

۵. گزینه «۲»

جمله عمومی الگوی خطی به صورت  $t_n = an + b$  است:

$$\begin{cases} t_7 = 2a + b = 3 \\ t_8 = 3a + b = 7 \end{cases} \Rightarrow a = 4, b = -5, t_n = 4n - 5$$

$$\Rightarrow \frac{t_8}{t_5} = \frac{27}{15} = \frac{9}{5} = 1/8$$

۶. گزینه «۳»

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$\begin{cases} a_4 = a_1 + 3d \\ a_{10} = a_1 + 9d \end{cases} \Rightarrow a_{10} - a_4 = 6d = 24 \Rightarrow d = 4$$

$$\begin{cases} a_{18} = a_1 + 17d \\ a_{30} = a_1 + 29d \end{cases} \Rightarrow a_{30} - a_{18} = 12d = 48$$

۷. گزینه «۱»

$$\begin{aligned} (t_1 + t_7 + t_{13} + \dots + t_{19}) + 40 &= (t_7 + t_4 + t_6 + \dots + t_{20}) \\ \Rightarrow \underbrace{(t_7 - t_1)}_d + \underbrace{(t_6 - t_7)}_d + \underbrace{(t_6 - t_5)}_d + \dots + \underbrace{(t_{20} - t_{19})}_d &= 40 \\ \Rightarrow 10d = 40 \Rightarrow d = 4 \end{aligned}$$

۸. گزینه «۱»

$$t_1 + t_7 + t_{13} = t_1 + (t_1 + d) + (t_1 + 2d) = 27 \Rightarrow 3t_1 + 3d = 27 \Rightarrow t_1 + d = 9 \quad (1)$$

$$t_4 + t_{10} + t_{16} = (t_1 + 3d) + (t_1 + 5d) + (t_1 + 7d) = 63 \Rightarrow 3t_1 + 15d = 63$$

$$\Rightarrow t_1 + 5d = 21 \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1),(2)} d = 4, t_1 = 5$$

$$\Rightarrow t_n = 5 + 4(n-1) = 4n + 1 \Rightarrow t_{99} = 4 \times 99 + 1 = 397$$

۹. گزینه «۳»

فرض می‌کنیم عدد مورد نظر  $x$  باشد:

$$13 + x, 6 + x, 2 + x \xrightarrow{\text{دنباله هندسی}} (6+x)^2 = (13+x)(2+x)$$

$$\Rightarrow 36 + x^2 + 12x = 26 + 15x + x^2 \Rightarrow 10 = 3x \Rightarrow x = \frac{10}{3}$$

۱۰. گزینه «۴»

$$t_1 + t_7 + t_{13} = \frac{3}{r}(t_7 + t_{13} + t_1)$$

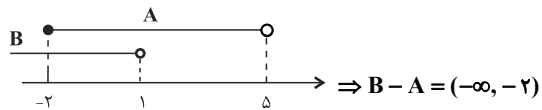
$$\Rightarrow t_1 + t_1 r^6 + t_1 r^{12} = \frac{3}{r}(t_1 r^6 + t_1 r^{12} + t_1 r^0)$$

$$\Rightarrow t_1(1 + r + r^2) = \frac{3}{r} t_1 r^3 (1 + r + r^2)$$

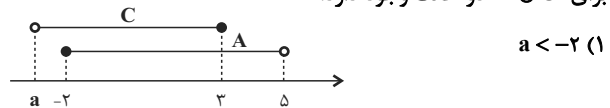
$$\Rightarrow r^3 = \frac{3}{r} \Rightarrow r = \sqrt[4]{\frac{3}{r}}$$

آزمون اول - ریاضی پایه

۱. گزینه «۳»

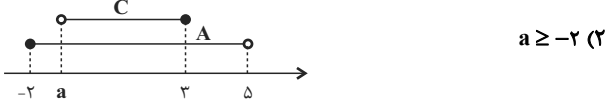


برای  $A \cup C$  دو حالت وجود دارد:



$$a < -2 \Rightarrow A \cup C = (a, 5) \Rightarrow (B - A) \cap (A \cup C) = (a, -2)$$

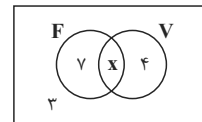
با توجه به شکل داده شده  $a = -4$



$$a \geq -2 \Rightarrow A \cup C = [-2, 5) \Rightarrow (B - A) \cap (A \cup C) = \emptyset$$

که با شکل داده شده تناقض دارد.

۲. گزینه «۱»



اگر مجموعه  $F$  بازیکنان فوتبال و مجموعه  $V$  بازیکنان والیبال را نشان دهد، مطابق شکل داریم:

$$7 + x + 4 + 3 = 20 \Rightarrow x = 6 \Rightarrow n(F) = 7 + x = 7 + 6 = 13$$

۳. گزینه «۳»

$$(A - B) = \emptyset, \quad (C - A) = \{1, 2, 7, 8, 9\}$$

$$\Rightarrow (A - B) \cup (C - A) = \{1, 2, 7, 8, 9\} \Rightarrow \text{تعداد اعضا} = 5$$

۴. گزینه «۳»

راه حل اول:

تعداد مربع‌های سفید = تعداد کل مربع‌ها = تعداد مربع‌های هاشورخورده

$$a_n = (n+1)^2 - (n-1)^2 = 4n$$

$$\Rightarrow a_{10} = 4 \times 10 = 40$$

راه حل دوم:

$$a_1 = 4, a_2 = 8, a_3 = 12$$

$$\Rightarrow a_n = 4n \Rightarrow a_{10} = 4 \times 10 = 40$$

## ۱۵. گزینه «۲»

$$2, 6, 10, 14, \dots \Rightarrow a_1 = 2, d = 6 - 2 = 4$$

$$S_n = \frac{n}{2} [2a_1 + (n-1)d] \Rightarrow S_n = \frac{n}{2} [2(2) + (n-1)4]$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{n}{2} (4 + 4n - 4) = 2n^2$$

$$a_n = 4n - 6 \Rightarrow a_1 = -2, a_7 = 2 \Rightarrow d = 2 - (-2) = 4$$

$$S_{15} = \frac{15}{2} [2(-2) + (15-1)4] = \frac{15}{2} (-4 + 14 \times 4)$$

$$= \frac{15}{2} \times 13 \times 4 = 15 \times 26 = 390$$

در سؤال خواسته شده  $S_n$  دنباله اول از  $S_{15}$  دنباله دوم بیشتر باشد:

$$2n^2 > 390 \Rightarrow n^2 > 195 \Rightarrow n > 13 / 96 \Rightarrow n \geq 14$$

یعنی باید حداقل ۱۴ جمله اول دنباله را با هم جمع کنیم.

## ۱۶. گزینه «۳»

می‌دانیم مجموع  $n$  جمله اول یک دنباله حسابی با قدرنسبت  $d$  و جمله

$$S_n = \frac{n}{2} [2a_1 + (n-1)d] \quad \text{اول } a_1 \text{ برابر است با:}$$

$$\Rightarrow S_{10} = 5(2a_1 + 9d)$$

در دنباله جدید داریم:

$$(S_{10})_{\text{جدید}} = 5(2a_1 + 9(d+2)) = 5(2a_1 + 9d + 18)$$

$$= 5(2a_1 + 9d) + 90$$

$$\Rightarrow (S_{10})_{\text{جدید}} = (S_{10})_{\text{اولیه}} + 90$$

## ۱۷. گزینه «۲»

$$a_n - a_{n+2} = 4 \Rightarrow a_n - (a_n + 2d) = 4 \Rightarrow d = -2$$

$$a_1 = 2a_7 \Rightarrow a_1 = 2(a_1 + d) \Rightarrow a_1 = 2(a_1 - 2) \Rightarrow a_1 = 4$$

$$S_n = \frac{n}{2} (2a_1 + (n-1)d) \quad \text{است، پس:}$$

$$\Rightarrow S_{10} = \frac{10}{2} (2a_1 + 9d) = 5(8 + 9(-2)) = -50$$

$$\Rightarrow S_{10} = 5(8 + 9(-2)) = -50$$

## ۱۸. گزینه «۴»

خواسته مسئله مجموع جملات از  $a_7$  تا  $a_{18}$  است، یعنی:

$$S = a_7 + a_8 + \dots + a_{18}$$

با توجه به این که  $S_n = \frac{n(n-15)}{6}$  را داریم، برای محاسبه  $S$  کافی است

مجموع ۶ جمله اول را از مجموع ۱۸ جمله اول کم کنیم. بنابراین:

$$S = S_{18} - S_6 \Rightarrow S = \frac{18(18-15)}{6} - \frac{6(6-15)}{6} = 9 - (-9) = 18$$

## ۱۱. گزینه «۲»

$$\begin{array}{ccc} t_2, & t_4, & t_{11} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \underbrace{t_1 + d}_A & \underbrace{t_1 + 3d}_B & \underbrace{t_1 + 10d}_C \end{array}$$

چون سه جمله تشکیل دنباله هندسی داده‌اند، پس داریم:

$$B^2 = AC \Rightarrow (t_1 + 3d)^2 = (t_1 + d)(t_1 + 10d)$$

$$t_1^2 + 6t_1d + 9d^2 = t_1^2 + 10t_1d + t_1d + 10d^2$$

$$\Delta t_1d + d^2 = 0 \Rightarrow d(\Delta t_1 + d) = 0 \Rightarrow \begin{cases} d = 0 & \text{غ ق} \\ \Delta t_1 + d = 0 \Rightarrow d = -\Delta t_1 \end{cases}$$

## ۱۲. گزینه «۱»

$n, m, l \Rightarrow 2m = l + n$  سه جمله متوالی از یک دنباله حسابی

$n, m, l \Rightarrow m^2 = nl$  سه جمله متوالی از یک دنباله هندسی

$$\frac{1}{b-a}, \frac{1}{2b}, \frac{1}{b-c} : \frac{2}{2b} = \frac{1}{b-a} + \frac{1}{b-c} \Rightarrow \frac{1}{b} = \frac{b-c+b-a}{(b-a)(b-c)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{b} = \frac{2b-a-c}{b^2-bc-ab+ac} \Rightarrow 2b^2-ab-bc = b^2-bc-ab+ac$$

$$\Rightarrow 2b^2 - b^2 = ac \Rightarrow b^2 = ac$$

$a, b, c$  سه جمله متوالی از یک دنباله هندسی‌اند.

