = 0 \text{ مجموع ریشه‌ها}$$

فاکتور از $(x-4) \rightarrow (x-4)(x+2+3) = 0 \Rightarrow (x-4)(x+5) = 0$ روش دوم

$$\begin{cases} x-4=0 \Rightarrow x=4 \\ x+5=0 \Rightarrow x=-5 \end{cases}$$

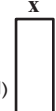
۲۱٪ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که به ساده کردن و حل معادله درجه دوم به روش مناسب اشراف داشته‌اند.



برای حل هر معادله باید ابتدا آن را ساده کرده و سپس به روش مناسب دلخواه و البته مناسب آن را حل کرد.

گزینه ۳۴

شکل داده شده شامل دو مستطیل می‌باشد که با جمع مساحت آن‌ها و برابر ۶۰ قرار دادن آن مقدار x به دست می‌آید:

الف)  \Rightarrow مساحت = عرض \times طول = $5x$

ب)  \Rightarrow مساحت = عرض \times طول = $x(x+6)$

مجموع مساحت‌ها برابر ۶۰ می‌باشد:

$$\begin{aligned} x(x+6) + 5x &= 60 \Rightarrow x^2 + 6x + 5x - 60 = 0 \\ \Rightarrow x^2 + 11x - 60 &= 0 \xrightarrow{\text{جمله مشترک}} (x+15)(x-4) = 0 \\ \begin{cases} x+15=0 \Rightarrow x=-15 \text{ طول ضلع منفی نیست} \\ x-4=0 \Rightarrow x=4 \end{cases} \end{aligned}$$

۲۲٪ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که به نوشتن مساحت اشکال و تبدیل آن‌ها به معادله درجه دوم و حل معادله اشراف داشته‌اند.



اتحاد جمله مشترک $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$

گزینه ۳۵

$$\begin{aligned} (x-8)(x+6) \xrightarrow{\text{جمله مشترک}} x^2 + (-8+6)x + (-8)(6) \\ = x^2 - 2x - 48 \end{aligned}$$

$$(x-8)(x+6) = 2x - 16 \Rightarrow x^2 - 2x - 48 = 2x - 16$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x - 48 - 2x + 16 = 0$$

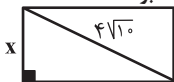
$$\Rightarrow x^2 - 4x - 32 = 0 \xrightarrow{\text{جمله مشترک}} (x-8)(x+4) = 0$$

$$\begin{cases} x-8=0 \Rightarrow x=8 \\ x+4=0 \Rightarrow x=-4 \end{cases}$$

۲۰٪ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که به اتحاد و تجزیه اشراف کامل داشته‌اند.

۴۱ گزینه «۲»

عرض مستطیل را x فرض می‌کنیم و طول آن $3x$ خواهد بود.



طبق رابطه فیثاغورس توان دوم وتر برابر مجموع ضلع‌های قائمه می‌باشد پس:

$$(x)^2 + (3x)^2 = (4\sqrt{10})^2$$

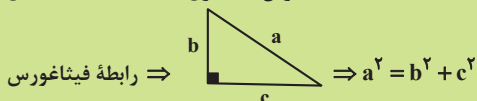
$$\Rightarrow x^2 + 9x^2 = 16 \times 10 \Rightarrow 10x^2 = 160 \Rightarrow x^2 = \frac{160}{10}$$

پس مساحت مستطیل برابر است با: $4 \times 12 = 48$ عرض x عرض x طول (عرض مستطیل ۴ و طول آن $3x$) برابر ۱۲ می‌باشد.)

۲۸٪ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که رابطه فیثاغورس را می‌دانستند و به حل معادله درجه دوم اشراف داشته‌اند.

نکته

عرض \times طول = مساحت مستطیل



۴۲ گزینه «۴»

از عبارت $(x-5)^2$ فاکتور می‌گیریم:

$$(2x-1)(x-5)^2 + 11(x-5)^2 = 0 \Rightarrow (x-5)^2(2x-1+11) = 0$$

$$\Rightarrow (x-5)^2(2x+10) = 0$$

$$\begin{cases} (x-5)^2 = 0 \Rightarrow x-5=0 \Rightarrow x=5 \\ 2x+10=0 \Rightarrow 2x=-10 \Rightarrow x = \frac{-10}{2} = -5 \end{cases}$$

مجموع ریشه‌ها: $x_1 + x_2 = 5 + (-5) = 0$

۱۸٪ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که به روش تجزیه در حل معادله درجه دوم توجه داشته‌اند.

