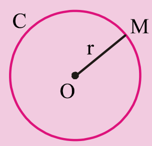
فصل اول ۱

دایره

۱ مفاهیم اولیه

تعریف دایره: دایره مجموعه نقاطی از صفحه است که فاصله‌ی آن‌ها از نقطه‌ی ثابتی واقع در آن صفحه، مقدار ثابتی باشد. نقطه‌ی ثابت، مرکز دایره (O) و مقدار ثابت، اندازه‌ی شعاع دایره (r) نامیده می‌شود. دایره‌ای به مرکز O و به شعاع r را به صورت C(O,r) نشان می‌دهند.

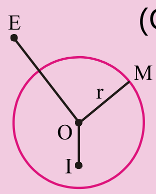


هر دایره، صفحه را به سه بخش جدا از هم تقسیم می‌کند:

داخل دایره: مجموعه‌ی نقطه‌هایی مانند I که فاصله‌ی آن‌ها از مرکز دایره، کمتر از شعاع دایره است $(OI < r)$

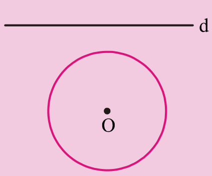
روی دایره: مجموعه نقطه‌هایی مانند M که فاصله‌ی آن‌ها از مرکز دایره، برابر شعاع دایره است $(OM = r)$

خارج دایره: مجموعه نقطه‌هایی مانند E که فاصله آن‌ها از مرکز دایره، بیش‌تر از شعاع دایره است $(OE > r)$

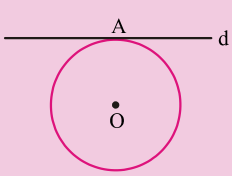


اوضاع نسبی خط و دایره:

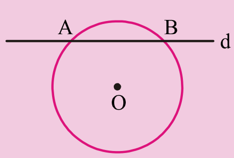
۱) خط و دایره، نقطه مشترک ندارند. در این حالت خط به طور کامل خارج دایره واقع است.



۲) خط و دایره در یک نقطه مشترک‌اند. در این حالت اصطلاحاً گفته می‌شود خط بر دایره مماس است.



۳) خط و دایره دو نقطه اشتراک دارند. در این حالت خط و دایره را متقاطع می‌نامند.



نکته: اگر $C(O,r)$ یک دایره، d یک خط و نقطه‌ی H پای عمودی باشد که از نقطه‌ی O به خط d رسم می‌شود، آن‌گاه:

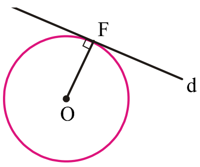
الف) اگر فاصله خط d از مرکز دایره بیش‌تر از شعاع باشد، آن‌گاه خط و دایره، نقطه‌ی اشتراکی ندارند.

ب) اگر فاصله خط d از مرکز دایره برابر با شعاع باشد، آن‌گاه خط و دایره، یک نقطه‌ی اشتراک دارند.

پ) اگر فاصله خط d از مرکز دایره کم‌تر از شعاع باشد، آن‌گاه خط و دایره، دو نقطه‌ی اشتراک دارند.

مثال ۱) در نقطه‌ی F واقع بر دایره C(O,r)، خطی بر دایره مماس رسم کنید.

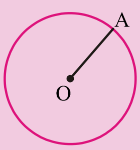
«کتاب درسی- مرتبط با فعالیت صفحه ۱۰»



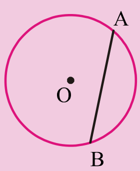
پاسخ *می‌دانیم اگر F نقطه‌ای روی دایره باشد، شعاع نقطه‌ی F (شعاع OF) و خط مماس بر دایره در نقطه‌ی F بر هم عمود هستند، بنابراین برای رسم مماس، کافی است از F به O (مرکز دایره) وصل کرده و سپس خط d را در نقطه‌ی F ، عمود بر OF رسم نماییم.*

یادآوری برخی از مفاهیم دایره:

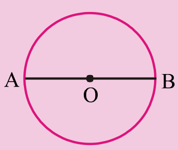
۱-شعاع دایره: پاره خطی است که یک سر آن مرکز دایره و سر دیگر آن نقطه‌ای روی دایره است. در شکل مقابل پاره خط OA، یکی از شعاع های دایره است.



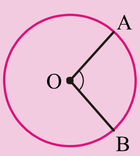
۲-وتر دایره: پاره خطی است که دو سر آن روی دایره باشد. در شکل مقابل پاره خط AB وتری از دایره است.



۳-قطر دایره: وتری از دایره است که از مرکز دایره می‌گذرد. در شکل مقابل، پاره خط AB ، قطری از دایره است.

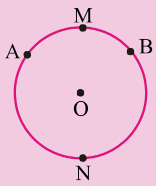


۴-زاویه‌ی مرکزی: زاویه‌ای که رأس آن مرکز دایره باشد، زاویه‌ی مرکزی نامیده می‌شود. در شکل مقابل، زاویه‌ی $A\hat{O}B$ ، یک زاویه‌ی مرکزی است.



۵- کمان: هر دو نقطه از دایره مانند A و B، دو کمان AB را روی دایره مشخص می‌کنند. برای مشخص کردن آن‌ها می‌توان از نقطه‌ای

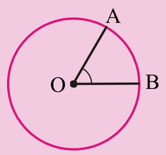
دیگر روی هر کمان استفاده کرد. به عنوان مثال:



در شکل مقابل، نقاط A و B، دو کمان AMB و ANB را روی دایره مشخص می‌کنند. معمولاً منظور از کمان AB، کمان کوچک‌تر مشخص شده توسط A و B است.

تذکر: اندازه‌ی کمان، همان اندازه‌ی زاویه‌ی مرکزی مقابل به آن کمان تعریف می‌شود و واحد آن درجه است.

رابطه‌ی بین طول و اندازه‌ی کمان:

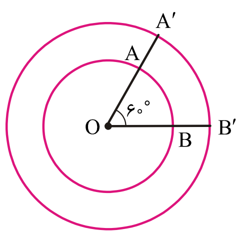


با توجه به این که محیط دایره، یک کمان به اندازه‌ی 360° است، داریم:

$$\frac{\text{طول کمان } AB}{\text{محیط دایره}} = \frac{\text{اندازه کمان } AB}{360^\circ}$$

▼مثال ۲) در شکل روبه‌رو، شعاع‌های دو دایره برابر ۳ و ۶ است: طول کمان‌های AB و $A'B'$ را تعیین کنید.

(صفحه ۱۲ کتاب درسی- مرتبط با کار در کلاس)



پاسخ

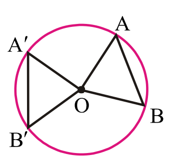
محیط دایره کوچکتر برابر $2\pi \times 3 = 6\pi$ و محیط دایره بزرگتر برابر $2\pi \times 6 = 12\pi$ است. داریم:

$$\frac{60^\circ}{360^\circ} = \frac{\text{طول کمان } AB}{6\pi} \Rightarrow \text{طول کمان } AB = \pi$$

$$\frac{60^\circ}{360^\circ} = \frac{\text{طول کمان } A'B'}{12\pi} \Rightarrow \text{طول کمان } A'B' = 2\pi$$

▼مثال ۳) ثابت کنید در یک دایره، وترهای نظیر دو کمان مساوی با هم برابرند.

(صفحه ۱۳ کتاب درسی- مرتبط با فعالیت ۱- قم- ریحانة النبی (س) ۸۸)



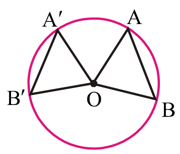
پاسخ

فرض: $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{A'B'}$ حکم: $AB = A'B'$

می‌دانیم اندازه یک کمان، برابر اندازه‌ی زاویه‌ی مرکزی روبه‌رو به آن است، پس داریم:

$$\left.\begin{array}{r} \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{A'B'} \Rightarrow A\hat{O}B = A'\hat{O}B' \\ OA = OA' = r \\ OB = OB' = r \end{array}\right\} \xRightarrow{(\text{ض ز ض})} \triangle AOB \cong \triangle A'OB' \Rightarrow AB = A'B'$$

▼مثال ۴) ثابت کنید در یک دایره، کمان های نظیر دو وتر مساوی با هم برابرند.
(صفحه ۱۳ کتاب درسی- مرتبط با فعالیت ، قم- ریحانة النبی (س) ۸۸)



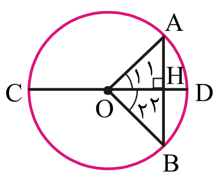
پاسخ

فرض: $AB = A'B'$ حکم: $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{A'B'}$

$$\left.\begin{array}{l} AB = A'B' \\ OA = OA' = r \\ OB = OB' = r \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle AOB \overset{\text{(ض ض ض)}}{\cong} \triangle A'OB' \Rightarrow A\hat{O}B = A'\hat{O}B' \Rightarrow \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{A'B'}$$