## ۱۳. گزینه «۱»

بنا به فرض  $a_5 = 21$ ،  $d = a_n - a_{n-1} = 4$  است، در نتیجه داریم:

$$a_5 = a_1 + 4d \Rightarrow 21 = a_1 + 4 \times 4 \Rightarrow a_1 = 21 - 16 = 5$$

$$S_n = \frac{n}{2} [2a_1 + (n-1)d]$$

$$\Rightarrow S_{16} = \frac{16}{2} (2 \times 5 + 15 \times 4) = 560$$

## ۱۴. گزینه «۳»

$$a_9 = \sqrt{\sqrt[3]{81} \times \sqrt[3]{9}} = \sqrt{\sqrt[3]{81 \times 9}} = \sqrt[6]{3^6} = 3$$

از طرفی می‌دانیم در دنباله حسابی رابطه زیر برقرار است:

$$a_1 + a_{17} = a_2 + a_{16} = \dots = a_8 + a_{10} = 2a_9$$

از طرفی برای مجموع جملات دنباله داریم:

$$S_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n) \Rightarrow S_{17} = \frac{17}{2} (a_1 + a_{17})$$

$$= \frac{17}{2} (2a_9) = 17(3) = 51$$

قدرنسبت  $d = \frac{1}{4}$  می‌دهند. می‌خواهیم مجموع آن‌ها برابر با ۱۳۸ شود.

$$S_n = \frac{n}{4} [2a_1 + (n-1)d] \Rightarrow 138 = \frac{n}{4} [2(\frac{1}{4}) + (n-1)(\frac{1}{4})]$$

$$\Rightarrow 276 = n[1 + \frac{n-1}{4}] \Rightarrow 276 = \frac{n^2}{4} + \frac{n}{4} \times 2$$

$$n^2 + n - 552 = 0 \Rightarrow (n+24)(n-23) = 0 \Rightarrow \begin{cases} n = -24 & \text{غ ق ق} \\ n = 23 & \text{ق ق} \end{cases}$$

۲۳. گزینه «۳»

$$a + \frac{1}{4}, 2b - 1, 4 \xrightarrow{\text{دنباله هندسی}} (2b-1)^2 = 4 \left( a + \frac{1}{4} \right)$$

$$2b - 4, a + 1, 4 \xrightarrow{\text{دنباله حسابی}} 2(a+1) = 4 + 2b - 4 \Rightarrow a + 1 = b$$

$$\Rightarrow (2a+1)^2 = 4 \left( a + \frac{1}{4} \right) \Rightarrow 4a^2 + 4a + 1 = 4a + 2 \Rightarrow a^2 = \frac{1}{4}$$

$$\xrightarrow{a > 0} a = \frac{1}{4} \Rightarrow b = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} S_{10} = \frac{1(1-2^{10})}{1-2} = 1023 & \text{دنباله هندسی: } 1, 2, 4 \\ S_{10} = 10(-2 + 19 \times \frac{5}{4}) = 455 & \text{دنباله حسابی: } -1, \frac{3}{4}, 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 1023 - 455 = 568$$

۲۴. گزینه «۱»

$$\text{دنباله حسابی: } a_n = r + (n-1)d \Rightarrow S_n = \frac{n}{2}(2r + (n-1)d)$$

$$\text{دنباله هندسی: } b_n = dr^{n-1}$$

$$\begin{cases} S_4 = 4(2r + 4d) = 136 \Rightarrow 2r + 4d = 34 & (1) \\ b_1 + b_4 = d + dr = 16 & (2) \end{cases}$$

$$(1), (2) \rightarrow \frac{34}{d} - 2 + 4d = 34 \Rightarrow 4d^2 - 34d + 34 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} d_1 = \frac{1}{4}, r_1 = 13 \\ d_2 = 4, r_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \text{دنباله حسابی} = \begin{cases} b_n = \frac{1}{4} \times 13^{n-1} \\ b_n = 4 \times 3^{n-1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b_5 = \frac{1}{4} \times 13^4 & \text{در گزینه‌ها نیست.} \\ b_5 = 4 \times 3^4 = 4 \times 81 = 324 \end{cases}$$

۲۵. گزینه «۴»

$$x = \frac{\sqrt{2}-2}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2(1-\sqrt{2})}{2} = 1-\sqrt{2}$$

$$x^2 - 5x = (1-\sqrt{2})^2 - 5(1-\sqrt{2})$$

$$= 1 - 2\sqrt{2} + 2 - 5 + 5\sqrt{2} = 7 - 5 = 2$$

۱۹. گزینه «۴»

جملات  $17, 21, 25, 29, \dots$  یک دنباله حسابی با قدرنسبت  $d_1 = 4$  و جملات  $16, 21, 26, 31$  یک دنباله حسابی با قدرنسبت  $d_2 = 5$  است، بنابراین جملات مشترک این دو دنباله، یک دنباله حسابی با قدرنسبت  $d = [4, 5] = 20$  است.

دنباله جملات مشترک:  $21, 41, 61, \dots$

حال مجموع ده جمله اول دنباله جملات مشترک را به دست می‌آوریم:

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

$$\Rightarrow S_{10} = \frac{10}{2}(2(21) + (10-1)20) = 5(222) = 1110$$

۲۰. گزینه «۱»

برای دنباله هندسی  $4, a, 1, b, \dots$  داریم:

$$\frac{a}{4} = \frac{1}{a} \Rightarrow a^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \Rightarrow \text{غ ق ق} \\ a = -2 \Rightarrow \text{قابل قبول است.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 4, -2, 1, -\frac{1}{2}, \dots \Rightarrow q = -\frac{1}{2}$$

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{4(1-(-\frac{1}{2})^n)}{1-(-\frac{1}{2})} = \frac{8}{3}(1-(-\frac{1}{2})^n) = \frac{21}{8}$$

$$\Rightarrow 1 - (-\frac{1}{2})^n = \frac{63}{64} \Rightarrow (-\frac{1}{2})^n = \frac{1}{64} \Rightarrow n = 6$$

۲۱. گزینه «۲»

این دنباله یک دنباله هندسی است، قدرنسبت آن  $q = 2$  و جمله اول آن  $a_1 = 12$  است.

$$S_n > 96000 \Rightarrow \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} > 96000 \Rightarrow \frac{12(1-2^n)}{1-2} > 96000$$

$$\Rightarrow 2^n - 1 > 8000 \Rightarrow 2^n > 8001 \Rightarrow n \geq 13$$

۲۲. گزینه «۱»

جملات دنباله هندسی به صورت  $2^2, 2^1, 2^2, \dots$  هستند. حاصل ضرب آن‌ها

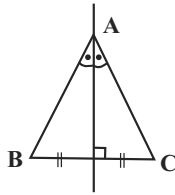
$$P_n = 2^2 \times 2^1 \times 2^2 \times \dots = 2^2 + 2^1 + 2^2 + \dots$$

برابر است با:

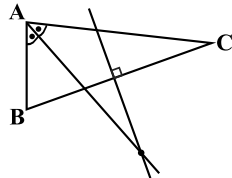
عدد  $4^69$  را به صورت  $2^{138}$  می‌توانیم بنویسیم.

اعداد  $1, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}$  و ... با هم تشکیل دنباله حسابی با جمله اول  $a_1 = \frac{1}{2}$  و

و مسأله بی‌شمار جواب دارد.

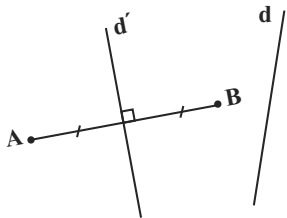


اگر  $AC = BC \neq AB$  باشد، نیمساز  $\widehat{BAC}$  و عمودمنصف  $BC$  همواره در یک نقطه متقاطع‌اند و مسأله یک جواب دارد.



۳۲. گزینه «۳»

نقاط  $A$  و  $B$  و خط  $d$  را در نظر می‌گیریم. مجموعه نقاطی که از  $A$  و  $B$  به یک فاصله هستند، عمودمنصف پاره‌خط  $AB$  می‌باشد. نقطه یا نقاط برخورد خط  $d$  و عمودمنصف  $AB$  (خط  $d'$ ) جواب مسئله است.



بررسی گزینه‌ها:

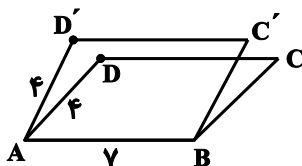
گزینه «۱»: اگر  $d$  و  $d'$  با هم موازی باشند، مسئله جواب ندارد.

گزینه «۲»: اگر  $d$  و  $d'$  متقاطع باشند، مسئله یک جواب دارد.

گزینه «۴»: اگر  $d$  و  $d'$  بر هم منطبق باشند، مسئله بی‌شمار جواب دارد. دو خط  $d$  و  $d'$  نمی‌توانند در دو نقطه همدیگر را قطع کنند، پس گزینه «۳» صحیح است.

۳۳. گزینه «۴»

با توجه به فرضیات مسأله و داشتن دو معلوم از سه مجهول مورد نیاز نمی‌توان یک متوازی‌الاضلاع منحصر به فرد رسم کرد و بی‌شمار متوازی‌الاضلاع با این دو معلوم قابل رسم است.



۲۶. گزینه «۴»

$$\sqrt[3]{-0.027} = -0.3 \text{ و } \sqrt[4]{\frac{1}{16}} = \frac{1}{2} = 0.5 \text{ و } \sqrt[5]{\frac{-243}{32}} = -\frac{3}{2} = -1.5$$

$$\Rightarrow A = 5 \times (-0.3) + 2 \times 0.5 - 1.5 = -2$$

۲۷. گزینه «۱»

$$A = \sqrt{(\sqrt{x})^2 - 2\sqrt{x} + 1} + \sqrt{x^2 + (\sqrt{x})^2 - 2x\sqrt{x}}$$

$$\Rightarrow A = \sqrt{(\sqrt{x}-1)^2} + \sqrt{(x-\sqrt{x})^2}$$

$$\xrightarrow{0 < x < 1} A = 1 - \sqrt{x} + \sqrt{x} - x = 1 - x$$

$$= 1 - (\sqrt{2} - 1) = 2 - \sqrt{2}$$

۲۸. گزینه «۲»

$$\frac{1}{3\sqrt{2^3} - \sqrt{25 \times 2} + \sqrt{3}} = \frac{1}{6\sqrt{2} - 5\sqrt{2} + \sqrt{3}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{\sqrt{2} - \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{-1} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$$

۲۹. گزینه «۴»

برای آن که مخرج عبارت را گویا کنیم صورت و مخرج کسر را در مزدوج مخرج ضرب می‌کنیم:

$$\Rightarrow t_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \times \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}$$

$$= \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n+1-n} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

$$\Rightarrow t_1 = \sqrt{2} - 1, t_2 = \sqrt{3} - \sqrt{2}, \dots, t_{15} = 4 - \sqrt{15}$$

$$\Rightarrow t_1 + t_2 + \dots + t_{15} = (\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \dots + (4 - \sqrt{15})$$

$$= -1 + 4 = 3$$

۳۰. گزینه «۴»

$$\lambda a^9 - a^6 b^3 + \lambda a^3 b^3 - b^6 = a^6 (\lambda a^3 - b^3) + b^3 (\lambda a^3 - b^3)$$

$$= (\lambda a^3 - b^3)(a^6 + b^3) = (2a - b)(2a^2 + 2ab + b^2)(a^6 + b^3)$$

### آزمون اول - هندسه (۱)

۳۱. گزینه «۴»

اگر  $AB = AC$  باشد، هر نقطه‌ای روی عمودمنصف  $BC$  (نیمساز  $\widehat{BAC}$ ) از  $B$  و  $C$  به یک فاصله و از  $AB$  و  $AC$  به فاصله یکسان قرار دارد

۳۴. گزینه «۳»

در نتیجه:  $AB < CD$   
اما گزینه‌های دیگر لزوماً صحیح نمی‌باشند.

۳۷. گزینه «۳»

بنا به قضیه نامساوی مثلث داریم:

$$\triangle ABD: 3x - 1 < 3 + 4 \Rightarrow 3x < 8$$

$$\triangle BCD: y < (3x - 1) + 2 \Rightarrow y < 3x + 1$$

$$\xrightarrow{3x < 8} y < 8 + 1 \Rightarrow y < 9$$

$$\xrightarrow{y \in \mathbb{N}} \max(y) = 8$$

۳۸. گزینه «۲»

نقیض گزاره مورد نظر برابر است با «چنین نیست که هر دو خط موازی یکدیگر را قطع نمی‌کنند» و یا به عبارتی «دو خط وجود دارد که یکدیگر را قطع می‌کنند و موازی هستند».