نکته

فاکتور از $(x-c)^2$

$$ax(x-c)^2 + b(x-c)^2 = 0 \Rightarrow (x-c)^2(ax+b) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (x-c)^2 = 0 \Rightarrow x=c \\ ax+b=0 \Rightarrow x = \frac{-b}{a} \end{cases}$$

۴۳ گزینه «۴»

ابتدا معادله را به ضریب x^2 یعنی (۴) تقسیم می‌کنیم تا ضریب x^2 برابر

$$4x^2 - 4x - 5 = 0 \xrightarrow{+4} x^2 - x - \frac{5}{4} = 0$$

یک گردد:

مقدار عدد ثابت را به سمت راست برده و $\frac{b^2}{4}$ را به دو طرف تساوی اضافه

$$x^2 - x = \frac{5}{4} \Rightarrow b = -1 \Rightarrow \frac{b^2}{4} = \frac{(-1)^2}{4} = \frac{1}{4}$$

می‌کنیم:

۱۷٪ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که به تجزیه و حل معادله درجه دوم به روش ریشه‌گیری شناخت کافی داشته‌اند.

نکته

$$1) a \times b = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ یا } b = 0$$

$$2) x^2 = k \xrightarrow[k \geq 0]{\text{ریشه‌گیری}} x = \pm\sqrt{k}$$

۳۹ گزینه «۳»

ابتدا معادله را بر ۳ تقسیم می‌کنیم:

$$3x^2 - 12x - 63 = 0 \xrightarrow{+3} x^2 - 4x - 21 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{جمله مشترک}} (x-7)(x+3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=7 \\ x=-3 \end{cases}$$

ریشه کوچکتر $x = -3$

۱۹٪ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که به حل معادله درجه دوم به روش تجزیه دقت لازم را داشته‌اند.

نکته

روش تجزیه یکی از روش‌های حل معادله درجه دوم می‌باشد. این روش‌ها عبارتند از: (مربع ۲ جمله‌ای - مزدوج - جمله مشترک)

۴۰ گزینه «۳»

اولین عدد فرد را x و عدد فرد بعدی آن $x+2$ خواهد بود بنابراین:

$$x^2 + (x+2)^2 = x^2 + x^2 + 4x + 4$$

اتحاد مربع دو جمله‌ای

$$= 2x^2 + 4x + 4$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 4x + 4 = 290 \xrightarrow{+2} x^2 + 2x + 2 = 145$$

$$\Rightarrow x^2 + 2x + 2 - 145 = 0 \Rightarrow x^2 + 2x - 143 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{جمله مشترک}} (x+13)(x-11) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=11 \\ x=-13 \end{cases}$$

$x = -13$ قابل قبول نیست چون x باید عدد طبیعی باشد.

دو عدد فرد متوالی x و $x+2$ یعنی ۱۱ و ۱۳ خواهند بود.

۱۹٪ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که به نحوه نوشتن اعداد زوج و فرد متوالی توجه داشته‌اند و به حل معادله درجه دوم اشراف داشته‌اند.

نکته

اگر x عددی فرد باشد، اعداد فرد متوالی به صورت $x+2$ و x و $x-2$ خواهد بود.

پاسخ تشریحی فصل اول

۲۰٪ دانش آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که به حل معادله درجه دوم به روش مربع کامل اشراف داشته‌اند.

۴۷ گزینه «۲»

ابتدا کل معادله را به ضریب x^2 تقسیم می‌کنیم:

$$2x^2 + 3x = 1 \xrightarrow{(+2)} x^2 + \frac{3}{2}x = \frac{1}{2}$$

می‌دانیم ضریب x برابر b است. مقدار $\frac{b^2}{4}$ را به دو طرف تساوی اضافه

$$\frac{b^2}{4} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} = \frac{9}{16}$$

می‌کنیم:

$$x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{9}{16} = \frac{1}{2} + \frac{9}{16}$$

سمت چپ تساوی اتحاد مربع دو جمله‌ای است و سمت راست را ساده

$$\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{1 \times 8}{2 \times 8} + \frac{9}{16} \Rightarrow \left(x + \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{17}{16}$$

می‌کنیم.