▼مثال ۵) ثابت کنید در هر دایره، قطر عمود بر هر وتر، آن وتر و کمان نظیر آن وتر را نصف می‌کند.
(صفحه ۱۳ کتاب درسی- مرتبط با فعالیت ، امتحان نهایی خرداد ۸۸)

پاسخ

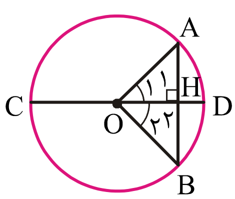


فرض: $CD \perp AB$ حکم: $\begin{cases} AH = BH \\ \overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BD} \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l} OA = OB = r \\ OH = OH \\ \hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle AOH \overset{\text{(وتر و یک ضلع)}}{\cong} \triangle BOH \Rightarrow \begin{cases} AH = BH \\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \Rightarrow \overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BD} \end{cases}$$

▼مثال ۶) ثابت کنید اگر قطری از یک دایره، یکی از وترهای آن دایره را نصف کند، بر آن وتر عمود است و کمان نظیر آن وتر را نیز نصف می‌کند
(صفحه ۱۳کتاب درسی- مرتبط با فعالیت، مشهد، شهید هاشمی‌نژاد- ۸۸)

پاسخ

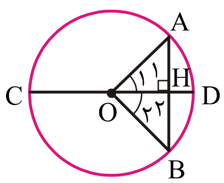


فرض: $AH = BH$ حکم: $\begin{cases} CD \perp AB \\ \overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BD} \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l} OA = OB = r \\ OH = OH \\ AH = BH \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle AOH \overset{\text{(ض ض ض)}}{\cong} \triangle BOH \Rightarrow \begin{cases} \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \Rightarrow \overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BD} \\ \hat{H}_1 = \hat{H}_2 \xrightarrow{\hat{H}_1 + \hat{H}_2 = 180^\circ} \hat{H}_1 = 90^\circ \Rightarrow CD \perp AB \end{cases}$$

▼مثال ۷) ثابت کنید اگر قطری از دایره، کمانی از دایره را نصف کند، آن گاه بر وتر نظیر آن کمان عمود است و آن را نصف می‌کند.
(صفحه ۱۳ کتاب درسی- مرتبط با فعالیت ، یزد- فلاح ۸۸)

پاسخ

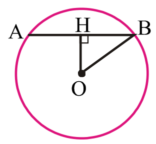


فرض: $\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BD}$ حکم: $\begin{cases} AH=BH \\ CD\perp AB \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l} \overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BD}\Rightarrow \hat{O}_۱=\hat{O}_۲ \\ OA=OB=r \\ OH=OH \end{array}\right\}\Rightarrow \triangle AOH \overset{(\text{ض ز ض})}{\cong} \triangle BOH \Rightarrow \begin{cases} AH=BH \\ \hat{H}_۱=\hat{H}_۲ \end{cases}$$

$$\hat{H}_۱=\hat{H}_۲ \xrightarrow{\hat{H}_۱+\hat{H}_۲=۱۸۰^\circ} \hat{H}_۱=۹۰^\circ \Rightarrow CD\perp AB$$

▼مثال ۸) دایره‌ی $C(O,۲۶)$ داده شده است. اگر فاصله‌ی وتر AB از مرکز دایره برابر ۱۰ باشد، طول وتر AB را به دست آورید.



(صفحه ۱۳ کتاب درسی- مکمل و مرتبط با فعالیت ، قزوین باریک‌بین- ۸۸)

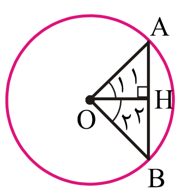
پاسخ

$$\triangle OBH: OB^۲=OH^۲+BH^۲ \Rightarrow ۲۶^۲=۱۰^۲+BH^۲$$

$$\Rightarrow BH^۲=۶۷۶-۱۰۰=۵۷۶\Rightarrow BH=۲۴\Rightarrow AB=۲\times۲۴=۴۸$$

▼مثال ۹) در دایره $C(O,R)$ ، $\overset{\frown}{AB}=۶۰^\circ$ و $AB=۱۰$ ، فاصله O از وتر AB را به دست آورید.

(صفحه ۱۷ کتاب درسی- مرتبط با تمرین ۷)



پاسخ اگر از نقطه‌ای O ، عمود OH را بر وتر AB رسم کنیم ، آن‌گاه داریم:

$$\left.\begin{array}{l} OA=OB=r \\ OH=OH \\ \hat{H}_۱=\hat{H}_۲=۹۰^\circ \end{array}\right\}\Rightarrow \triangle AOH \overset{(\text{وتر و یک ضلع})}{\cong} \triangle BOH \Rightarrow \begin{cases} \hat{O}_۱=\hat{O}_۲ \\ AH=BH=۵ \end{cases}$$

از آنجا که $\overset{\frown}{AB}=۶۰^\circ$ ، پس $A\hat{O}B=۶۰^\circ$ و در نتیجه $\hat{O}_۱=۳۰^\circ$ است. می‌دانیم ضلع روبه‌رو به زاویه‌ی ۳۰° در یک مثلث قائم‌الزاویه نصف وتر است، پس داریم:

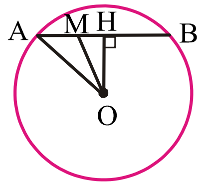
$$\triangle OAH: \hat{O}_۱=۳۰^\circ \Rightarrow AH=\frac{۱}{۲}OA \xrightarrow{AH=۵} OA=۱۰$$

$$\triangle OAH: OA^۲=OH^۲+AH^۲ \Rightarrow ۱۰۰=OH^۲+۲۵\Rightarrow OH^۲=۷۵\Rightarrow OH=۵\sqrt{۳}$$

▼مثال ۱۰) از نقطه M درون دایره $C(O,r)$ ، خطی رسم کرده‌ایم تا دایره را در نقاط A و B قطع کند. اگر $MA=۹$ ، $MB=۲۱$ و $MO=۱۰$ باشند، طول شعاع دایره کدام است؟

(صفحه ۱۳ کتاب درسی)

۱) ۱۵ ۲) ۱۷ ۳) ۲۰ ۴) ۲۴



پاسخ می‌دانیم قطر عمود بر وتر، وتر را نصف می‌کند، پس داریم:

$$AH=\frac{MA+MB}{۲}=\frac{۹+۲۱}{۲}=۱۵ \Rightarrow MH=AH-AM=۱۵-۹=۶$$

$$\triangle OMH: OM^۲=MH^۲+OH^۲ \Rightarrow ۱۰^۲=۶^۲+OH^۲ \Rightarrow OH^۲=۶۴ \Rightarrow OH=۸$$

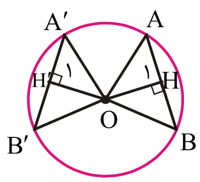
$$\triangle OAH: OA^۲=AH^۲+OH^۲=۱۵^۲+۸^۲=۲۸۹ \Rightarrow OA=۱۷ \Rightarrow r=۱۷$$

▼ مثال ۱۱) ثابت کنید در یک دایره، وتر های مساوی، از مرکز دایره به یک فاصله‌اند و بالعکس.

(صفحه ۱۳ کتاب درسی- مکمل و مرتبط با فعالیت ، قزوین علامه جعفری- ۸۷)

پاسخ از نقطه‌ی O (مرکز دایره) بر دو وتر AB و $A'B'$ ، دو عمود OH و OH' را رسم می‌کنیم.

ابتدا ثابت می‌کنیم دو وتر مساوی، از مرکز دایره به یک فاصله‌اند.



فرض : $AB=A'B'$ حکم : $OH=OH'$

$$\left.\begin{array}{l} AB=A'B' \Rightarrow \frac{AB}{۲}=\frac{A'B'}{۲} \Rightarrow AH=A'H' \\ \widehat{H}_۱=\widehat{H}'_۱=۹۰^\circ \\ OA=OA'=r \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{(وتر و یک ضلع)}} \triangle AOH \cong \triangle A'OH' \Rightarrow OH=OH'$$

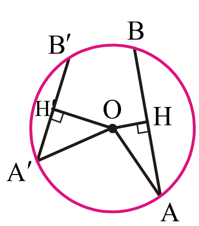
حال نشان می‌دهیم که اگر دو وتر از مرکز دایره به یک فاصله باشند، مساوی یکدیگرند.

فرض: $OH=OH'$ حکم: $AB=A'B'$

$$\left.\begin{array}{l} OH=OH' \\ \widehat{H}_۱=\widehat{H'}_۱=۹۰^\circ \\ OA=OA'=r \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{(وتر و یک ضلع)}} \triangle AOH \cong \triangle A'OH' \Rightarrow AH=A'H' \Rightarrow ۲AH=۲A'H' \Rightarrow AB=A'B'$$

▼ مثال ۱۲) ثابت کنید در یک دایره، از دو وتر نابرابر، آن که بزرگ‌تر است به مرکز دایره نزدیک‌تر است و بالعکس.