۳۹. گزینه «۳»

موارد (الف) و (ب) مثال نقض دارند.

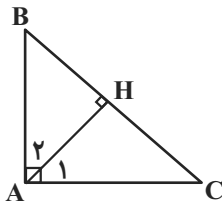
الف) محل هم‌مرسی عمودمنصف‌ها در مثلث قائم‌الزاویه، روی ضلع مثلث است.

ب) عدد ۱ نه اول است و نه مرکب.

۴۰. گزینه «۳»

ابتدا بنا به برهان خلف فرض می‌کنیم که  $AH$  بر  $BC$  عمود باشد  $(\hat{A}HB = 90^\circ)$ . در این صورت داریم:

$$\begin{cases} \triangle ACH: \hat{A}_1 + \hat{C} = 90^\circ \\ \triangle ABC: \hat{B} + \hat{C} = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{B}$$



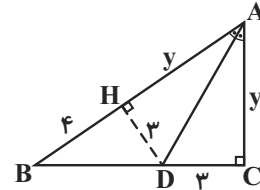
که در تناقض با فرض مسأله است. پس  $AH$  نمی‌تواند بر  $BC$  عمود باشد،

یعنی فرض برهان باطل و حکم ثابت می‌شود.  $(\hat{A}HB \neq 90^\circ)$

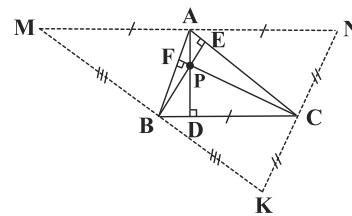
از طرفی با توجه به این‌که در فرضیات مسئله شرطی جز  $\hat{A} = 90^\circ$  و  $\hat{A}_1 \neq \hat{B}$  مطرح نشده، لذا دو زاویه  $B$  و  $C$  می‌توانند با یکدیگر برابر باشند  $(\hat{B} = \hat{C})$ . بنابراین گزینه‌های «۱» و «۲» نیز لزوماً صحیح نمی‌باشند.

از  $D$  به  $AB$  عمود می‌کنیم. چون  $D$  روی نیمساز  $\hat{B}AC$  است، پس  $AH = AC = y$ ،  $DH = DC = 3$  و در نتیجه  $BH = 4$ . حال داریم:

$$\triangle BDH: BD^2 = 3^2 + 4^2 = 25 \Rightarrow BD = 5$$



۳۵. گزینه «۳»



روشن است که چهارضلعی‌های  $AMBC$ ،  $ANCB$  و  $ACKB$ ، متوازی‌الاضلاع می‌باشند. در نتیجه:

$$MN \parallel BC \xrightarrow{AD \perp BC} AD \perp MN$$

لذا  $AD$  عمودمنصف ضلع  $MN$  می‌باشد. همچنین با استفاده از برابری ضلع‌ها و توازی پاره‌خط‌ها به طریق مشابه می‌توان نتیجه گرفت که:

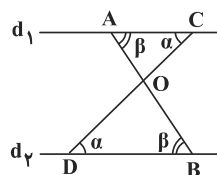
$BE$ : عمودمنصف  $MK$

$CF$ : عمودمنصف  $NK$

بنابراین،  $AD$ ،  $BE$  و  $CF$ ، عمودمنصف‌های اضلاع مثلث  $MNK$  می‌باشند.

۳۶. گزینه «۳»

خطوط  $d_1$  و  $d_2$  موازی‌اند. لذا با توجه به قضیه خطوط موازی و مورب داریم:



$$\hat{A} = \hat{B} = \beta \quad \beta = 2\alpha \quad \left\{ \begin{array}{l} \hat{A} > \hat{C} \\ \hat{B} > \hat{D} \end{array} \right.$$

از طرفی می‌دانیم اگر در مثلثی دو زاویه نابرابر باشند، آن‌گاه ضلع روبه‌رو به زاویه بزرگ‌تر، بزرگ‌تر است از ضلع روبه‌رو به زاویه کوچک‌تر. بنابراین:

$$\triangle AOC: \hat{A} > \hat{C} \Rightarrow AO < CO \quad (1)$$

$$\triangle BOD: \hat{B} > \hat{D} \Rightarrow BO < DO \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(2) + (1)} AO + BO < CO + DO$$

$$\widehat{AC} + \widehat{ANI} = 118^\circ \Rightarrow \widehat{ANI} = 140^\circ \Rightarrow \widehat{ACI} = \frac{140^\circ}{2} = 70^\circ$$

$$\left. \begin{array}{l} AC \parallel ON \\ \text{مورب CN} \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{ACN} = \widehat{CNO} \quad (*)$$

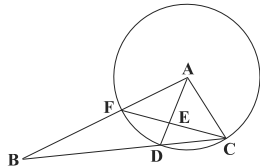
از طرفی:

$$ON = OC \Rightarrow \widehat{CNO} = \widehat{OCN} \quad (**)$$

با مقایسه روابط (\*) و (\*\*) نتیجه می‌گیریم:

$$\widehat{CNO} = \widehat{ACN} = \widehat{OCN} = \frac{\widehat{ACI}}{2} = 35^\circ$$

۴۴. گزینه «۳»



بنابر فرضیات سوال اگر به مرکز A و شعاع AF = AD = AC دایره‌ای

$$\widehat{FAD} = \widehat{FD} \Rightarrow \widehat{FD} = 70^\circ$$

رسم کنیم، داریم:

$$\Rightarrow \widehat{FCB} = \frac{\widehat{FD}}{2} = \frac{70^\circ}{2} = 35^\circ$$

۴۵. گزینه «۱»

چون  $AB \parallel DE$ ، پس  $\widehat{DB} = \widehat{AE} = 110^\circ$  است. لذا:

$$\widehat{AB} = 118^\circ - \widehat{DB} = 118^\circ - 110^\circ = 70^\circ$$

$$\widehat{BAC} = \frac{\widehat{AB}}{2} = \frac{70^\circ}{2} = 35^\circ$$

زاویه  $\widehat{BAC}$  زاویه‌ای ظلی است پس:

۴۶. گزینه «۴»

با فرض  $\widehat{AB} = \widehat{BC} = \alpha$  داریم:

$$\widehat{M} = \frac{\widehat{AC} - \widehat{AB}}{2} = \frac{(360^\circ - 2\alpha) - \alpha}{2} = 90^\circ \Rightarrow 3\alpha = 180^\circ \Rightarrow \alpha = 60^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{BC} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{BOC} = 60^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{BOC} \overset{\Delta}{\text{متساوی‌الاضلاع است}} \Rightarrow BC = 1$$

۴۷. گزینه «۲»

می‌توان نوشت:

$$\left\{ \begin{array}{l} \widehat{A} = \frac{\widehat{MPN} - \widehat{MN}}{2} \Rightarrow 70^\circ = \frac{\widehat{MPN} - \widehat{MN}}{2} \Rightarrow \widehat{MPN} - \widehat{MN} = 140^\circ \\ \widehat{B} = \frac{\widehat{PMQ} - \widehat{PQ}}{2} \Rightarrow 50^\circ = \frac{\widehat{PMQ} - \widehat{PQ}}{2} \Rightarrow \widehat{PMQ} - \widehat{PQ} = 100^\circ \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \widehat{MN} = \widehat{MPN} - 140^\circ \\ \widehat{PQ} = \widehat{PMQ} - 100^\circ \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \widehat{MN} = 360^\circ - \widehat{MN} - 140^\circ \\ \widehat{PQ} = 360^\circ - \widehat{PQ} - 100^\circ \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \widehat{MN} = 110^\circ \\ \widehat{PQ} = 130^\circ \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \widehat{C} = \frac{\widehat{PQ} + \widehat{MN}}{2} = \frac{130^\circ + 110^\circ}{2} = \frac{240^\circ}{2} = 120^\circ$$

## آزمون اول - هندسه (۲)

۴۱. گزینه «۴»

چون M درون دایره می‌باشد، پس فاصله‌اش از مرکز، کم‌تر از شعاع و نامنفی است.

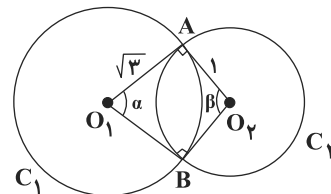
$$x^2 + 4x < 5 \Rightarrow x^2 + 4x - 5 < 0$$

$$\Rightarrow (x-1)(x+5) < 0 \Rightarrow -5 < x < 1 \quad (1)$$

$$x^2 + 4x \geq 0 \Rightarrow x(x+4) \geq 0 \Rightarrow x \leq -4 \text{ یا } x \geq 0 \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow x \in [0, 1) \cup (-5, -4]$$

۴۲. گزینه «۳»



دو مثلث  $O_1AO_2$  و  $O_1BO_2$  به حالت تساوی سه ضلع، همنهشت

هستند و در نتیجه  $\widehat{O_1BO_2} = \widehat{O_1AO_2} = 90^\circ$  داریم:

$$\alpha + \beta + 90^\circ + 90^\circ = 360^\circ \Rightarrow \alpha + \beta = 180^\circ$$

از طرفی در مثلث قائم‌الزاویه  $O_1AO_2$  داریم:

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 30^\circ \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 60^\circ \\ \beta = 120^\circ \end{cases}$$

حال طول کمان  $\widehat{AB}$  در هر دو دایره را محاسبه می‌کنیم:

$$C_1 : \widehat{AB} = \pi \times \sqrt{3} \times \frac{60^\circ}{180^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{3} \pi$$

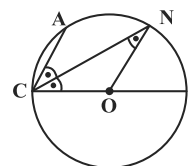
$$C_2 : \widehat{AB} = \pi \times 1 \times \frac{120^\circ}{180^\circ} = \frac{2}{3} \pi$$

پس کمان مطلوب، کمان مربوط به دایره  $C_2$  است.

۴۳. گزینه «۳»

می‌دانیم اندازه هر زاویه محاطی برابر با نصف اندازه کمان مقابلش است،

بنابراین داریم:



آزمون اول - آمار و احتمال

۵۱. گزینه «۲»

در گزینه «۲» تمامی اعداد صحیح مثبت در عبارت  $\frac{|x|}{x} = 1$  صدق می کنند. بنابراین مجموعه جواب (S) با دامنه متغیر (D) برابر است.

بررسی سایر گزینه ها:

گزینه «۱»:  $S = \mathbb{N}$

گزینه «۳»:  $S = \{-1\}$

گزینه «۴»:  $S = W$

۵۲. گزینه «۲»

آن عدد اول است  $\Rightarrow$  مربع عددی در تقسیم بر ۸ دارای باقی مانده ۱ باشد.

نقیض یک ترکیب شرطی به صورت زیر است:

$$\sim (p \Rightarrow q) \equiv \sim (p \vee q) \equiv p \wedge \sim q$$

بنابراین گزینه «۲» پاسخ صحیح است.