۱۳٪ دانش آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که حل معادله درجه دوم به روش مربع کامل کردن را به درستی یاد گرفته‌اند.

نکته

حل معادله درجه دوم به روش مربع کامل:

۱- اگر ضریب x^2 عددی غیر از ۱ باشد، ابتدا معادله را بر ضریب x^2 تقسیم می‌کنیم.

۲- عدد ثابت معادله را به سمت راست تساوی می‌بریم.

۳- مقدار $\left(\frac{b}{2}\right)^2$ را به طرفین تساوی اضافه می‌کنیم.

۴- سمت چپ تساوی اتحاد مربع دو جمله‌ای خواهد بود.

۵- به روش ریشه‌گیری معادله ایجاد شده را حل می‌کنیم.

۴۸ گزینه «۳»

$$-2x^2 + 9x + 5 = 0 \Rightarrow a = -2, b = 9, c = 5$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (9)^2 - 4(-2)(5) = 81 + 40 = 121$$

۳۱٪ دانش آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که شناخت کافی به ضرایب در معادله درجه دوم داشته‌اند و می‌دانستند $\Delta = b^2 - 4ac$.

نکته

در معادله درجه ۲، دلتای معادله از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac$$

۲۵٪ دانش آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که حل معادله درجه دوم به روش مربع کامل را به درستی یاد گرفته‌اند.

نکته

در حل معادله درجه دوم به روش مربع کامل اگر x^2 ضریبی غیر از یک داشته باشد ابتدا کل معادله را به ضریب x^2 تقسیم می‌کنیم، سپس عدد ثابت را به سمت راست تساوی برده و $\frac{b^2}{4}$ را به طرفین تساوی اضافه می‌کنیم.

۴۴ گزینه «۴»

در حل معادله درجه دوم به روش مربع کامل اگر ضریب x^2 برابر یک باشد مقدار $\frac{b^2}{4}$ را به طرفین معادله اضافه می‌کنیم:

$$b = -6 \Rightarrow \frac{b^2}{4} = \frac{(-6)^2}{4} = \frac{36}{4} = 9$$

۳۱٪ دانش آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که به حل معادله درجه دوم به روش مربع کامل دقت داشته‌اند.

نکته

در معادله درجه دوم $x^2 + bx = c$ برای حل به روش مربع کامل، مقدار $\frac{b^2}{4}$ را به طرفین معادله اضافه می‌کنیم.

۴۵ گزینه «۱»

در معادله $x^2 - 10x = 1$ کافی است $\frac{b^2}{4}$ را به دو طرف تساوی اضافه کنیم:

$$b = -10 \Rightarrow \frac{b^2}{4} = \frac{(-10)^2}{4} = \frac{100}{4} = 25$$

$$x^2 - 10x + 25 = 1 + 25 \Rightarrow (x - 5)^2 = 26$$

۲۳٪ دانش آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که حل معادله درجه دوم به روش مربع کامل را به درستی یاد گرفته‌اند.

نکته

در حل معادله درجه دوم $x^2 + bx = c$ به روش مربع کامل کردن مقدار $\frac{b^2}{4}$ را به دو طرف تساوی اضافه می‌کنیم.

۴۶ گزینه «۱»

ابتدا معادله را بر ضریب x^2 تقسیم می‌کنیم:

$$5x^2 - 8x = 0 \xrightarrow{+(\frac{8}{5})} x^2 - \frac{8}{5}x = 0$$

مقدار $\frac{b^2}{4}$ را به طرفین معادله اضافه می‌کنیم:

$$b = -\frac{8}{5} \Rightarrow \frac{b^2}{4} = \frac{(-\frac{8}{5})^2}{4} = \frac{64}{25} = \frac{64}{100}$$

گزینه «۱» ۴۹

$$2x^2 - 7x + 3 = 0 \Rightarrow a = 2, b = -7, c = 3$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4(2)(3) = 49 - 24 = 25$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{25}}{2(2)}$$

$$x_1 = \frac{7+5}{4} = \frac{12}{4} = 3$$

$$x_2 = \frac{7-5}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

ریشه کوچکتر

۲۸٪ دانش آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند. چرا که به روش حل معادله درجه دوم به روش کلی مسلط بوده‌اند.