(صفحه ۱۷ کتاب درسی- مرتبط با تمرین ۸، امتحان نهایی خرداد ۸۹)



پاسخ فرض کنیم وتر AB بزرگ‌تر از وتر $A'B'$ باشد. در این صورت داریم:

$$AB>A'B' \Leftrightarrow \frac{AB}{۲}>\frac{A'B'}{۲} \Leftrightarrow AH>A'H' \Leftrightarrow AH^۲>A'H'^۲$$

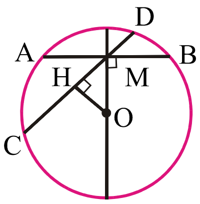
$$\Leftrightarrow -AH^۲<-A'H'^۲ \Leftrightarrow R^۲-AH^۲<R^۲-A'H'^۲ \Leftrightarrow OA^۲-AH^۲<OA'^۲-A'H'^۲$$

$$\Leftrightarrow OH^۲<OH'^۲ \Leftrightarrow OH<OH'$$

چون تمامی روابط دو طرفه هستند، پس دو طرف قضیه اثبات می‌شود، یعنی وتری که بزرگ‌تر است به مرکز دایره نزدیک‌تر می‌شود و بالعکس وتری که به مرکز دایره نزدیک‌تر باشد، بزرگ‌تر است.

▼مثال ۱۳) **ثابت کنید کوچک‌ترین وتری که از یک نقطه درون دایره می‌توان رسم کرد وتری است که بر قطر گذرنده از آن نقطه، عمود است.**

(صفحه ۱۳ کتاب درسی- مکمل و مرتبط با فعالیت ، رشت اندیشه‌های شریف ۸۸)



پاسخ
وتر AB گذرنده از نقطه M که بر قطر گذرنده از این نقطه عمود است را رسم می‌کنیم.

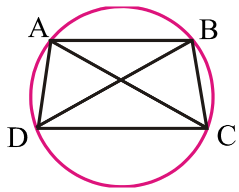
اگر CD وتری دلخواه گذرنده از نقطه M باشد، نشان می‌دهیم AB کوچک‌تر از CD است.

$$\triangle OMH: \widehat{H} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{H} > \widehat{M} \xrightarrow{\text{زاویه برتر}} OM > OH$$

چون مرکز دایره به وتر CD نزدیک‌تر است، پس وتر CD از وتر AB بزرگ‌تر است و حکم ثابت می‌شود.

▼مثال ۱۴) **با توجه به شکل مقابل نشان دهید:**

(صفحه ۱۳ کتاب درسی- مکمل و مرتبط با فعالیت)



الف) اگر $AD = BC$، آن‌گاه $AC = BD$

ب) اگر $AC = BD$، آن‌گاه $AD = BC$

پاسخ

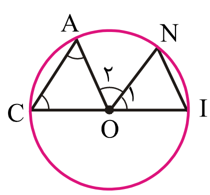
الف) $AD = BC \Rightarrow \overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BC} \Rightarrow \overset{\frown}{AD} + \overset{\frown}{DC} = \overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{CD} \Rightarrow \overset{\frown}{ADC} = \overset{\frown}{BCD} \Rightarrow AC = BD$

(وترهای مساوی، کمان‌های مساوی دارند و بالعکس)

ب) $AC = BD \Rightarrow \overset{\frown}{ADC} = \overset{\frown}{BCD} \Rightarrow \overset{\frown}{AD} + \overset{\frown}{DC} = \overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{CD} \Rightarrow \overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BC} \Rightarrow AD = BC$

▼مثال ۱۵) **در دایره‌ای به مرکز O و به قطر CI، داریم $CA \parallel ON$. ثابت کنید $\overset{\frown}{AN} = \overset{\frown}{NI}$.**

(صفحه ۱۳ کتاب درسی- مکمل و مرتبط با فعالیت ، کرج، روزنامه اطلاعات ۸۸)

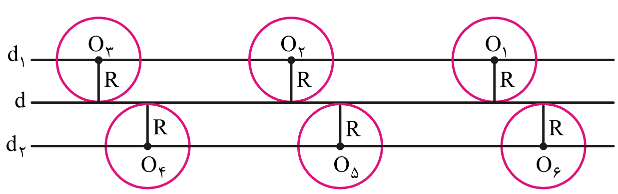


پاسخ
از O به A وصل می‌کنیم. در مثلث OAC، $OA = OC$ است، پس $\widehat{A} = \widehat{C}$.

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l} CA \parallel ON \\ \text{مورب}\ CI \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{C} = \widehat{O}_1 \\ \left.\begin{array}{l} CA \parallel ON \\ \text{مورب}\ AO \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{A} = \widehat{O}_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{O}_1 = \widehat{O}_2 \xrightarrow{\text{زاویه مرکزی}} \overset{\frown}{NI} = \overset{\frown}{AN}$$

▼مثال ۱۶) **خط d مفروض است. مرکز های همه دایره‌هایی که شعاع آن‌ها مقدار ثابت R است و بر این خط مماس هستند، روی چه شکلی هستند؟ این شکل چه وضعی نسبت به d دارد؟**

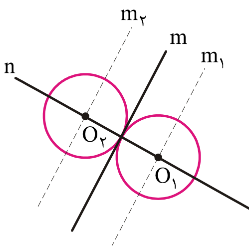
(صفحه ۱۱ کتاب درسی)



پاسخ
مطابق شکل مراکز دایره‌هایی که شعاع آن‌ها مقدار ثابت R است و بر خط d مماس می‌باشند، روی دو خط d_1 و d_2 قرار دارند که موازی با خط d بوده و به فاصله‌ی R در طرفین خط d واقع می‌باشند.

▼مثال ۱۷) دو خط m و n در نقطه‌ی A متقاطعند. دایره‌ای رسم کنید که مرکز آن روی n و شعاع آن ۲ سانتی‌متر بوده و بر m مماس باشد.

(صفحه ۱۱ کتاب درسی)



پاسخ مطابق مثال قبل، مراکز دایره‌هایی که شعاع آن‌ها ۲ سانتی متر بوده و بر خط m مماس باشند، روی دو خط موازی m و به فاصله ۲ سانتی متر در طرفین آن قرار دارند.

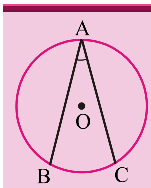
بنابراین ابتدا دو خط m_1 و m_2 را موازی m و به فاصله‌ی ۲ سانتی متر از آن رسم می‌کنیم. محل تلاقی این دو خط با خط n (یعنی نقاط O_1 و O_2) مراکز دو دایره مورد نظر است که به شعاع ۲ سانتی‌متر رسم می‌شوند.

۲ زاویه‌ها در دایره

زاویه محاطی

زاویه‌ای است که رأس آن روی دایره و اضلاع آن، دو وتر از دایره باشند.

کمانی از دایره را که به دو ضلع زاویه‌ی محاطی محدود و در داخل زاویه واقع است، کمان روبه‌رو به آن زاویه می‌نامند.



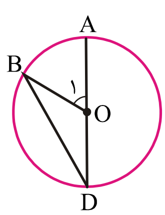
▼مثال ۱۸) ثابت کنید اندازه‌ی زاویه‌ی محاطی، نصف کمان روبه‌روی آن است.

(صفحه ۱۳ کتاب درسی- مرتبط با فعالیت، کرج- فرزانگان سارا، ۸۸)

پاسخ اثبات قضیه را در سه حالت مختلف بررسی می‌کنیم.

الف) یک ضلع زاویه از مرکز دایره عبور کند.

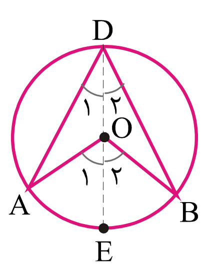
از نقطه‌ی B به مرکز دایره وصل می‌کنیم.



$$\triangle ODB: \text{زاویه خارجی است } \left.\begin{array}{l}\hat{O}_1 \Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{D} + \hat{B} \\ OB = OD = r \Rightarrow \hat{D} = \hat{B}\end{array}\right\} \Rightarrow \hat{O}_1 = 2\hat{D} \Rightarrow \hat{D} = \frac{\hat{O}_1}{2} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2}$$

ب) دو ضلع زاویه در دو طرف مرکز دایره واقع شده‌اند.

ابتدا قطر گذرنده از نقطه D را رسم کرده و سپس از نقاط A و B به مرکز دایره وصل می‌کنیم.