۵۳. گزینه «۲»

با توجه به قوانین دمورگان و جذب داریم:

$$\sim (q \vee \sim p) \vee p \equiv (\sim q \wedge p) \vee p \equiv p$$

۵۴. گزینه «۱»

$$[(p \vee \sim q) \vee \sim r] \wedge (p \vee q) \wedge (p \vee r) \equiv$$

$$[(p \vee \sim q) \vee \sim r] \wedge [p \vee (q \wedge r)] \equiv$$

$$[p \vee (\sim q \vee \sim r)] \wedge [p \vee (q \wedge r)] \equiv$$

$$p \vee [(\sim q \vee \sim r) \wedge (q \wedge r)] \equiv$$

$$p \vee \underbrace{[\sim (q \wedge r) \wedge (q \wedge r)]}_F \equiv p \vee F \equiv p$$

۵۵. گزینه «۴»

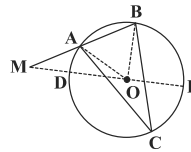
توجه کنید که ارزش گزاره p چه درست باشد و چه غلط،  $p \vee \sim p \equiv T$  خواهد بود. ارزش سایر گزینه ها بسته به ارزش گزاره های p، q و r، متغیر خواهد بود.

۵۶. گزینه «۴»

گزاره  $p \Rightarrow q$  هنگامی نادرست خواهد بود که p درست و q نادرست باشد. در این صورت ارزش گزاره های  $(p \vee q)$  و  $(p \wedge q)$  به ترتیب درست و نادرست است و در نتیجه ارزش ترکیب شرطی  $(p \vee q) \Rightarrow (p \wedge q)$  نیز نادرست می باشد. ارزش گزاره های گزینه های «۱» و «۲» و «۳»، درست است.

۴۸. گزینه «۱»

در مثلث متساوی الساقین ABC داریم:



$$\begin{aligned} \widehat{BAC} = 75^\circ &\Rightarrow \widehat{C} = 30^\circ \\ \Rightarrow \widehat{AB} = 60^\circ &\Rightarrow \widehat{AOB} = 60^\circ \end{aligned}$$

بنابراین مثلث OAB متساوی الاضلاع است:  $AB = r = 6$

$$MA \times MB = MD \times ME = (MO - r)(MO + r)$$

$$\Rightarrow 6 \times 12 = (MO^2 - 6^2) \Rightarrow MO = \sqrt{108} = 6\sqrt{3}$$

۴۹. گزینه «۲»

با توجه به شکل و مماس بودن MD داریم:

$$MA \cdot MB = MD^2 \Rightarrow MB = \frac{MD^2}{MA} = \frac{6^2}{4} = 9 \Rightarrow AB = 9 - 4 = 5$$

از طرفی، از موازی بودن AC و BD درمی یابیم که  $\widehat{BC} = \widehat{AD}$ ، پس داریم:

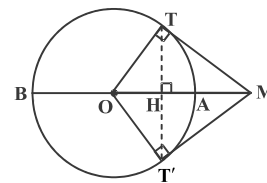
$$\widehat{BC} + \widehat{AC} = \widehat{AD} + \widehat{AC} \Rightarrow \widehat{AB} = \widehat{CD} \Rightarrow AB = CD \Rightarrow CD = 5$$

و همچنین با توجه به فرض می دانیم  $CK = 2$ ، پس نتیجه می گیریم  $DK = 3$ .

از طرف دیگر با توجه به موازی بودن AC و BD، می توان نتیجه گرفت که دو مثلث AKC و BKD، متساوی الساقین می باشند. بنابراین:

$$\begin{cases} AK = CK = 2 \\ KB = DK = 3 \end{cases}$$

۵۰. گزینه «۳»



$$MT^2 = MA \times MB = 2 \times 18 = 36 \Rightarrow MT = 6$$

$$r = OT = OA = 8 \Rightarrow \text{قطر دایره} = 18 - 2 = 16$$

در مثلث قائم الزاویه  $\Delta OTM$ :

$$OM = OA + AM = 10$$

$$TH \times OM = OT \times MT \Rightarrow TH = \frac{OT \times MT}{OM}$$

$$\Rightarrow TH = \frac{8 \times 6}{10} = 4/8$$

$$\Rightarrow TT' = 2TH = 2 \times 4/8 = 9/6$$

## ۶۲. گزینه «۱»

$$\rho = \frac{m}{V} \xrightarrow{V_1=V_2} \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{m_1}{m_2}$$

$$\frac{1}{0.8} = \frac{m}{1000} \Rightarrow m = 1250 \text{ g} = 1.25 \times 10^3 \text{ g}$$

## ۶۳. گزینه «۲»

با توجه به این که وسیله اندازه گیری رقمی (دیجیتال) است، دقت اندازه گیری اش (با توجه به خطای داده شده) برابر با  $0.1 \text{ mm}$  می باشد. حال کافی است یکای هر چهار گزینه را به کمک روش تبدیل زنجیره ای به  $\text{mm}$  تبدیل نماییم و گزینه ای که خطای اندازه گیری آن غیر از  $0.1 \text{ mm}$  است، انتخاب کنیم:

$$4/261 \text{ dm} = 4/261 \text{ dm} \times \frac{1 \text{ m}}{10 \text{ dm}} \times \frac{10^3 \text{ mm}}{1 \text{ m}} \quad \text{گزینه «۱»}$$

$$= 426/1 \text{ mm} \rightarrow \text{خطای اندازه گیری} = 0.1 \text{ mm}$$

$$726/5 \times 10^{-4} \text{ m} = 726/5 \times 10^{-4} \text{ m} \times \frac{10^3 \text{ mm}}{1 \text{ m}} \quad \text{گزینه «۲»}$$

$$= 72/65 \text{ mm} \rightarrow \text{خطای اندازه گیری} = 0.01 \text{ mm}$$

$$29/15 \text{ cm} = 29/15 \text{ cm} \times \frac{1 \text{ m}}{10^2 \text{ cm}} \times \frac{10^3 \text{ mm}}{1 \text{ m}} \quad \text{گزینه «۳»}$$

$$= 291/5 \text{ mm} \rightarrow \text{خطای اندازه گیری} = 0.1 \text{ mm}$$

$$0.00081 \text{ dam} = 0.00081 \text{ dam} \times \frac{10^1 \text{ m}}{1 \text{ dam}} \times \frac{10^3 \text{ mm}}{1 \text{ m}} \quad \text{گزینه «۴»}$$

$$= 8/1 \text{ mm} \rightarrow \text{خطای اندازه گیری} = 0.1 \text{ mm}$$

## ۶۴. گزینه «۲»

با استفاده از رابطه چگالی مخلوط، داریم: (Au نماد شیمیایی طلا و Ag نماد شیمیایی نقره است).

$$\rho_{\text{مخلوط}} = \frac{m_{\text{مخلوط}}}{V_{\text{مخلوط}}} \Rightarrow \rho_{\text{مخلوط}} = \frac{m_{\text{Au}} + m_{\text{Ag}}}{V_{\text{Au}} + V_{\text{Ag}}}$$

$$\rho_{\text{مخلوط}} = \frac{\rho_{\text{Au}} V_{\text{Au}} + \rho_{\text{Ag}} V_{\text{Ag}}}{V_{\text{Au}} + V_{\text{Ag}}}$$

$$\rho_{\text{مخلوط}} = 13/6 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}, V_{\text{Au}} + V_{\text{Ag}} = 5 \text{ cm}^3$$

$$\rho_{\text{Au}} = 19 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}, \rho_{\text{Ag}} = 10 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$$

$$13/6 = \frac{19V_{\text{Au}} + 10V_{\text{Ag}}}{5} \Rightarrow 19V_{\text{Au}} + 10V_{\text{Ag}} = 68 \text{ cm}^3$$

## ۵۷. گزینه «۱»

ارزش p، درست و ارزش q نادرست است، در نتیجه ارزش گزاره (الف) درست است. در حالت (ب)، اگر r نادرست باشد، گزاره  $r \Rightarrow \sim r$  به انتفای مقدم درست است ولی در صورتی که r درست باشد، آن گاه  $\sim r$  نادرست بوده و ارزش گزاره  $r \Rightarrow \sim r$  نادرست است. در حالت (پ) چون r مشخص نیست و  $\sim p$  گزاره ای نادرست است، پس ارزش  $\sim p \vee r$  مشخص نیست و چون q نادرست است، لذا ارزش گزاره (پ) معلوم نمی شود.

## ۵۸. گزینه «۴»

ارزش گزاره نادرست است. زیرا هیچ عدد صحیح منفی ای وجود ندارد که مربع آن کوچک تر از ۱ باشد. در نقیض یک گزاره سوری، سور وجودی به سور عمومی تبدیل می شود. همچنین در نقیض یک ترکیب عطفی، هر دو گزاره سازنده آن، نقیض شده و ترکیب عطفی به فصلی تبدیل می شود، پس نقیض گزاره مورد نظر به صورت زیر است:

$$\forall y \in \mathbb{Z}; y \geq 0 \vee y^2 \geq 1$$

## ۵۹. گزینه «۱»

فرض می کنیم تعداد اعضای مجموعه A برابر n باشد، از آن جا که تعداد اعضای A - B برابر ۷ است، پس تعداد اعضای  $A \cap B$  برابر با  $n - 7$  می باشد. در نتیجه:

$$2^n - 2^{n-7} = 1016 \Rightarrow 2^{n-7}(2^7 - 1) = 1016 \Rightarrow 2^{n-7}(127) = 1016$$

$$\Rightarrow 2^{n-7} = 8 = 2^3 \Rightarrow n - 7 = 3 \Rightarrow n = 10 \Rightarrow 2^n = 1024$$

## ۶۰. گزینه «۳»

$$A_{10} - A_7 = \{-10, -9, -8, 8, 9, 10\}$$

$$A_7 - A_5 = \{-7, -6, 6, 7\}$$

$$A_5 - A_3 = \{-5, -4, 4, 5\}$$

$$A_3 = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$$

چهار مجموعه بالا، همه ویژگی های افزاز برای مجموعه A را دارند.

## آزمون اول - فیزیک (۱)

## ۶۱. گزینه «۴»

کمینه اندازه گیری کولیس برابر با  $0.05 \text{ mm}$  و لذا خطای آن برابر با  $0.03 \text{ mm}$  می باشد.