نکته

روش حل معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ به روش کلی یا Δ :

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

گزینه «۴» ۵۰

$$2x^2 - 3x + 1 = 0 \Rightarrow a = 2, b = -3, c = 1$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4(2)(1) = 9 - 8 = 1$$

برای حل این معادله درجه دوم چون مجموع ضرایب صفر است داریم:

$$a + b + c = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = \frac{c}{a} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

جواب کوچکتر

۳۰٪ دانش آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند. چرا که می‌دانستند $\Delta = b^2 - 4ac$ و به حل معادله درجه دوم به روش کلی یا Δ و یا روش خاص بیان شده در نکته توجه داشته‌اند.

نکته

$$1) \Delta = b^2 - 4ac$$

۲) در هر معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ اگر مجموع ضرایب صفر گردد ($a + b + c = 0$) در این صورت یکی از ریشه‌ها $x_1 = 1$ و ریشه دیگر $x_2 = \frac{c}{a}$ خواهند بود.

گزینه «۳» ۵۱

مقدار $x = -2$ را در معادله قرار می‌دهیم تا مجهول a را به دست آوریم:

$$5x^2 - ax + 3a = 0 \xrightarrow{x=-2} 5(-2)^2 - a(-2) + 3a = 0$$

$$\Rightarrow 5 \times 4 + 2a + 3a = 0 \Rightarrow 5a = -20 \Rightarrow a = \frac{-20}{5} \Rightarrow a = -4$$

۲۹٪ دانش آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند. چرا که به مفهوم مقدار ریشه در معادله دقت داشته‌اند.

نکته

ریشه یا جواب قابل قبول را اگر در معادله جایگزین کنیم، دو طرف معادله برابر هم خواهد بود.

گزینه «۱» ۵۲

در معادله درجه دوم موجود چون $a + c = b$ می‌باشد، پس:

$$15x^2 + 28x + 13 = 0 \Rightarrow a = 15, b = 28, c = 13$$

$$15 + 13 = 28 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = -\frac{c}{a} = -\frac{13}{15} \end{cases}$$

$$\text{قدر مطلق اختلاف ریشه‌ها} : |x_1 - x_2| = \left| -1 - \left(-\frac{13}{15}\right) \right| = \left| -1 + \frac{13}{15} \right|$$

$$= \left| -\frac{15}{15} + \frac{13}{15} \right| = \left| -\frac{2}{15} \right| = \frac{2}{15}$$

۱۶٪ دانش آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند. چرا که در حل معادلات درجه دوم به همه نکات اشراف داشته‌اند.

نکته

$$1) ax^2 + bx + c = 0 \xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = -\frac{c}{a} \end{cases}$$

$$2) \text{قدر مطلق اختلاف ریشه‌ها} : |x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$$

گزینه «۳» ۵۳

وقتی Δ منفی باشد، معادله فاقد ریشه حقیقی است:

$$ax^2 + 3x - 5 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (3)^2 - 4(a)(-5) = 9 + 20a$$

$$\Delta < 0 \Rightarrow 9 + 20a < 0 \Rightarrow 20a < -9 \Rightarrow a < -\frac{9}{20}$$

۱۶٪ دانش آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند. چرا که با توجه به علامت Δ به تعداد ریشه‌ها دقت کرده‌اند.

نکته

در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$:

$$1) \Delta > 0 \Rightarrow \text{دو ریشه حقیقی متمایز}$$

$$2) \Delta = 0 \Rightarrow \text{ریشه مضاعف} \Rightarrow x = -\frac{b}{2a}$$

$$3) \Delta < 0 \Rightarrow \text{ریشه حقیقی نداریم.}$$

۵۴ گزینه «۴»

$$\frac{x^2}{4} + 2x - 21 = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{4}, b = 2, c = -21$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (2)^2 - 4\left(\frac{1}{4}\right)(-21) = 4 + 21 = 25$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{25}}{2\left(\frac{1}{4}\right)} = \frac{-2 \pm 5}{\frac{1}{2}}$$

$$x_1 = \frac{-2+5}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{\frac{1}{2}} = 6 \text{ ریشه بزرگتر}$$

$$x_2 = \frac{-2-5}{\frac{1}{2}} = \frac{-7}{\frac{1}{2}} = -14$$

۱/۱۹ دانش آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که به حل معادله درجه دوم به روش کلی دقت داشته‌اند.