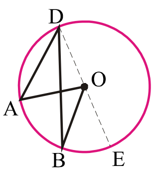
$$\triangle OAD: \text{زاویه خارجی است } \left.\begin{array}{l}\hat{O}_1 \Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{D}_1 + \hat{A} \\ OA = OD = r \Rightarrow \hat{D}_1 = \hat{A}\end{array}\right\} \Rightarrow \hat{O}_1 = 2\hat{D}_1 \quad \boxed{1}$$

$$\triangle OBD: \text{زاویه خارجی است } \left.\begin{array}{l}\hat{O}_2 \Rightarrow \hat{O}_2 = \hat{D}_2 + \hat{B} \\ OB = OD = r \Rightarrow \hat{D}_2 = \hat{B}\end{array}\right\} \Rightarrow \hat{O}_2 = 2\hat{D}_2 \quad \boxed{2}$$

$$\boxed{۱}\,,\,\boxed{۲} \Rightarrow \hat{O}_۱+\hat{O}_۲=۲(\hat{D}_۱+\hat{D}_۲) \Rightarrow \overset{\frown}{AE}+\overset{\frown}{EB}=۲\hat{D} \Rightarrow \hat{D}=\frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}$$

پ) دو ضلع زاویه در یک طرف مرکز دایره واقع شده‌اند.

ابتدا قطر گذرنده از نقطه D را رسم کرده و سپس از نقاط A و B به مرکز دایره وصل می‌کنیم.



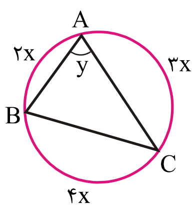
$$\triangle OAD: \text{زاویه خارجی است}\ \ \left.\begin{array}{l} A\hat{O}E \Rightarrow A\hat{O}E=A\hat{D}O+\hat{A} \\ OA=OD=r \Rightarrow A\hat{D}O=\hat{A}\end{array}\right\} \Rightarrow A\hat{O}E=۲A\hat{D}O\ \boxed{۱}$$

$$\triangle OBD: \text{زاویه خارجی است}\ \ \left.\begin{array}{l} B\hat{O}E \Rightarrow B\hat{O}E=B\hat{D}O+\hat{B} \\ OB=OD=r \Rightarrow B\hat{D}O=\hat{B}\end{array}\right\} \Rightarrow B\hat{O}E=۲B\hat{D}O\ \boxed{۲}$$

$$\boxed{۱}\,,\,\boxed{۲} \Rightarrow A\hat{O}E-B\hat{O}E=۲(A\hat{D}O-B\hat{D}O) \Rightarrow \overset{\frown}{ABE}-\overset{\frown}{BE}=۲A\hat{D}B \Rightarrow A\hat{D}B=\frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}$$

▼مثال ۱۹) در شکل روبه برو، اندازه های x و y را بیابید.

(صفحه ۱۳ کتاب درسی- تهران- هفتم تیر، ۸۸)



پاسخ

محیط یک دایره معادل ۳۶۰° است. بنابراین داریم:

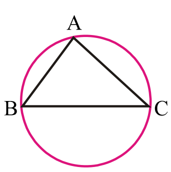
$$۲x+۳x+۴x=۳۶۰^\circ \Rightarrow ۹x=۳۶۰^\circ \Rightarrow x=۴۰^\circ$$

$$\text{زاویه محاطی}\ y=\frac{۴x}{۲}=۲x \Rightarrow y=۸۰^\circ$$

▼مثال ۲۰) با استفاده از تعریف زاویه محاطی نشان دهید مجموع زاویه‌های داخلی هر مثلث ۱۸۰° است.

(صفحه ۱۳ کتاب درسی- تهران ثامن الائمه (ع)، ۸۸)

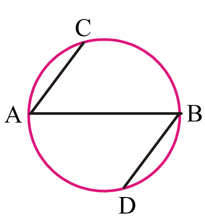
پاسخ



$$\left.\begin{array}{l} \hat{A}=\frac{\overset{\frown}{BC}}{۲}\ (\text{زاویه محاطی}) \\ \hat{B}=\frac{\overset{\frown}{AC}}{۲}\ (\text{زاویه محاطی}) \\ \hat{C}=\frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}\ (\text{زاویه محاطی}) \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=\frac{\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{AB}}{۲}=\frac{۳۶۰^\circ}{۲}=۱۸۰^\circ$$

▼مثال ۲۱) در شکل مقابل AB قطری از دایره است و وترهای AC و BD موازی‌اند. ثابت کنید: AC=BD

(صفحه ۱۷ کتاب درسی- مرتبط با تمرین ۵)



پاسخ

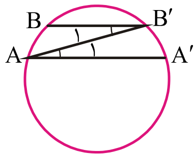
$$\left.\begin{array}{l} AC \parallel BD \\ \text{مورب}\ AB \end{array}\right\} \Rightarrow C\hat{A}B=A\hat{B}D \xrightarrow{\text{زاویه محاطی}} \frac{\overset{\frown}{BC}}{۲}=\frac{\overset{\frown}{AD}}{۲} \Rightarrow \overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{AD}$$

$$\Rightarrow ۱۸۰^\circ-\overset{\frown}{BC}=۱۸۰^\circ-\overset{\frown}{AD} \Rightarrow \overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD} \Rightarrow AC=BD$$

▼مثال ۲۲) دو وتر AA' و BB' از دایره موازی یکدیگرند. ثابت کنید: $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{A'B'}$

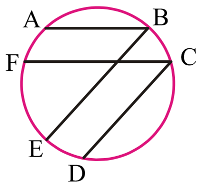
(صفحه ۱۵ کتاب درسی- مرتبط با فعالیت و کار در کلاس)

پاسخ



حکم: $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{A'B'}$ فرض: $AA' \parallel BB'$

$$\left.\begin{array}{l} AA' \parallel BB' \\ AB' \text{ مورب} \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{B}'_1 \xrightarrow{\text{زاویه محاطی}} \frac{\overset{\frown}{A'B'}}{۲} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲} \Rightarrow \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{A'B'}$$



▼ مثال ۲۳) در شکل مقابل، $AB \parallel FC$ ، $CD \parallel BE$، کمان AB برابر با ۶۰°، کمان CD برابر با ۴۰° و کمان EF برابر با ۱۱۰°، است. اندازه زاویه FCD چقدر است؟

(صفحه ۱۵ کتاب درسی- مکمل و مرتبط با ، آزاد ریاضی - ۷۷)

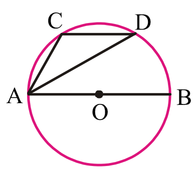
۱) ۹۰° ۲) ۵۵° ۳) ۷۰° ٤) ۸۰°

پاسخ با توجه به مثال قبل داریم:

$$\overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{ED} = \overset{\frown}{AF} = x \Rightarrow ۳x + ۱۱۰^\circ + ۴۰^\circ + ۶۰^\circ = ۳۶۰^\circ \Rightarrow x = ۵۰^\circ$$

$$F\hat{C}D = \frac{\overset{\frown}{DE} + \overset{\frown}{EF}}{۲} = \frac{۵۰^\circ + ۱۱۰^\circ}{۲} = ۸۰^\circ$$

گزینه ۴ صحیح است.



▼ مثال ۲۴) در دایره‌ای به قطر AB، وتر CD موازی قطر AB رسم شده است. اندازه $A\hat{C}D - A\hat{D}C$ کدام است؟

(صفحه ۱۳ کتاب درسی- مکمل و مرتبط با صفحه ۱۳)

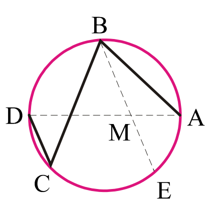
۱) ۹۰° ۲) ۵۵° ۳) ۷۰° ٤) ۸۰°

پاسخ از نقطه A به نقاط C و D وصل می‌کنیم. در شکل مقابل داریم:

$$CD \parallel AB \Rightarrow \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD}$$

$$A\hat{C}D - A\hat{D}C = \frac{\overset{\frown}{BD} + \overset{\frown}{AB}}{۲} - \frac{\overset{\frown}{AC}}{۲} = \frac{\overset{\frown}{BD}}{۲} + \frac{۱۸۰^\circ}{۲} - \frac{\overset{\frown}{AC}}{۲} = ۹۰^\circ$$

گزینه ۱ صحیح است.