از طرفی می‌دانیم حجم واقعی کره به کمک رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$V_{\text{حرفه}} - V_{\text{ظاهر}} = V_{\text{واقعی کره}} = \frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{4}{3}\pi\left(\frac{R}{2}\right)^3$$

$$\frac{\pi R^3}{8} \rightarrow \text{حجم واقعی کره} = \frac{4}{3} \times 2 \times (R^3 - \frac{R^3}{8}) = 3/5 R^3 \quad (2)$$

$$\frac{(2),(1)}{\rightarrow} R = 0.1 \text{ m} \Rightarrow R = 10 \text{ cm}$$

۶۸. گزینه «۱»

$$\rho_{\text{مخلوط}} = \frac{m_1 + m_2}{V_1 + V_2} = \frac{m_1 + m_2}{\frac{m_1}{\rho_1} + \frac{m_2}{\rho_2}} \Rightarrow 1/2 = \frac{100 + m_2}{\frac{100}{4} + \frac{m_2}{1}}$$

$$1/2 \times 25 + 1/2 m_2 = 100 + m_2 \Rightarrow 0.2 m_2 = 70$$

$$\Rightarrow m_2 = \frac{70}{0.2} \Rightarrow m_2 = 350 \text{ g}$$

۶۹. گزینه «۱»

ابتدا جرم مایع موجود در مخزن را به دست می‌آوریم:

$$m_{\text{مایع}} = \rho V = \frac{\rho = 2500 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = 2/5 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}}{V = 2 \times 3 \times 5 = 30 \text{ cm}^3} \rightarrow m_{\text{مایع}} = 2/5 \times 30 = 75 \text{ g}$$

$$\text{آهنگ خروج} = \frac{m}{t} = \frac{\text{جرم مایع}}{\text{مدت زمان خروج}} \Rightarrow \frac{5 \times 10^{-1}}{60} = \frac{75}{t}$$

$$\Rightarrow t = \frac{45 \times 10^3}{5} = 9 \times 10^3 \text{ s}$$

۷۰. گزینه «۲»

ابتدا حجم مکعب و حجم اتم را به یکایی یکسان (هر دو مترمکعب) تبدیل

کرده، سپس قاعده تخمین را در مورد آن‌ها به کار می‌بریم. داریم:

$$\text{حجم مکعب} : V = 96 \text{ mm}^3 = 96 \text{ mm}^3 \times \frac{1 \text{ m}^3}{(10^3)^3 \text{ mm}^3}$$

$$\rightarrow \text{نمادگذاری علمی} \rightarrow 96 \times 10^{-9} \text{ m}^3$$

$$V = (9/6 \times 10^1) \times 10^{-9} = 9/6 \times 10^{-8} \text{ m}^3 \xrightarrow{9/6 \geq 5}$$

$$V \sim 10^1 \times 10^{-8} = 10^{-7} \text{ m}^3$$

$$\rightarrow \text{نمادگذاری علمی} \rightarrow V' = 52 \times 10^{-32} \text{ m}^3$$

$$V' = (5/2 \times 10^1) \times 10^{-32} = 5/2 \times 10^{-31} \text{ m}^3 \xrightarrow{5/2 \geq 5}$$

$$V' \sim 10^1 \times 10^{-31} = 10^{-30} \text{ m}^3$$

در نتیجه تعداد اتم‌های لازم برابر خواهد بود با:

$$n = \frac{V}{V'} = \frac{10^{-7}}{10^{-30}} = 10^{23} \text{ اتم}$$

اگر دستگاه دو معادله دو مجهولی زیر را حل کنیم، مقادیر  $V_{\text{Au}}$  و  $V_{\text{Ag}}$

$$\begin{cases} 19V_{\text{Au}} + 10V_{\text{Ag}} = 68 \\ V_{\text{Au}} + V_{\text{Ag}} = 5 \end{cases} \quad \text{به دست می‌آید:}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 19V_{\text{Au}} + 10V_{\text{Ag}} = 68 \\ 19V_{\text{Au}} + 19V_{\text{Ag}} = 95 \end{cases}$$

$$9V_{\text{Ag}} = 27 \rightarrow V_{\text{Ag}} = 3 \text{ cm}^3, V_{\text{Au}} = 2 \text{ cm}^3$$

خواسته مسئله، محاسبه جرم نقره به کار رفته است، پس طبق تعریف

$$\rho_{\text{Ag}} = \frac{m_{\text{Ag}}}{V_{\text{Ag}}} \xrightarrow{\rho_{\text{Ag}} = 10 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}} \rho_{\text{Ag}} = \frac{m_{\text{Ag}}}{V_{\text{Ag}} = 3 \text{ cm}^3} \rightarrow 10 = \frac{m_{\text{Ag}}}{3}$$

$$\Rightarrow m_{\text{Ag}} = 10 \times 3 = 30 \text{ g}$$

۶۵. گزینه «۲»

گزاره (آ) نادرست است؛ زیرا علی‌رغم اهمیت زیاد آزمایش و مشاهده در

فیزیک، آن چه بیش از همه در پیشبرد و تکامل علم فیزیک نقش ایفا کرده

و می‌کند، تفکر نقادانه و اندیشه‌ورزی فعال فیزیکدانان نسبت به پدیده‌هایی

است که با آن‌ها مواجه می‌شوند.

گزاره (ب) نادرست است؛ زیرا فیزیک، علمی تجربی بوده و تمامی قوانین،

مدل‌ها و نظریه‌های فیزیکی آن باید توسط آزمایش مورد آزمون قرار گیرند.

گزاره (پ) درست است؛ زیرا مدل‌ها و نظریه‌های فیزیکی در طول زمان

همواره معتبر نیستند و این امکان وجود دارد که نتایج آزمایش‌های جدید

منجر به بازنگری در مدل یا نظریه‌ای شود و حتی ممکن است نظریه‌ای

جدید جایگزین آن گردد.

۶۶. گزینه «۴»

$$\frac{100 \text{ mg} \cdot 10^x \text{ m}}{\text{das}^2} = \frac{100 \times 10^{-3} \times 10^{-3} \times 10^x \times \text{kg} \cdot \text{m}}{10^2 \times \text{s}^2} = 0.001 \times 10^3 \text{ N}$$

$$\frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2} = \text{N} \rightarrow \frac{10^x \times 10^{-4}}{10^2} = 10^0 \Rightarrow x = 6$$

پس پیشنهاد مورد نظر M می‌باشد.

۶۷. گزینه «۲»

ابتدا به کمک رابطه  $\rho = \frac{m}{V}$ ، حجم واقعی کره را محاسبه می‌کنیم:

$$\rho = \frac{m}{V} \xrightarrow{\rho = 8 \frac{\text{kg}}{\text{L}} = 8000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}} 8000 = \frac{28}{V}$$

$$\Rightarrow V = \frac{28}{8 \times 10^3} = 3/5 \times 10^{-3} \text{ m}^3 \quad (1)$$

$$0.02 \times 10 \times d - 6 \times 10^{-7} \times 5 \times 10^5 \times d = -\frac{1}{2} \times 0.02 \times 1^2$$

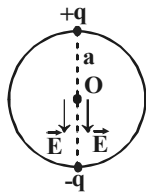
$$\Rightarrow d = \frac{0.01}{(0.3 - 0.2)} = 0.1 \text{ m} = 10 \text{ cm}$$

۷۴. گزینه «۴»

برایند میدان‌های الکتریکی هر یک از دو بار مشابه که مقابل یکدیگر قرار دارند در مرکز دایره برابر با صفر است و بر ایند بارهای  $+q$  و  $-q$  که در بالا

و پایین دایره قرار دارند، برابر است با:

$$|\vec{E}_T| = 2|\vec{E}| = 2k \frac{q}{a^2}$$



۷۵. گزینه «۴»

وقتی دو کره رسانا را با یکدیگر تماس می‌دهیم، طبق قانون پایستگی بار الکتریکی، بار باقی‌مانده برابر با  $+6\mu\text{C}$  است و این بار در سطح خارجی دو جسم رسانای تماس داده شده یعنی در کره  $N$ ، توزیع می‌شود.

۷۶. گزینه «۳»

با توجه به قانون کولن، برایند نیروهای وارد بر  $q_2$  را در دو حالت به دست می‌آوریم:

$$\left. \begin{aligned} F_{12} &= k \frac{|q_1||q_2|}{a^2} \\ F_{22} &= k \frac{|q_2||q_2|}{a^2} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} q_2 &= 2q_1 \rightarrow \frac{F_{12}}{F_{22}} = \frac{1}{2} \Rightarrow F_{22} = 2F_{12} \end{aligned}$$

$$F_T = \sqrt{F_{12}^2 + F_{22}^2} \xrightarrow{F_{22} = 2F_{12}} F_T = \sqrt{5} F_{12} \quad (1)$$

$$F \propto \frac{1}{r^2} \xrightarrow{\substack{r=2\text{cm} \\ r'=4\text{cm}}} \frac{F'_{22}}{F_{22}} = \left(\frac{r}{r'}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow F'_{22} = \frac{F_{22}}{4} \xrightarrow{F_{22} = 2F_{12}} F'_{22} = \frac{F_{12}}{2}$$

$$F'_T = \sqrt{F_{12}^2 + F'_{22}^2} \xrightarrow{F'_{22} = \frac{F_{12}}{2}} F'_T = \sqrt{F_{12}^2 + \frac{F_{12}^2}{4}}$$

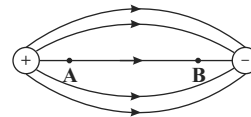
$$\Rightarrow F'_T = \frac{\sqrt{5}}{2} F_{12} \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow \frac{F'_T}{F_T} = \frac{\frac{\sqrt{5}}{2} F_{12}}{\sqrt{5} F_{12}} = \frac{1}{2}$$

## آزمون اول - فیزیک (۲)

۷۱. گزینه «۳»

می‌دانیم که بزرگی نیروی الکتریکی وارد به بار  $q'$  در هر نقطه از میدان برابر  $F_E = E|q'|$  است. از طرفی با توجه به خطوط میدان الکتریکی و تراکم آن‌ها می‌توان گفت که در جابه‌جایی از  $A$  تا  $B$  ابتدا میدان ضعیف‌تر شده و سپس قوی می‌شود. بنابراین بزرگی نیروی الکتریکی وارد به بار  $q'$  ابتدا کاهش و سپس افزایش می‌یابد.

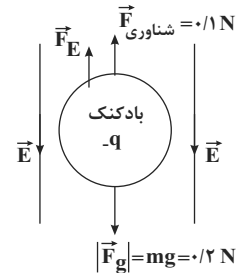


۷۲. گزینه «۲»

نیروی وزن بادکنک رو به پایین و نیروی شناوری وارد بر آن رو به بالاست. برای در تعادل بودن باید برایند سه نیروی وزن، شناوری و نیروی الکتریکی برابر صفر باشد. ابتدا نیروی وزن را محاسبه می‌کنیم:

$$F_g = mg = 20 \times 10^{-2} \times 10 = 0.2 \text{ N}$$

با توجه به شکل و برای تعادل بادکنک، باید نیروی الکتریکی  $\vec{F}_E$  برابر با  $0.1 \text{ N}$  و رو به بالا باشد. چون بار بادکنک منفی است باید جهت میدان رو به پایین باشد.



$$F_E = E|q| \Rightarrow E = \frac{0.1}{4 \times 10^{-7}} = \frac{1}{40} \times 10^{+7} = 2.5 \times 10^5 \frac{\text{N}}{\text{C}}$$

۷۳. گزینه «۲»

با استفاده از قضیه کار و انرژی جنبشی داریم:

$$\Delta K = W_t \xrightarrow{W_t = W_{mg} + W_E} \Delta K = K_f - K_i, K_i = 0 \rightarrow W_{mg} + W_E = 0 - K_i$$

$$\xrightarrow{W_{mg} = mgd, W_E = -|q|Ed} mgd - |q|Ed = -\frac{1}{2} m v_1^2$$

$$K_f = \frac{1}{2} m v_1^2$$

$$\xrightarrow{m = 20 \text{ g} = 0.02 \text{ kg}, g = 10 \frac{\text{N}}{\text{kg}}, v_1 = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}}$$

$$\xrightarrow{q = 0.6 \mu\text{C} = 6 \times 10^{-7} \text{ C}, E = 5 \times 10^5 \frac{\text{N}}{\text{C}}}$$

$$W_t = \Delta K \Rightarrow mg \frac{d}{\gamma} - E' |q| \frac{d}{\gamma} = \frac{1}{2} m v^2 - 0$$

$$\frac{mg = E|q|}{\gamma} \rightarrow E|q| \frac{d}{\gamma} - E'|q| \frac{d}{\gamma} = \frac{1}{2} m v^2$$

$$\frac{E = \frac{\epsilon}{d}, E' = \frac{\gamma \epsilon}{\gamma d}}{\gamma} \rightarrow |q| \frac{d}{\gamma} \left( \frac{\epsilon}{d} - \frac{\gamma \epsilon}{\gamma d} \right) = \frac{1}{2} m v^2$$

$$\Rightarrow \frac{\epsilon |q|}{\gamma} = \frac{1}{2} m v^2 \Rightarrow v^2 = \frac{\epsilon |q|}{\gamma m} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{\epsilon |q|}{\gamma m}}$$

$$\frac{\epsilon = 1.0 \text{ V}, m = 1.5 \text{ mg} = 1.5 \times 10^{-6} \text{ kg}}{|q| = 2 \mu\text{C} = 2 \times 10^{-6} \text{ C}} \rightarrow v = \sqrt{\frac{1.0 \times 2 \times 10^{-6}}{2 \times 1.5 \times 10^{-6}}} = \frac{2}{3} \text{ m/s}$$

### آزمون اول - شیمی (۱)

#### ۸۱. گزینه «۴»

هیدروژن فراوانترین عنصر در سیاره مشتری می باشد.