نکته

در حل معادله درجه ۲ $ax^2 + bx + c = 0$ داریم:

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

۵۵ گزینه «۴»

اگر Δ منفی شود معادله درجه دوم ریشه حقیقی ندارد:

$$1) x^2 - 3x + 1 = 0 \Rightarrow a = 1, b = -3, c = 1$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4(1)(1) = 9 - 4 = 5 > 0$$

دو ریشه حقیقی

$$2) 25x^2 + 20x + 4 = 0 \Rightarrow a = 25, b = 20, c = 4$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (20)^2 - 4(25)(4) = 400 - 400 = 0$$

ریشه مضاعف

$$3) \frac{1}{3}x^2 + 2x - \frac{5}{4} = 0$$

چون $a = \frac{1}{3}$ و $c = -\frac{5}{4}$ مختلف‌العلامت هستند، مقدار Δ مثبت و دو ریشه حقیقی داریم.

$$4) -3x^2 + 4x - 3 = 0 \Rightarrow a = -3, b = 4, c = -3$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (4)^2 - 4(-3)(-3) = 16 - 36 = -20 < 0$$

ریشه حقیقی نداریم.

۱/۱۹ دانش آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که با توجه به علامت Δ به تعداد ریشه‌ها دقت داشته‌اند.

نکته

دو ریشه حقیقی متمایز $\Rightarrow \Delta > 0$

ریشه مضاعف $\Rightarrow x = -\frac{b}{2a}$

ریشه حقیقی نداریم $\Rightarrow \Delta < 0$

۵۶ گزینه «۴»

$$34x^2 - 79x + 45 = 0 \Rightarrow a = 34, b = -79, c = 45$$

مجموع ضرایب صفر می‌شود پس یکی از ریشه‌ها $x_1 = 1$ و ریشه دیگر $x_2 = \frac{c}{a}$ می‌باشد.

$$a + b + c = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = \frac{c}{a} = \frac{45}{34} \end{cases}$$

۱/۱۳ دانش آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که به حل معادلات درجه دوم و نکات آن دقت داشته‌اند.

نکته

در حل معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$:

$$1) a + b + c = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

$$2) a + c = b \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = -\frac{c}{a} \end{cases}$$

۵۷ گزینه «۲»

معادله $(x-2)^2 = k-2$ در صورتی ریشه مضاعف دارد که:

$$k - 2 = 0 \Rightarrow k = 2$$

۱/۱۵ دانش آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که در حل معادله درجه دوم در حالتی که $\Delta = 0$ می‌گردد و ریشه مضاعف داریم به نکات مختلف این حالت اشراف داشته‌اند.

نکته

هر معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ در صورتی که دارای ریشه مضاعف باشد به صورت $(x+t)^2 = 0$ نوشته می‌شود.

۵۸ گزینه «۲»

$$x^2 + mx + n = 0 \Rightarrow a = 1, b = m, c = n$$

حاصل ضرب دو ریشه از رابطه $x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$ به دست می‌آید که در آن هر دو

ریشه $x = -\frac{3}{4}$ (ریشه مضاعف) و $c = n$ مجهول می‌باشد که به دست

$$P = x_1 \times x_2 = \frac{c}{a} \Rightarrow \left(-\frac{3}{4}\right)\left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{n}{1} \Rightarrow n = \frac{9}{16}$$

می‌آید:

۲۴٪ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که به حل معادله گویا اشراف داشته‌اند.



$$\frac{a}{b} = c \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} a = bc$$

۶۲ گزینه «۳»

$$\begin{aligned} \frac{3x-5}{3-4x} = -2 &\Rightarrow 3x-5 = -2(3-4x) \Rightarrow 3x-5 = -6+8x \\ \Rightarrow 3x-8x = -6+5 &\Rightarrow -5x = -1 \Rightarrow x = \frac{-1}{-5} = \frac{1}{5} \end{aligned}$$

۲۵٪ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که به حل معادله گویا توجه داشته‌اند.