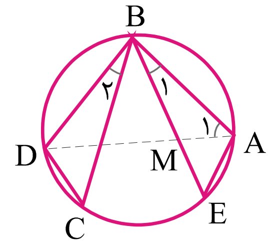
▼ مثال ۲۵) در شکل مقابل $AB = ۶$, $BC = ۸$, $CD = ۳$ و $\overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{CD}$. اندازه AM کدام است؟

(صفحه ۵ کتاب درسی- مکمل و مرتبط با آن، سراسری ریاضی خارج ازکشور-۹۳)

۱) ۲ ۲) ۲/۲۵ ۳) ۲/۵ ٤) ۲/۷۵

پاسخ از B به D وصل می‌کنیم.

$$\left.\begin{array}{l} \hat{B}_1 = \dfrac{\overset{\frown}{AE}}{۲} \\ \hat{B}_2 = \dfrac{\overset{\frown}{CD}}{۲} \end{array}\right\} \xrightarrow{\overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{CD}} \hat{B}_1 = \hat{B}_2$$



$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}_1=\dfrac{\overset{\frown}{BD}}{۲}\\ \hat{C}=\dfrac{\overset{\frown}{BD}}{۲}\end{array}\right\}\Rightarrow \hat{A}_1=\hat{C}$$

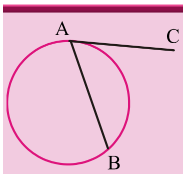
بنابراین دو مثلث ABM و BCD به حالت تساوی دو زاویه متشابه‌اند و داریم:

$$\frac{AB}{BC}=\frac{AM}{CD}\Rightarrow\frac{۶}{۸}=\frac{AM}{۳}\Rightarrow AM=\frac{۱۸}{۸}=۲/۲۵$$

گزینه ۲ صحیح است.

زاویه ظلی

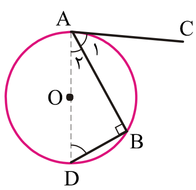
زاویه‌ای است که رأس آن روی دایره قرار دارد و یکی از اضلاع آن، وتر دایره و ضلع دیگر آن مماس بر دایره باشد.



▼مثال ۲۶) ثابت کنید اندازه هر زاویه ظلی، برابر نصف کمان روبه روی آن است.

(صفحه ۱۴ کتاب درسی- مرتبط با فعالیت، مشهد، صیرفی ۸۸)

پاسخ

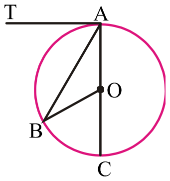


ابتدا قطری از دایره که از نقطه A می‌گذرد را رسم می‌کنیم و سپس از B به D وصل می‌کنیم. زاویه B، زاویه محاطی روبه رو به قطر AD است، پس $\hat{B}=\frac{۱۸۰^\circ}{۲}=۹۰^\circ$.

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{r}\triangle ABD:\ \hat{B}=۹۰^\circ\Rightarrow\hat{D}+\hat{A}_۲=۹۰^\circ\\ CA\perp AD\Rightarrow\hat{A}_۱+\hat{A}_۲=۹۰^\circ\end{array}\right\}\Rightarrow\hat{A}_۱=\hat{D}\\ \hat{D}=\dfrac{\overset{\frown}{AB}}{۲}\quad\text{(زاویه محاطی)}\end{array}\right\}\Rightarrow\hat{A}_۱=\frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}$$

▼مثال ۲۷) در شکل مقابل AC قطر دایره، اندازه زاویه مرکزی BOC برابر ۷۰° و خط AT در نقطه A بر دایره مماس است. اندازه زاویه TAB را به دست آورید.

(صفحه ۱۴ کتاب درسی- مکمل و مرتبط)



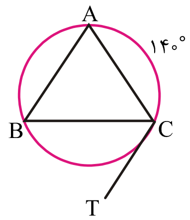
پاسخ

$$B\hat{O}C=۷۰^\circ\Rightarrow\overset{\frown}{BC}=۷۰^\circ\Rightarrow\overset{\frown}{AB}=۱۸۰^\circ-۷۰^\circ=۱۱۰^\circ$$

زاویه TAB ، زاویه ظلی است، بنابراین داریم:

$$T\hat{A}B=\frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}=\frac{۱۱۰^\circ}{۲}=۵۵^\circ$$

▼مثال ۲۸) در شکل رو به رو، AB=AC و CT مماس بر دایره در نقطه‌ی C است. اگر $\overset{\frown}{AC} = ۱۴۰^\circ$ باشد، اندازه زاویه BCT را به دست آورید.



(صفحه ۱۴ کتاب درسی- مکمل و مرتبط- سازی فرزانگان ۸۸)

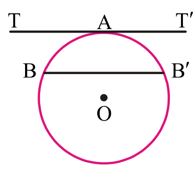
پاسخ

$$AB = AC \Rightarrow \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AC} = ۱۴۰^\circ$$

$$\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{BC} = ۳۶۰^\circ \Rightarrow ۱۴۰^\circ + ۱۴۰^\circ + \overset{\frown}{BC} = ۳۶۰^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{BC} = ۸۰^\circ$$

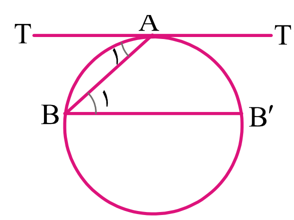
زاویه ظلی: $B\hat{C}T = \frac{\overset{\frown}{BC}}{۲} = \frac{۸۰^\circ}{۲} = ۴۰^\circ$

▼مثال ۲۹) خط TT' در نقطه A بر دایره مماس است و وتر BB' از دایره، موازی TT' است. ثابت کنید $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AB'}$.



(صفحه ۱۴ کتاب درسی- مکمل و مرتبط)

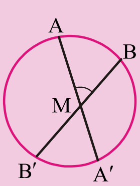
پاسخ از A به B وصل می‌کنیم.



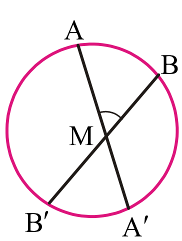
$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{r} TT' \parallel BB' \\ AB\ (\text{مورب}) \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{B}_1 \\ (\text{زاویه ظلی}) \quad \hat{A}_1 = \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲} \\ (\text{زاویه محاطی}) \quad \hat{B}_1 = \frac{\overset{\frown}{AB'}}{۲} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲} = \frac{\overset{\frown}{AB'}}{۲} \Rightarrow \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AB'}$$

زاویه بین دو وتر:

اگر دو وتر از دایره‌ای، درون دایره یکدیگر را قطع کند، زاویه حاصل را زاویه بین دو وتر می‌نامند.

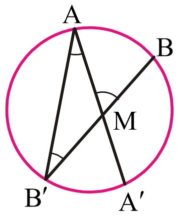


▼مثال ۳۰) در شکل مقابل ثابت کنید $\hat{M} = \frac{\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{A'B'}}{۲}$



(صفحه ۱۵ کتاب درسی- مرتبط با فعالیت- یزد، برازنده مقدم، ۸۸)

پاسخ نقاط A و B' را به یکدیگر وصل می‌کنیم. داریم:



$\triangle AMB'$: زاویه خارجی است $\widehat{M} \Rightarrow \widehat{M} = \widehat{A} + \widehat{B'}$

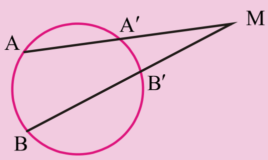
از طرفی زوایای $\widehat{A}$, $\widehat{B'}$، زوایای محاطی هستند، پس:

$$\widehat{A} = \frac{\overset{\frown}{A'B'}}{۲} \quad , \quad \widehat{B'} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}$$

$$\widehat{M} = \widehat{A} + \widehat{B'} = \frac{\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{A'B'}}{۲}$$

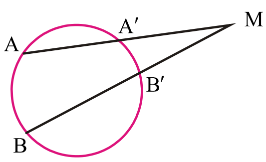
زاویه بین امتداد دو وتر:

اگر امتداد دو وتر از دایره‌ای، یکدیگر را در بیرون دایره قطع کنند، زاویه حاصل را زاویه بین امتداد دو وتر می‌نامند.

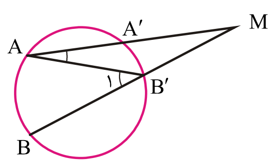


▼مثال ۳۱) در شکل مقابل ثابت کنید $\widehat{M} = \frac{\overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{A'B'}}{۲}$

(صفحه ۱۵ کتاب درسی- مرتبط با فعالیت)



پاسخ نقاط A و B' را به یکدیگر وصل می‌کنیم. داریم:



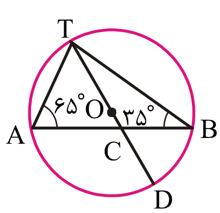
$\triangle AMB'$: زاویه خارجی است $\widehat{B'_۱} \Rightarrow \widehat{B'_۱} = \widehat{A} + \widehat{M} \Rightarrow \widehat{M} = \widehat{B'_۱} - \widehat{A}$

از طرفی زوایای $\widehat{A}$, $\widehat{B'_۱}$، زوایای محاطی هستند، پس:

$$\widehat{M} = \widehat{B'_۱} - \widehat{A} = \frac{\overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{A'B'}}{۲}$$

▼مثال ۳۲) در شکل مقابل، O مرکز دایره، $\widehat{A} = ۶۵^\circ$ و $\widehat{B} = ۳۵^\circ$ است. زاویه $\widehat{C}$ چند درجه است؟

(صفحه ۱۵ کتاب درسی- مکمل- سراسری ریاضی -۸۱)



۱) ۶۰ ۲) ۶۱ ۳) ۶۲ ۴) ۶۳

پاسخ

$$\widehat{A} = \frac{\overset{\frown}{BT}}{۲} \Rightarrow ۶۵^\circ = \frac{\overset{\frown}{BT}}{۲} \Rightarrow \overset{\frown}{BT} = ۱۳۰^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{BD} = ۱۸۰^\circ - ۱۳۰^\circ = ۵۰^\circ$$

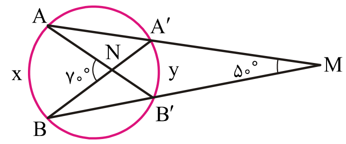
$$\widehat{B} = \frac{\overset{\frown}{AT}}{۲} \Rightarrow ۳۵^\circ = \frac{\overset{\frown}{AT}}{۲} \Rightarrow \overset{\frown}{AT} = ۷۰^\circ$$

$$\widehat{C} = \frac{\overset{\frown}{AT} + \overset{\frown}{BD}}{۲} = \frac{۷۰^\circ + ۵۰^\circ}{۲} = ۶۰^\circ$$

گزینه ۱ صحیح است.