#### ۸۲. گزینه «۳»

ناپایدارترین ایزوتوپ طبیعی هیدروژن  ${}^3\text{H}$  می باشد.

$$m = 3 \times 1.66 \times 10^{-24} \text{ g} = 4.98 \times 10^{-24} \text{ g} = 4.98 \times 10^{-27} \text{ kg}$$

$$E = mc^2 \Rightarrow E = 4.98 \times 10^{-27} \times (3 \times 10^8)^2 = 4.48 \times 10^{-11} \text{ J}$$

#### ۸۳. گزینه «۳»

می دانیم که خواص شیمیایی عناصر یک گروه در جدول دوره ای عناصرها شبیه به هم است بنابراین عنصری می تواند همانند عنصر B ۱۶ که همان گوگرد (S ۱۶) است، در ترکیب با عنصرهای گروه اول شرکت کند که هم گروه گوگرد باشد بنابراین باید بدانیم B ۱۶ در کدام گروه از جدول تناوبی قرار گرفته است.

عدد اتمی ۱۶ دو خانه از گاز نجیب بعد از آن (Ar ۱۸) فاصله دارد پس به گروه ۱۶ جدول تناوبی (۲-۱۸) تعلق دارد. بنابراین تنها عنصری با عدد اتمی ۳۴ می تواند با گوگرد هم گروه باشد.

#### ۸۴. گزینه «۱»

$$e = p - 2 \Rightarrow e = b - 12 \quad \text{تعداد الکترون های } X^{2+} \text{ برابر است با:}$$

$$p = b - 10$$

$$2b - 50 = b - 12 \Rightarrow b = 38$$

بنابراین:

$$\Rightarrow \text{تعداد پروتون ها} = b - 10 = 38 - 10 = 28$$

$$\text{عدد جرمی} = 2b = 2 \times 38 = 76$$

$$\Rightarrow 76 - 28 = 48 = \text{تعداد نوترون ها} = \text{عدد جرمی} - \text{تعداد پروتون ها}$$

#### ۷۷. گزینه «۲»

$$\Delta V = \frac{\Delta U}{q} \Rightarrow V_C - V_A = \frac{\Delta U}{q}$$

$$4 - 20 = \frac{\Delta U}{1 \times 10^{-6}} \Rightarrow \Delta U = -16 \times 10^{-6} \text{ J} \Rightarrow \Delta U = -16 \mu\text{J}$$

#### ۷۸. گزینه «۴»

چون دی الکتریک را از خازن خارج می کنیم، داریم:

$$C = \frac{\kappa \epsilon_0 A}{d} \Rightarrow C_1 = \kappa C_2$$

با توجه به این که خازن از مولد جدا شده است، بنابراین بار الکتریکی ذخیره شده در آن ثابت می ماند و می توان نوشت:

$$Q_1 = Q_2 \Rightarrow C_1 V_1 = C_2 V_2 \Rightarrow \kappa C_2 V_1 = C_2 V_2 \Rightarrow V_2 = \kappa V_1$$

با خارج کردن دی الکتریک ظرفیت خازن کاهش می یابد. با توجه به این که

بار خازن ثابت است، انرژی ذخیره شده در آن مطابق رابطه  $U = \frac{Q^2}{2C}$

افزایش خواهد یافت. بنابراین انرژی ذخیره شده در خازن به اندازه  $8 \times 10^{-5} \text{ J}$  افزایش می یابد.

$$U_2 = U_1 + 8 \times 10^{-5} = 2 \times 10^{-5} + 8 \times 10^{-5} = 10 \times 10^{-5} \text{ J}$$

$$U = \frac{1}{2} QV \Rightarrow \frac{U_2}{U_1} = \frac{Q_2}{Q_1} \times \frac{V_2}{V_1} \quad Q_1 = Q_2 \rightarrow \frac{U_2}{U_1} = \frac{V_2}{V_1}$$

$$\frac{U_2 = 10 \times 10^{-5} \text{ J}}{V_2 = \kappa V_1} \rightarrow \frac{10 \times 10^{-5}}{2 \times 10^{-5}} = \kappa \Rightarrow \kappa = 5$$

#### ۷۹. گزینه «۲»

انرژی ذخیره شده در خازن از رابطه  $U = \frac{1}{2} CV^2$  به دست می آید داریم:

$$U = \frac{1}{2} \times 10 \times 10^{-6} \times (5 \times 10^3)^2 = 125 \text{ J}$$

توان پالس جریان برابر است با:

$$P = \frac{U}{t} = \frac{125}{5 \times 10^{-3}} = 25000 \text{ W} = 25 \text{ kW}$$

#### ۸۰. گزینه «۱»

$$V = V' \Rightarrow Ed = E'd' = \epsilon \rightarrow \left. \begin{array}{l} E = \frac{\epsilon}{d} \\ E' = \frac{\gamma \epsilon}{\gamma d} \end{array} \right\} \begin{array}{l} d' = d + \frac{d}{\gamma} = \frac{\gamma d}{\gamma} \end{array}$$

در ابتدا ذره ساکن است، بنابراین اندازه نیروی وزن و اندازه نیروی الکتریکی وارد بر ذره با یکدیگر برابر است. با جابه جایی صفحه بالایی، اندازه میدان الکتریکی بین صفحات خازن کاهش می یابد و لذا با کاهش اندازه نیروی الکتریکی، بار به سمت پایین شروع به حرکت می کند.

۲۶Fe: ۱s<sup>2</sup> 2s<sup>2</sup> 2p<sup>6</sup> 3s<sup>2</sup> 3p<sup>6</sup> 3d<sup>6</sup> 4s<sup>2</sup> : آرایش الکترونی

⇒ تعداد الکترون‌های زیرلایه d = ۶

بنابراین نسبت این دو عدد برابر است با:  $\frac{11}{6}$

۹۰. گزینه «۱»

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه «۲»: ۳۵X: 1s<sup>2</sup> 2s<sup>2</sup> 2p<sup>6</sup> 3s<sup>2</sup> 3p<sup>6</sup> 3d<sup>10</sup> 4s<sup>2</sup> 4p<sup>5</sup>

تعداد الکترون‌های ظرفیت عنصر X (۷) از تعداد زیرلایه‌های اشغال شده آن (۸) یک واحد کمتر است.

گزینه «۳»:

در اتم <sup>۲۸</sup>Ni، ۸ الکترون با l=۲ (زیرلایه ۳d) وجود دارد.

گزینه «۴»:

در بین زیرلایه‌ها هر کدام که n+l کوچک‌تری داشته باشد، زودتر پر می‌شود و اگر n+l برای چند زیرلایه برابر بود هر کدام که n کوچک‌تری دارد زودتر پر می‌شود.

زیرلایه	۶p	۷s	۵f	۶d
n+l	۶+۱=۷	۷+۰=۷	۵+۳=۸	۶+۲=۸

۶p → ۷s → ۵f → ۶d

## آزمون اول - شیمی (۲)

۹۱. گزینه «۳»

گسترش صنعت خودرو مدیون شناخت و دسترسی به فولاد است.

۹۲. گزینه «۳»

بررسی موارد:

آ- کربن توانایی به اشتراک گذاشتن الکترون و تشکیل پیوند اشتراکی را دارد (صحیح).

ب- عنصری با عدد اتمی ۱۴ (Si) همانند عنصری با عدد اتمی ۳۲ (Ge) شبه‌فلز است و رسانایی الکتریکی کمی دارد و هردو در اثر ضربه خرد می‌شود (غلط).

پ- با توجه به متن کتاب صحیح است.

ت- با توجه به متن کتاب صحیح است.

۹۳. گزینه «۱»

طبق مطالب موجود در صفحه ۹ کتاب درسی، گزینه «۱» درست است.

۸۵. گزینه «۳»

$$? \text{ g CH}_3\text{OH} = 3/01 \times 10^{23} \text{ atom H} \times \frac{1 \text{ mol H}}{6/02 \times 10^{23} \text{ atom H}}$$

$$\times \frac{1 \text{ mol CH}_3\text{OH}}{4 \text{ mol H}} \times \frac{32 \text{ g CH}_3\text{OH}}{1 \text{ mol CH}_3\text{OH}} = 4 \text{ g CH}_3\text{OH}$$

بررسی موارد:

الف)  $? \text{ g SO}_2 = 0/06 \text{ mol SO}_2 \times \frac{64 \text{ g SO}_2}{1 \text{ mol SO}_2} = 3/84 \text{ g SO}_2$

ب)  $? \text{ g CO} = 3/01 \times 10^{23} \text{ مولکول CO} \times \frac{1 \text{ mol CO}}{6/02 \times 10^{23} \text{ CO}}$

$$\times \frac{28 \text{ g CO}}{1 \text{ mol CO}} = 14 \text{ g CO}$$

پ)  $? \text{ g Fe} = 0/3 \text{ mol Fe} \times \frac{56 \text{ g Fe}}{1 \text{ mol Fe}} = 16/8 \text{ g Fe}$

ت)  $? \text{ g O}_2 = 0/125 \text{ mol O}_2 \times \frac{32 \text{ g O}_2}{1 \text{ mol O}_2} = 4 \text{ g O}_2$

۸۶. گزینه «۲»

رنگ شعله فلز مس و ترکیب‌های حاوی آن، سبز است.

۸۷. گزینه «۴»

اتم‌های هیدروژن با جذب پرتوهای پراثری با طول موج معین می‌توانند از حالت پایه به حالت برانگیخته برسند. (نادرستی گزینه ۱)

هرگاه خطوط طیفی دو طیف نشری خطی بر هم منطبق باشند می‌توان گفت به یک عنصر تعلق دارند. (نادرستی گزینه ۲)

با دور شدن از هسته، لایه‌های الکترونی متوالی به هم نزدیک‌تر می‌شوند بنابراین انتقال الکترون بین دو لایه متوالی که از هسته دورترند به انرژی کمتری نیاز دارد و طول موج پرتوی نشر شده بلندتر می‌باشد. (نادرستی گزینه ۳)

۸۸. گزینه «۲»

آرایش یون  $X^{2+}$  مشابه آرایش الکترونی گاز آرگون می‌باشد، پس آرایش الکترونی اتم آن به صورت  $[Ar]4s^2$  است. بنابراین عدد اتمی X برابر ۲۰ و این اتم در خارجی‌ترین لایه خود ۲ الکترون دارد.