۶۳ گزینه «۱»

$$\begin{aligned} \frac{x-2}{x-3} = \frac{x+1}{x+2} &\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} \underbrace{(x-2)(x+2)}_{\text{مزدوج}} = \underbrace{(x+1)(x-3)}_{\text{جمله مشترک}} \\ x^2 - 4 = x^2 - 2x - 3 &\Rightarrow -4 = -2x - 3 \\ \Rightarrow 2x = -3 + 4 &\Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

این جواب قابل قبول است چون مخرج کسر را صفر نمی‌کند.

۲۷٪ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که به حل معادلات گویا اشراف داشته‌اند.



در حل معادلات گویا که در طرفین تساوی فقط یک کسر وجود دارد، طرفین وسطین می‌کنیم، جوابی قابل قبول است که مخرج کسر را صفر نکند.

۶۴ گزینه «۳»

مقدار $x = -1$ را در معادله جایگزین می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \frac{ax+1}{2x-5} + \frac{1}{x-1} = 2x &\xrightarrow{x=-1} \frac{a(-1)+1}{2(-1)-5} + \frac{1}{-1-1} = 2(-1) \\ \Rightarrow \frac{-a+1}{-2-5} + \frac{1}{-2} = -2 &\Rightarrow \frac{-(a-1)}{-7} - \frac{1}{2} = -2 \\ \Rightarrow \frac{a-1}{7} - \frac{1}{2} = -2 \end{aligned}$$

کل معادله را در مخرج مشترک ۱۴ ضرب می‌کنیم:

$$\begin{aligned} 14x \times \frac{a-1}{7} - 14x \times \frac{1}{2} = 14(-2) &\Rightarrow 2(a-1) - 7(1) = -28 \\ \Rightarrow 2a - 2 - 7 = -28 &\Rightarrow 2a - 9 = -28 \Rightarrow 2a = -28 + 9 \\ \Rightarrow 2a = -19 &\Rightarrow a = -\frac{19}{2} \end{aligned}$$

۱۶٪ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که به رابطه جمع و ضرب دو ریشه ویژه داشته‌اند.



در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ (به شرط وجود دو ریشه):

$$1) \text{ ضرب دو ریشه } x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

$$2) \text{ جمع دو ریشه } x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

۵۹ گزینه «۳»

$$\begin{aligned} 3x^2 + 5x - 28 = 0 &\Rightarrow a = 3, b = 5, c = -28 \\ \Delta = b^2 - 4ac = (5)^2 - 4(3)(-28) &= 25 + 336 = 361 \\ x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 \pm \sqrt{361}}{2(3)} &= \frac{-5 \pm 19}{6} \end{aligned}$$

$$x_1 = \frac{-5+19}{6} = \frac{14}{6} = \frac{7}{3}$$

$$x_2 = \frac{-5-19}{6} = \frac{-24}{6} = -4 \text{ ریشه کوچکتر}$$

۱۳٪ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که به حل معادله درجه دوم به روش کلی شناخت داشته‌اند.



حل معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ به روش کلی:

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

۶۰ گزینه «۴»

$$\begin{aligned} \frac{2x-5}{1-2x} = 4 &\Rightarrow 2x-5 = 4(1-2x) \Rightarrow 2x-5 = 4-8x \\ \Rightarrow 2x+8x = 4+5 &\Rightarrow 10x = 9 \Rightarrow x = \frac{9}{10} \end{aligned}$$

۳۱٪ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که به حل معادلات گویا توجه ویژه داشته‌اند.



در حل معادلات گویا به صورت $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ کافی است طرفین وسطین کرده و معادله جدید را حل کنیم، جوابی قابل قبول است که مخرج کسر را صفر نکند.

۶۱ گزینه «۴»

$$\begin{aligned} \frac{3x-5}{1-2x} = 3 &\Rightarrow 3x-5 = 3(1-2x) \Rightarrow 3x-5 = 3-6x \\ \Rightarrow 3x+6x = 3+5 &\Rightarrow 9x = 8 \Rightarrow x = \frac{8}{9} \end{aligned}$$

این جواب قابل قبول است چون مخرج کسر را صفر نمی‌کند.