▼ مثال ۳۳) در شکل مقابل، مقادیر x و y را تعیین کنید.

(صفحه ۱۶ کتاب درسی- مشابه تمرین ۲)

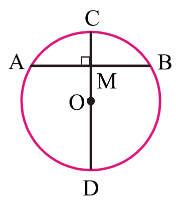


پاسخ

$$\left.\begin{aligned}\widehat{N}=\frac{x+y}{۲}\Rightarrow \frac{x+y}{۲}=۷۰^\circ\Rightarrow x+y=۱۴۰^\circ\\ \widehat{M}=\frac{x-y}{۲}\Rightarrow \frac{x-y}{۲}=۵۰^\circ\Rightarrow x-y=۱۰۰^\circ\end{aligned}\right\}\Rightarrow\begin{cases}x=۱۲۰^\circ\\ y=۲۰^\circ\end{cases}$$

▼ مثال ۳۴) در شکل مقابل، قطر CD در نقطه M بر وتر AB عمود است. اگر $\widehat{AC}=۲x$, $\widehat{BC}=y$ و $\widehat{BD}=۳x+۱۰^\circ$ باشد، مقادیر x و y را بیابید. (O مرکز دایره است)

(کتاب درسی- مکمل و مرتبط با صفحه ۷، امتحان نهایی)



پاسخ

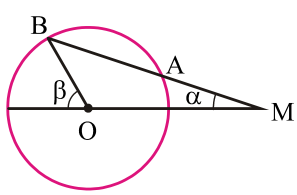
$$\widehat{M}=\frac{\widehat{AC}+\widehat{BD}}{۲}\Rightarrow ۹۰^\circ=\frac{۲x+۳x+۱۰^\circ}{۲}\Rightarrow ۵x+۱۰^\circ=۱۸۰^\circ\Rightarrow ۵x=۱۷۰^\circ\Rightarrow x=۳۴^\circ$$

از طرفی می‌دانیم قطر عمود بر یک وتر، آن وتر و کمان‌های نظیر آن وتر را نصف می‌کند، پس داریم:

$$\widehat{BC}=\widehat{AC}\Rightarrow y=۲x\Rightarrow y=۶۸^\circ$$

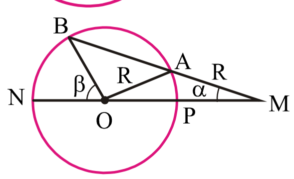
▼ مثال ۳۵) دایره C(O,R) مفروض است. از نقطه M در خارج دایره، خطی چنان رسم کرده ایم که دایره را در دو نقطه A و B قطع کرده است و $MA=R$. نشان دهید $\beta=۳\alpha$.

(صفحه ۱۷ کتاب درسی- مرتبط با تمرین ۶)



پاسخ

از O به A وصل می‌کنیم. داریم:

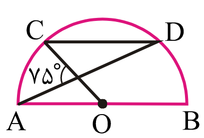


$$\left.\begin{aligned}OA=R\\ MA=R\end{aligned}\right\}\Rightarrow OA=MA\Rightarrow A\hat{O}M=\widehat{M}=\alpha\Rightarrow \widehat{AP}=\alpha$$

$$\widehat{M}=\frac{\widehat{BN}-\widehat{AP}}{۲}\Rightarrow \alpha=\frac{\widehat{BN}-\alpha}{۲}\Rightarrow \widehat{BN}-\alpha=۲\alpha\Rightarrow \widehat{BN}=۳\alpha\Rightarrow \beta=۳\alpha$$

▼ مثال ۳۶) در شکل زیر O مرکز نیم دایره و $CD \parallel AB$ است. اندازه کمان CD را به دست آورید.

(صفحه ۱۷ کتاب درسی- مرتبط با تمرین ۱۴)

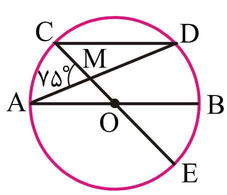


پاسخ

$$CD \parallel AB\Rightarrow \widehat{AC}=\widehat{BD}=x$$

از آن جا که CE قطر دایره است، پس $\widehat{AE}=۱۸۰^\circ-x$ *و چون AB قطر دایره است،*

پس $\widehat{BE}=۱۸۰^\circ-(۱۸۰^\circ-x)=x$.

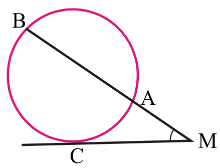


$$\widehat{M}=\frac{\widehat{AC}+\widehat{DE}}{۲}\Rightarrow ۷۵^\circ=\frac{x+۲x}{۲}\Rightarrow ۳x=۱۵۰^\circ\Rightarrow x=۵۰^\circ$$

$$\widehat{CD}=۱۸۰^\circ-(\widehat{AC}+\widehat{BD})=۱۸۰^\circ-(۵۰^\circ+۵۰^\circ)=۸۰^\circ$$

▼مثال ۳۷) در شکل مقابل ثابت کنید: $\widehat{M}=\frac{\widehat{CB}-\widehat{AC}}{۲}$

(صفحه ۱۶ کتاب درسی- مرتبط با تمرین ۱، تهران- الغدیر- ۸۸)

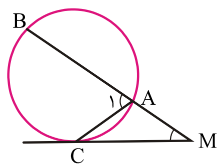


پاسخ

از A به C وصل می‌کنیم.

$\triangle AMC:$ زاویه خارجی است $\widehat{A}_۱ \Rightarrow \widehat{A}_۱=\widehat{M}+\widehat{C} \Rightarrow \widehat{M}=\widehat{A}_۱-\widehat{C}$

از طرفی $\widehat{A}_۱$ زاویه محاطی و $\widehat{C}$ زاویه ظلی است. داریم:

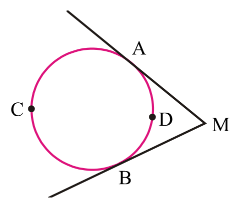


$$\widehat{A}_۱=\frac{\widehat{BC}}{۲}\quad,\quad \widehat{C}=\frac{\widehat{AC}}{۲}$$

$$\widehat{M}=\widehat{A}_۱-\widehat{C}=\frac{\widehat{BC}-\widehat{AC}}{۲}$$

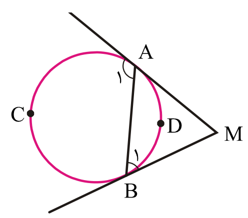
▼مثال ۳۸) در شکل مقابل ثابت کنید: $\widehat{M}=\frac{\widehat{ACB}-\widehat{ADB}}{۲}$

(صفحه ۱۶ کتاب درسی- مرتبط با تمرین ۱)



پاسخ

از A به B وصل می‌کنیم.