۸۹. گزینه «۲»

$$13Al: 1s^2 \underbrace{2s^2 2p^6}_{\text{لایه ۲}} 3s^2 3p^1$$

⇒ تعداد الکترون‌های ۲ لایه آخر = ۱۱

## ۹۴. گزینه «۳»

بررسی موارد:

آ- تولید نور و آزادسازی گرما می‌توانند نشانه‌هایی از تغییر شیمیایی باشند. (درست)

ب- هرچه شعاع اتمی یک فلزی بزرگ‌تر باشد راحت‌تر الکترون از دست می‌دهد و در نتیجه فعالیت شیمیایی آن بیش‌تر است. (نادرست)

پ- طبق حاشیه صفحه ۱۳ این جمله کاملاً درست است. (درست)

ت- نافلزها چون با گرفتن الکترون به پایداری می‌رسند پس هرچه شعاع آن‌ها کم‌تر باشد واکنش‌پذیری بیشتر تری دارند، پس فلورین از برم واکنش‌پذیرتر است. (نادرست)

## ۹۵. گزینه «۴»

بررسی موارد نادرست:

گزینه «۱»: فلز واسطه‌ای که در وسایل خانه مانند تلویزیون رنگی و برخی شیشه‌ها کاربرد دارد، اسکاندیم است که یون آن ( $Sc^{3+}$ ) به آرایش گاز نجیب ( $Ar$ ) می‌رسد.

گزینه «۲»:  $33V : [Ar]3d^3 4s^2$ 

$3s^2 3p^6 3d^2 : [Ar]3d^2 V^{3+}$  ← لایه سوم آن متشکل از زیرلایه‌های  $3s^2 3p^6 3d^2$  می‌باشد که ۱۰ الکترون دارد.

گزینه «۳»: وجود نمونه‌هایی از فلزهای نقره، مس و پلاتین نیز علاوه بر برخی از نافلزها در طبیعت گزارش شده است.

## ۹۶. گزینه «۴»

بررسی موارد:

آ-  $Fe_2O_3(s) + 2Al(s) \rightarrow 2Fe(l) + Al_2O_3(s)$  (نادرست)

ب- چون واکنش‌دهنده‌ها از فرآورده‌ها در واکنش‌هایی که در طبیعت خودبه‌خود انجام می‌شوند فعال‌ترند، پس  $Al$  از آهن فعال‌تر است. (درست)

پ- از واکنش ترمیت برای جوش دادن خطوط راه‌آهن استفاده می‌شود. (درست)

ت- (نادرست)

$gFe = 81gAl \times \frac{80gAl}{100gAl} \times \frac{1molAl}{27gAl} \times \frac{2molFe}{2molAl}$

$\times \frac{56gFe}{1molFe} = 134 / 4gFe$

## ۹۷. گزینه «۱»



$$? tonCO_2 = 1 / \Delta tonC_6H_{12}O_6 \times \frac{10^6 gC_6H_{12}O_6}{1tonC_6H_{12}O_6}$$

$$\times \frac{60g \text{ خالص}}{100g \text{ ناخالص}} \times \frac{1molC_6H_{12}O_6}{180gC_6H_{12}O_6}$$

$$\times \frac{2molCO_2}{1molC_6H_{12}O_6} \times \frac{44gCO_2}{1molCO_2} \times \frac{80}{100} \times \frac{1tonCO_2}{10^6gCO_2}$$

بازده واکنش

$$= 0 / 252tonCO_2$$

## ۹۸. گزینه «۴»

کافی است که جرم گاز تولیدشده را حساب کنیم که برابر با کاهش جرم محتویات ظرف واکنش می‌باشد.

$$? gSO_3 = 85 / 5gAl_2(SO_4)_3 \times \frac{75gAl_2(SO_4)_3 \text{ خالص}}{100gAl_2(SO_4)_3 \text{ ناخالص}}$$

$$\times \frac{1molAl_2(SO_4)_3}{332gAl_2(SO_4)_3} \times \frac{3molSO_3}{1molAl_2(SO_4)_3} \times \frac{80gSO_3}{1molSO_3} \times \frac{60}{100}$$

$$= 27gSO_3 = \text{میزان کاهش جرم محتویات ظرف واکنش}$$

## ۹۹. گزینه «۱»

طبق مورد ب سؤال ۳ صفحه ۲۵، ۱۵۹ گرم خاکستر از یک کیلوگرم گیاه به‌دست آمده پس جرم گیاه از خاکستر بیش‌تر می‌باشد نه بالعکس.

## ۱۰۰. گزینه «۲»

بررسی گزینه‌ها:

گزینه «۱»: طبق متن کتاب کم‌تر از ده درصد نفت خام مصرفی در دنیا برای مصارفی غیر از تأمین انرژی استفاده می‌شود، پس بیش از ۹۰ درصد از نفت استخراج‌شده، صرف تأمین انرژی می‌شود.

گزینه «۲»: روزانه بیش از ۸۰/۰۰۰/۰۰۰ بشکه نفت خام در دنیا به شکل‌های گوناگون مصرف می‌شود و هر بشکه نفت خام هم‌ارز با ۱۵۹ لیتر است. پس:

$$? m^3 = 80/000/000L \times 159 \times \left(\frac{1m^3}{1000L}\right) = 12 / 720/000m^3$$

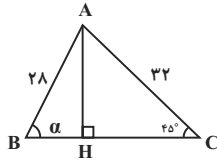
پس بیش از ۱۲ میلیون متر مکعب استفاده می‌شود.

گزینه «۳»: کم‌تر از ده درصد از نفت خام مصرفی در دنیا برای تولید الیاف و پارچه، شوینده‌ها، مواد آرایشی و بهداشتی، رنگ، پلاستیک، مواد منفجره و لاستیک به‌کار می‌رود.

گزینه «۴»: هیدروکربن‌ها ترکیباتی هستند که شامل هیدروژن و کربن می‌باشند.

۱۰۶. گزینه «۲»

با استفاده از نسبت‌های مثلثاتی در مثلث قائم‌الزاویه AHC داریم:



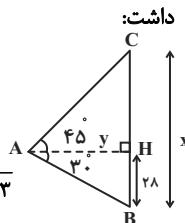
$$\sin \hat{C} = \frac{AH}{AC} \Rightarrow \sin 45^\circ = \frac{AH}{32} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{AH}{32} \Rightarrow AH = 16\sqrt{2}$$

از طرفی در مثلث قائم‌الزاویه ABH نیز داریم:

$$\sin \hat{B} = \frac{AH}{AB} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{16\sqrt{2}}{28} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{16 \times \sqrt{2}}{28} = \frac{4\sqrt{2}}{7}$$

۱۰۷. گزینه «۳»

ارتفاع برج را x در نظر می‌گیریم. در این صورت مثلث زیر را خواهیم داشت:



$$BC = x, AH = y$$

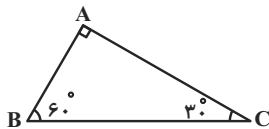
$$\tan 30^\circ = \frac{y}{x} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{y}{x} \Rightarrow y = \frac{x}{\sqrt{3}}$$

$$\tan 45^\circ = \frac{y}{x - y} \Rightarrow 1 = \frac{y}{x - y} \Rightarrow x - y = y \Rightarrow x = 2y$$

$$\Rightarrow x = BC = BH + CH = y + y\sqrt{3} = y(1 + \sqrt{3})$$

۱۰۸. گزینه «۲»

هر شش‌ضلعی منتظم، دایره محیطی خود را به ۶ کمان برابر  $60^\circ$  تقسیم می‌کند. بنابراین زاویه هر رأس و زاویه بین هر دو قطر متوالی یک رأس به ترتیب  $120^\circ$  و  $30^\circ$  خواهد بود. در نتیجه مثلث هاشور خورده مورد نظر، مطابق شکل زیر خواهد بود:



$$\frac{AB}{AC} = \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{3}{AC} \Rightarrow AC = \frac{9}{\sqrt{3}} = 3\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow S = \frac{AB \times AC}{2} = \frac{3 \times 3\sqrt{3}}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{2}$$

۱۰۹. گزینه «۲»

$$P(x, -\frac{\sqrt{3}}{3}) \Rightarrow \cos \theta = x, \sin \theta = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

روی دایره مثلثاتی داریم:

$$x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow x^2 + (-\frac{\sqrt{3}}{3})^2 = 1 \Rightarrow x^2 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\xrightarrow{x > 0} x = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{3}}{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \tan \theta \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{6}$$

آزمون دوم - ریاضی پایه

۱۰۱. گزینه «۳»

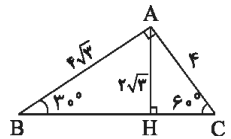
$$\sqrt{5}(\cos \alpha - 2 \sin \alpha) = \sqrt{5} \sin \alpha \left( \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - 2 \right)$$

$$= \sqrt{5} \sin \alpha (\cot \alpha - 2) = 0$$

۱۰۲. گزینه «۳»

$$\Delta AHC : \sin \hat{C} = \frac{AH}{AC} \xrightarrow{\hat{C}=60^\circ} \sin 60^\circ = \frac{AH}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AH}{4} \Rightarrow AH = 2\sqrt{3}$$

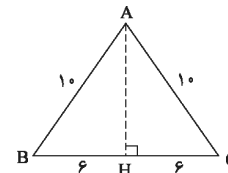


$$\Delta ABC : \hat{C} = 60^\circ \Rightarrow \hat{B} = 30^\circ$$

$$\Delta ABH : \tan \hat{B} = \tan 30^\circ = \frac{AH}{BH} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{BH} \Rightarrow BH = \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 6$$

۱۰۳. گزینه «۲»

می‌دانیم که ارتفاع مثلث متساوی الساقین (AH)، عمود منصف قاعده آن است. پس:



$$\frac{BC}{2} = BH = CH = 6$$

$$\Delta AHC : \text{طبق رابطه فیثاغورس در مثلث} \Rightarrow 10^2 = 6^2 + AH^2$$

$$\Rightarrow AH = 8 \Rightarrow \tan \hat{C} = \frac{AH}{CH} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

۱۰۴. گزینه «۴»

$$\Delta ABC \text{ مساحت} = \frac{1}{2} AB \times BC \times \sin 60^\circ = \frac{1}{2} BC \times AC \times \sin 45^\circ$$

$$\Rightarrow AB \sin 60^\circ = AC \sin 45^\circ \Rightarrow AC = AB \frac{\sin 60^\circ}{\sin 45^\circ}$$

$$= 20 \times \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 10\sqrt{6}$$

۱۰۵. گزینه «۴»

$$S = \frac{1}{2} ab \sin \hat{C} \quad \text{مساحت مثلث از رابطه زیر به دست می‌آید:}$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} (\sqrt{3})(\sqrt{2})(\sin 60^\circ) = \frac{3\sqrt{2}}{4} \Rightarrow \frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta A'B'C'}} = 1$$

$$S_{\Delta A'B'C'} = \frac{1}{2} (\sqrt{6})(\sqrt{3})(\sin 30^\circ) = \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

۱۱۴. گزینه «۳»

$$1 + \cot^2 \theta = \frac{1}{\sin^2 \theta} \Rightarrow \frac{1}{1 + \cot^2 \theta} = \sin^2 \theta \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \cos^2 \theta - \sin^2 \theta &= (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \underbrace{(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)}_1 \\ &= \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \quad (2) \end{aligned}$$

$$\xrightarrow{(2),(1)} \frac{1}{1 + \cot^2 \theta} - \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = \sin^2 \theta + \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$$

$$= \cos^2 \theta = \frac{1}{1 + \tan^2 \theta} = \frac{1}{1 + a^2}$$

۱۱۵. گزینه «۲»

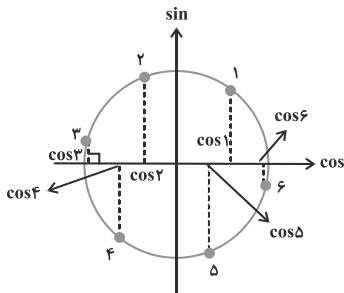
اول زاویه را به رادیان تبدیل می‌کنیم:

$$\frac{D}{180^\circ} = \frac{\theta}{\pi} \Rightarrow \frac{21^\circ}{180^\circ} = \frac{\theta}{\pi} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow L = r\theta = 18 \times \frac{\pi}{6} = 3\pi \text{ (متر)}$$

۱۱۶. گزینه «۳»

روی دایره مثلثاتی زوایای ۱ الی ۶ رادیان را مشخص می‌کنیم. تصویر نقاط انتهایی کمان‌ها بر روی محور افقی برابر با کسینوس آن کمان است.