$\triangle AMB:$ زاویه خارجی است $\widehat{A}_۱ \Rightarrow \widehat{A}_۱=\widehat{M}+\widehat{B}_۱ \Rightarrow \widehat{M}=\widehat{A}_۱-\widehat{B}_۱$

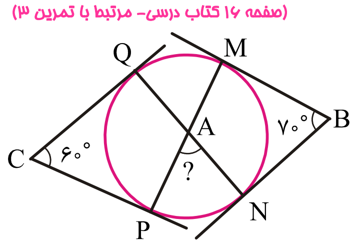
از طرفی $\widehat{A}_۱$ و $\widehat{B}_۱$ هر دو زاویه ظلی هستند، پس داریم:

$$\widehat{A}_۱=\frac{\widehat{ACB}}{۲}\quad,\quad \widehat{B}_۱=\frac{\widehat{ADB}}{۲}$$

$$\widehat{M}=\widehat{A}-\widehat{B}_۱=\frac{\widehat{ACB}-\widehat{ADB}}{۲}$$

▼مثال ۳۹) در شکل مقابل اندازه زاویه A چند درجه است؟

(صفحه ۱۶ کتاب درسی- مرتبط با تمرین ۳)



پاسخ

$$\widehat{C}=\frac{(\widehat{QM}+\widehat{MN}+\widehat{NP})-\widehat{QP}}{۲}\Rightarrow \widehat{QM}+\widehat{MN}+\widehat{NP}-\widehat{QP}=۱۲۰^\circ$$

$$\widehat{B}=\frac{(\widehat{QM}+\widehat{QP}+\widehat{NP})-\widehat{MN}}{۲}\Rightarrow \widehat{QM}+\widehat{QP}+\widehat{NP}-\widehat{MN}=۱۴۰^\circ$$

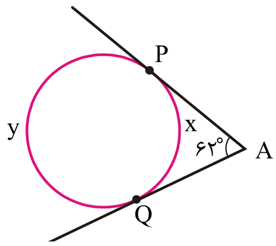
از جمع طرفین دو رابطه فوق داریم:

$$۲(\widehat{QM}+\widehat{NP})=۲۶۰^\circ \Rightarrow \widehat{QM}+\widehat{NP}=۱۳۰^\circ$$

$$\widehat{A}=\frac{\widehat{QM}+\widehat{NP}}{۲}=\frac{۱۳۰^\circ}{۲}=۶۵^\circ$$

▼ مثال ۴۰) **با توجه به شکل رو به رو، مقدار x و y را بیابید.**

(صفحه ۱۵ کتاب درسی– مکمل و مرتبط– مشهد، احمد حسینی– ۸۸)



پاسخ

زاویه A، زاویه بین دو مماس است، پس داریم:

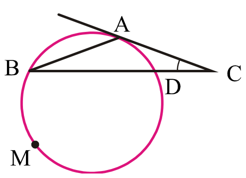
$$\hat{A}=\frac{y-x}{2}=62^\circ \Rightarrow y-x=124^\circ$$

از طرف دو کمان x و y در مجموع برابر محیط دایره هستند، پس $x+y=360^\circ$

$$\begin{cases} x+y=360^\circ \\ -x+y=124^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=118^\circ \\ y=242^\circ \end{cases}$$

▼ مثال ۴۱) **در شکل مقابل، مماس AC بر دایره با وتر AB از دایره برابرند. اگر کمان DMB برابر ۲۲۲ درجه باشد، زاویه C چند درجه است؟**

(صفحه ۱۵ کتاب درسی– مکمل و مرتبط– سراسری ریاضی خارج از کشور – ۹۱)



۱) ۲۱ ۲) ۲۲ ۳) ۲۳ ۴) ۲٤

پاسخ

$$\left.\begin{array}{l} \overset{\frown}{DMB}=222^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{BAD}=360^\circ-222^\circ=138^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{AD}=138^\circ \\ AB=AC \Rightarrow \hat{B}=\hat{C} \Rightarrow \dfrac{\overset{\frown}{AD}}{2}=\dfrac{\overset{\frown}{AB}-\overset{\frown}{AD}}{2} \Rightarrow \overset{\frown}{AB}=2\overset{\frown}{AD} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

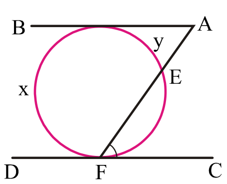
$$2\overset{\frown}{AD}+\overset{\frown}{AD}=138^\circ \Rightarrow 3\overset{\frown}{AD}=138^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{AD}=46^\circ$$

$$\hat{C}=\hat{B}=\frac{\overset{\frown}{AD}}{2}=23^\circ$$

گزینه ۳ صحیح است.

▼ مثال ۴۲) **در شکل مقابل، اگر $\widehat{AFC}=50^\circ$ و $AB \parallel CD$ باشد، آن‌گاه مقادیر x و y را به دست آورید.**

(صفحه ۱۵ کتاب درسی– مکمل و مرتبط – مشهد، المهدی (عج)– ۸۸)



پاسخ

زاویه AFC یک زاویه ظلی است، پس داریم:

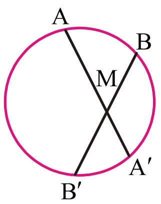
$$\widehat{AFC}=\frac{\overset{\frown}{FE}}{2}=50^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{FE}=100^\circ$$

$$\left.\begin{array}{r} AB \parallel CD \\ \text{مورب}\ AF \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{A}=\widehat{AFC}=50^\circ$$

$$\left.\begin{array}{l} \hat{A}=\dfrac{x-y}{2}=50^\circ \Rightarrow x-y=100^\circ \\ x+y=360^\circ-100^\circ \Rightarrow x+y=260^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x=180^\circ \\ y=80^\circ \end{cases}$$

۳ رابطه‌های طولی در دایره

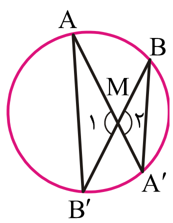
در صورتی که دو وتر از دایره، یکدیگر را در درون یا بیرون دایره قطع کنند، آن‌گاه روابط موجود بین طول قطعات ایجاد شده روی وترها را روابط طولی در دایره می نامند.



▼مثال ۴۳) دو وتر AA' و BB'، یکدیگر را در نقطه M درون دایره قطع می کنند. ثابت کنید: $MA.MA' = MB.MB'$

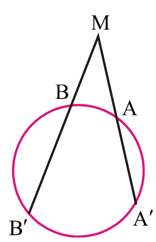
(صفحه ۱۸ کتاب درسی- مرتبط با فعالیت- امتحان نهایی- خرداد ۸۸)

پاسخ از A به B' و از B به A' وصل می کنیم.



$$\left.\begin{array}{ll}\widehat{M}_۱ = \widehat{M}_۲ & \text{(متقابل به رأس)}\\ \widehat{B'} = \widehat{A'} = \dfrac{\overset{\frown}{AB}}{۲} & \text{(زاویه محاطی)}\end{array}\right\} \Rightarrow \triangle AMB' \sim \triangle A'MB$$

$$\Rightarrow \frac{MA}{MB} = \frac{MB'}{MA'} \Rightarrow MA.MA' = MB.MB'$$

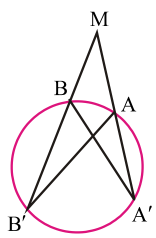


▼مثال ۴۴) دو وتر AA' و BB'، همدیگر را در نقطه M بیرون دایره قطع می کنند. ثابت کنید:

$MA.MA' = MB.MB'$

(صفحه ۱۸ کتاب درسی- مرتبط با فعالیت)

پاسخ از A به B' و از B به A' وصل می کنیم.

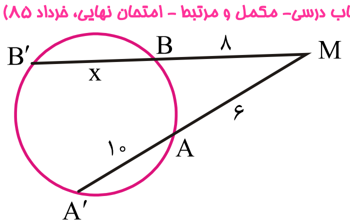


$$\left.\begin{array}{ll}\widehat{M}_۱ = \widehat{M}_۲ & \text{(مشترک)}\\ \widehat{B'} = \widehat{A'} = \dfrac{\overset{\frown}{AB}}{۲} & \text{(زاویه محاطی)}\end{array}\right\} \Rightarrow \triangle AMB' \sim \triangle A'MB$$

$$\Rightarrow \frac{MA}{MB} = \frac{MB'}{MA'} \Rightarrow MA.MA' = MB.MB'$$

▼مثال ۴۵) با توجه به شکل زیر، مقدار x را تعیین کنید.

(صفحه ۱۸ کتاب درسی- مکمل و مرتبط - امتحان نهایی، خرداد ۸۵)

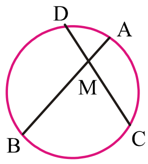


پاسخ با توجه به روابط طولی در دایره داریم:

$$MA.MA' = MB.MB' \Rightarrow ۶(۶+۱۰) = ۸(۸+x)$$

$$\Rightarrow ۹۶ = ۸(۸+x) \Rightarrow ۸+x = ۱۲ \Rightarrow x = ۴$$

▼ **مثال ۴۶)** در دایره $C(O,R)$، وتر AB و وتر CD به طول ۹ واحد را به نسبت ۱ به ۲ تقسیم کرده است. اگر $AB=۱۱$ باشد، CD، AB را به چه نسبتی قطع می کند؟



(صفحه ۲۳ کتاب درسی- مرتبط با تمرین ۱)

پاسخ

$$\left.\begin{matrix} MC=۲MD \\ MC+MD=۹ \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} MC=۶ \\ MD=۳ \end{cases}$$

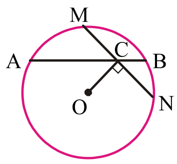
$$MA.MB=MC.MD=۱۸$$

$$\left.\begin{matrix} MA.MB=۱۸ \\ MA+MB=۱۱ \end{matrix}\right\} \Rightarrow MA(۱۱-MA)=۱۸ \Rightarrow MA^۲-۱۱MA+۱۸=۰ \Rightarrow (MA-۲)(MA-۹)=۰ \Rightarrow \begin{cases} MA=۲ \\ MA=۹ \end{cases}$$