۱۱۷. گزینه «۳»

می‌دانیم:

$$\log a + \log b + \log c + \dots = \log(a \times b \times c \times \dots)$$

$$A = \log \tan 1^\circ + \log \tan 2^\circ + \dots + \log \tan 88^\circ + \log \tan 89^\circ$$

$$= \log(\tan 1^\circ \times \tan 2^\circ \times \dots \times \tan 88^\circ \times \tan 89^\circ)$$

از طرفی روابط مثلثاتی زیر برقرارند:

$$\tan 89^\circ = \cot 1^\circ, \quad \tan 88^\circ = \cot 2^\circ, \quad \dots$$

$$\Rightarrow A = \log(\tan 1^\circ \times \tan 2^\circ \times \dots \times \tan 44^\circ$$

$$\times \tan 45^\circ \times \frac{\tan 46^\circ}{\cot 46^\circ} \times \frac{\tan 47^\circ}{\cot 47^\circ} \times \dots \times \frac{\tan 89^\circ}{\cot 89^\circ})$$

$$A = \log((\tan 1^\circ \times \cot 1^\circ) \times (\tan 2^\circ \times \cot 2^\circ) \times \dots \times \tan 45^\circ)$$

$$= \log(1 \times 1 \times 1 \times \dots \times 1) = \log 1 = 0$$

۱۱۰. گزینه «۲»

شیب خط برابر با  $\tan 60^\circ$  و معادله آن به صورت زیر است:

$$y + 2 = (\tan 60^\circ) \times (x - 2\sqrt{3}) \Rightarrow y + 2 = \sqrt{3}(x - 2\sqrt{3})$$

$$\Rightarrow y + 2 = \sqrt{3}x - 6 \Rightarrow y = \sqrt{3}x - 8 \xrightarrow{x=0} y = -8$$

۱۱۱. گزینه «۲»

$$\frac{1 - \cos^2 x}{1 - \cos x} = \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{1 - \cos x} = 1 + \cos x$$

$$\Rightarrow A = (1 + \cos x + \tan^2 x) \times \cos^2 x$$

$$\Rightarrow A = (1 + \tan^2 x + \cos x) \times \cos^2 x$$

$$\xrightarrow{1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}}$$

$$A = \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \cos x\right) \times \cos^2 x = 1 + \cos^3 x$$

۱۱۲. گزینه «۲»

$$\frac{1}{\cos \theta} + \frac{1}{\sin \theta} + \tan \theta + \cot \theta$$

$$= \frac{1}{\cos \theta} + \frac{1}{\sin \theta} + \frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

$$= \frac{\sin \theta + \cos \theta}{\sin \theta \cos \theta} + \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta} = \frac{\sin \theta + \cos \theta + 1}{\sin \theta \cos \theta} \quad (1)$$

از طرفی می‌توان با به توان ۲ رساندن طرفین تساوی  $\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$

نوشت:

$$(\sin \theta + \cos \theta)^2 = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \sin^2 \theta + \cos^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta = 1 + 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \sin \theta \cos \theta = -\frac{3}{8}$$

مقادیر را در رابطه (۱) جایگذاری می‌کنیم:

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{2}} + 1}{-\frac{3}{8}} = \frac{\frac{3}{8}}{\frac{1}{8}} = -4$$

۱۱۳. گزینه «۲»

$$\frac{2}{\sin x} + \frac{3}{\cos x} = 0 \Rightarrow \frac{2}{\sin x} = -\frac{3}{\cos x} \Rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x = -\frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \cot x = \frac{1}{\tan x} = -\frac{3}{2} \Rightarrow \tan x - \cot x = -\frac{2}{3} - \left(-\frac{3}{2}\right)$$

$$= -\frac{2}{3} + \frac{3}{2} = \frac{5}{6}$$

$$2 \cos x = -2 \Rightarrow \cos x = -1 \xrightarrow{x \in [0, 2\pi]} x = \pi \Rightarrow C = (\pi, -2)$$

حال طول پاره‌خط AC یا BC را به دست می‌آوریم:

$$AC = BC = \sqrt{(0 - \pi)^2 + (2 - (-2))^2} = \sqrt{\pi^2 + 16}$$

۱۲۳. گزینه «۳»

$$\sin 75^\circ = \sin(30^\circ + 45^\circ) = \sin 30^\circ \cos 45^\circ + \cos 30^\circ \sin 45^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sin 75^\circ} = \frac{4}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{\sqrt{6} - \sqrt{2}} = \frac{4(\sqrt{6} - \sqrt{2})}{4}$$

$$= \sqrt{6} - \sqrt{2}$$

۱۲۴. گزینه «۲»

$$A = \frac{\sin(20^\circ + 50^\circ)}{-\cos(40^\circ + 10^\circ)} = \frac{\sin 70^\circ}{-\cos 50^\circ} = \frac{\cos 20^\circ}{-\sin 40^\circ}$$

$$= \frac{\cos 20^\circ}{-2 \sin 20^\circ \cos 20^\circ} = \frac{-1}{2 \sin 20^\circ}$$

۱۲۵. گزینه «۳»

$$\frac{1}{\sin 10^\circ} - \frac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ} = \frac{\cos 10^\circ - \sqrt{3} \sin 10^\circ}{\sin 10^\circ \cos 10^\circ} \xrightarrow{\tan 60^\circ = \sqrt{3}}$$

$$\frac{\cos 10^\circ - \frac{\sin 60^\circ}{\cos 60^\circ} \sin 10^\circ}{\frac{1}{2} \sin 20^\circ} = \frac{\cos 60^\circ \cos 10^\circ - \sin 60^\circ \sin 10^\circ}{\frac{1}{2} \sin 20^\circ}$$

$$= \frac{\cos(60^\circ + 10^\circ)}{\frac{1}{2} \sin 20^\circ \cos 60^\circ} = \frac{\cos 70^\circ}{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \sin 20^\circ} \xrightarrow{\cos 70^\circ = \sin 20^\circ} \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4$$

۱۲۶. گزینه «۴»

$$A = |\sin x + \cos x| \Rightarrow A^2 = \sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x$$

$$= 1 + \sin 2x \xrightarrow{\sin 2x = \frac{y}{9}} A^2 = 1 + \frac{y}{9} = \frac{16}{9} \xrightarrow{A > 0} A = \frac{4}{3}$$

۱۲۷. گزینه «۲»

$$\begin{cases} \tan x + \cot x = \frac{2}{\sin 2x} \Rightarrow A = \frac{2}{\sin 75^\circ} \\ \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x \Rightarrow B = -\cos 75^\circ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{4B}{A} = \frac{-4 \cos 75^\circ / \sin 75^\circ}{2} \Rightarrow \frac{4B}{A} = -\sin 150^\circ$$

$$\Rightarrow \frac{4B \cos 150^\circ}{A} = -\sin 150^\circ \cos 150^\circ = -\frac{1}{2} \sin 30^\circ = -\frac{1}{4}$$

۱۱۸. گزینه «۱»

$$2 \tan\left(\frac{2\pi}{3} - \theta\right) = \Delta \cos(\pi + \theta)$$

$$\Rightarrow 2 \cot \theta = -\Delta \cos \theta \Rightarrow \frac{2 \cos \theta}{\sin \theta} = -\Delta \cos \theta$$

$$\xrightarrow{\cos \theta \neq 0} \sin \theta = -\frac{2}{\Delta}$$

$\theta$  در ربع چهارم نیست

$$1 + \cot^2 \theta = \frac{1}{\sin^2 \theta} \Rightarrow 1 + \cot^2 \theta = \frac{1}{\frac{4}{9}} \Rightarrow \cot^2 \theta = \frac{16}{9}$$

$$\xrightarrow{\cot \theta > 0} \cot \theta = \frac{4}{3} \Rightarrow \tan \theta = \frac{3}{4}$$

۱۱۹. گزینه «۲»

$$\sin^2 \frac{\pi}{\lambda} + \sin^2 \frac{2\pi}{\lambda} + \sin^2 \frac{3\pi}{\lambda} + \sin^2 \frac{4\pi}{\lambda}$$

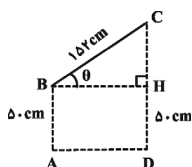
$$= \sin^2 \frac{\pi}{\lambda} + \sin^2 \frac{2\pi}{\lambda} + \cos^2 \left(\frac{\pi}{\lambda} - \frac{\Delta\pi}{\lambda}\right) + \cos^2 \left(\frac{\pi}{\lambda} - \frac{2\pi}{\lambda}\right)$$

$$= \sin^2 \frac{\pi}{\lambda} + \sin^2 \frac{2\pi}{\lambda} + \cos^2 \frac{\pi}{\lambda} + \cos^2 \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$= (\sin^2 \frac{\pi}{\lambda} + \cos^2 \frac{\pi}{\lambda}) + (\sin^2 \frac{2\pi}{\lambda} + \cos^2 \frac{2\pi}{\lambda}) = 1 + 1 = 2$$

۱۲۰. گزینه «۲»

در مثلث قائم‌الزاویه BCH داریم:



$$\sin \theta = \frac{CH}{BC} \Rightarrow CH = BC \sin \theta = 10\sqrt{2} \sin \theta$$

بنا به فرض  $CD = 126$  cm است، پس داریم:

$$CH = CD - DH = 126 - 50 = 76$$

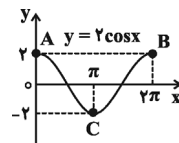
$$76 = 10\sqrt{2} \sin \theta \Rightarrow \sin \theta = \frac{76}{10\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \xrightarrow{\theta \text{ حاده است}} \theta = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$$

۱۲۱. گزینه «۴»

با جایگذاری  $t = \omega / \lambda s$  در رابطه  $h$  داریم:

$$h(\omega / \lambda) = -2 \sin\left(\frac{\Delta\pi}{3} \times \omega / \lambda + \frac{\pi}{6}\right) = -2 \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 2 \text{ متر}$$

۱۲۲. گزینه «۴»



در نقطه ماکزیمم،  $2 \cos x = 2$  و در نقطه مینیمم،  $2 \cos x = -2$  است.

$$2 \cos x = 2 \Rightarrow \cos x = 1 \xrightarrow{x \in [0, 2\pi]} \begin{cases} x = 0 \\ x = 2\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = (0, 2) \\ B = (2\pi, 2) \end{cases}$$