با توجه به شکل $MA<MB$، پس $MA=۲$ قابل قبول است.

$$MA=۲ \Rightarrow MB=۱۱-۲=۹ \Rightarrow \frac{MA}{MB}=\frac{۲}{۹}$$

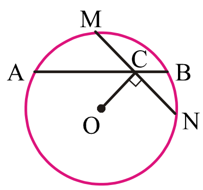
▼ **مثال ۴۷)** نقطه C روی وتر AB به طول ۹ واحد از دایره ای چنان قرار دارد که آن وتر را به نسبت ۱ و ۲ تقسیم کرده است. طول کوتاه ترین وتر از دایره گذرنده بر نقطه C کدام است؟



(صفحه ۱۸ کتاب درسی- مکمل و مرتبط با متن- سراسری ریاضی - ۸۲)

۱) ۸ ۲) $۵\sqrt{۳}$ ۳) $۶\sqrt{۲}$ ۴) $۴\sqrt{۵}$

پاسخ

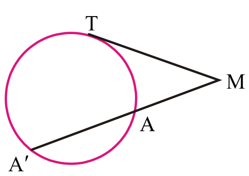


از آن جا که نقطه C، وتر AB را به نسبت ۱ و ۲ تقسیم کرده است، پس $CB=۳$ و $CA=۶$ است. با توجه به این که کوچک‌ترین وتری که در نقطه C رسم می‌شود، وتری است که بر OC عمود است. در این صورت OC، این وتر را نصف می‌کند، یعنی $CM=CN$ است. طبق روابط طولی در دایره داریم:

$$CA.CB=CM.CN \Rightarrow ۳\times۶=CM^۲ \Rightarrow CM=۳\sqrt{۲} \Rightarrow MN=۶\sqrt{۲}$$

گزینه ۳ صحیح است.

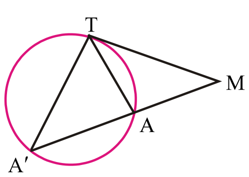
▼ **مثال ۴۸)** ثابت کنید اگر از یک نقطه، یک مماس و یک قاطع نسبت به دایره رسم کنیم، آن گاه قطعه ای از خط مماس محصور بین آن نقطه و نقطه مماس، واسطه هندسی بین دو نقطه قاطع است. یعنی در شکل مقابل:



(صفحه ۱۹ کتاب درسی- مرتبط با فعالیت - امتحان نهایی، خرداد ۸۷)

$$MT^۲=MA.MA'$$

پاسخ از نقطه T به نقاط A و A' وصل می‌کنیم.

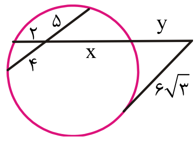


$$\left.\begin{matrix} M\hat{T}A=\frac{\overset{\frown}{AT}}{۲} & \text{(زاویه ظلی)} \\ \hat{A'}=\frac{\overset{\frown}{AT}}{۲} & \text{(زاویه محاطی)} \end{matrix}\right\} \Rightarrow M\hat{T}A=\hat{A'}$$

$$\left.\begin{matrix} \hat{M}=\hat{M} & \text{(مشترک)} \\ M\hat{T}A=\hat{A'} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \triangle ATM \sim \triangle A'TM \Rightarrow \frac{MT}{MA'}=\frac{MA}{MT} \Rightarrow MT^۲=MA.MA'$$

▼ **مثال ۴۹)** در شکل مقابل، y کدام است؟

(صفحه ۱۸ و ۱۹ کتاب درسی- مکمل و مرتبط – سراسری ریاضی – ۸۵)



۱) ۶ ۲) ۷/۵ ۳) ۸ ۴) ۹

پاسخ طبق روابط طولی در دایره داریم:

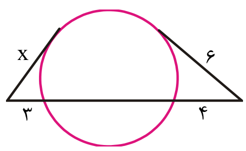
$$2x = 4\times 5 \Rightarrow x = 10$$

$$(6\sqrt{3})^2 = y(y+12) \Rightarrow y^2+12y-108=0 \Rightarrow (y+18)(y-6)=0 \Rightarrow \begin{cases} y=-18 & \text{غ ق ق} \\ y=6 \end{cases}$$

گزینه ۱ صحیح است.

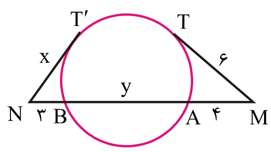
▼ **مثال ۵۰)** در شکل مقابل، اندازه‌ی x چند واحد است؟

(صفحه ۱۹ کتاب درسی- مکمل و مرتبط- سراسری ریاضی – ۹۱)



۱) $3\sqrt{2}$ ۲) $2\sqrt{5}$ ۳) $2\sqrt{6}$ ۴) ۵

پاسخ

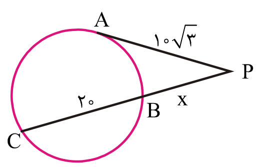


$$MT^2 = MA.MB \Rightarrow 6^2 = 4(4+y) \Rightarrow 4+y=9 \Rightarrow y=5$$

$$NT'^2 = NB.NA \Rightarrow x^2 = 3(3+5) \Rightarrow x^2=24 \Rightarrow x=2\sqrt{6}$$

گزینه ۳ صحیح است.

▼ **مثال ۵۱)** از نقطه P در خارج دایره‌ای، مماس PA به طول $10\sqrt{3}$ را بر آن رسم کرده ایم (A روی دایره است). همچنین خط راستی از P گذرانده‌ایم که دایره را در دو نقطه B و C قطع کرده است و $BC = 20$. طول PB را به دست آورید؟

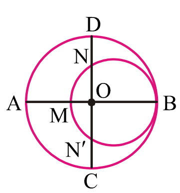


(صفحه ۲۳ کتاب درسی- مرتبط با تمرین ۲)

پاسخ اگر $PB = x$ فرض شود، آن گاه داریم:

$$PA^2 = PB\cdot PC \Rightarrow (10\sqrt{3})^2 = x(x+20)$$

$$\Rightarrow x^2+20x-300=0 \Rightarrow (x+30)(x-10)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-30 & \text{غ ق ق} \\ x=10 \end{cases}$$



▼ **مثال ۵۲)** در شکل مقابل دو دایره بر هم مماس و دو قطر AB و CD از دایره بزرگ تر بر هم عمودند. اگر $AM = 16$ و $ND = 10$، شعاع های دو دایره را پیدا کنید.

(صفحه ۲۳ کتاب درسی- مرتبط با تمرین ۳)

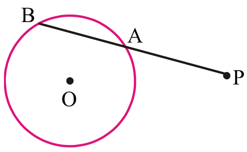
پاسخ اگر شعاع دایره بزرگ تر را برابر R و شعاع دایره کوچک تر را برابر R' فرض کنیم، آن گاه چون قطر AB بر وتر NN' عمود است، پس طبق روابط طولی در دایره داریم:

$$ON = ON' = OD - DN = R-10$$

$$ON\cdot ON' = OM\cdot OB \Rightarrow (R-10)^2 = (R-16)R \Rightarrow R^2-20R+100 = R^2-16R \Rightarrow 4R=100 \Rightarrow R=25$$

$$BM = R+(R-16) = 25+9 = 34 \Rightarrow 2R' = 34 \Longrightarrow R' = 17$$

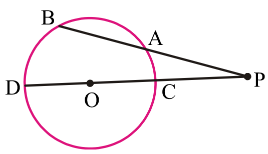
▼مثال ۵۳) **نزدیک ترین نقطه از دایره به شعاع ۵ واحد تا نقطه مفروض P برابر ۸ واحد است. قاطع PAB نسبت به دایره طوری رسم شده است که $PA - AB = ۲$. اندازه AB چقدر است؟**



(صفحه ۱۸ کتاب درسی– مکمل و مرتبط – سراسری ریاضی – ۹۰)

۱) ۹ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۵

پاسخ نزدیک ترین نقطه دایره نسبت به نقطه P، نقطه C است.



طبق روابط طولی در دایره داریم:

$$PA.PB = PC.PD \Rightarrow PA(PA + AB) = PC(PC + ۲R)$$

با توجه به آن که $PA = AB + ۲$ و $R = ۵$ است، داریم:

$$(AB + ۲)(۲AB + ۲) = ۸(۸ + ۱۰)$$

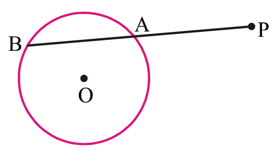
$$\Rightarrow ۲(AB + ۲)(AB + ۱) = ۱۴۴$$

$$\Rightarrow AB^۲ + ۳AB + ۲ = ۷۲ \Rightarrow AB^۲ + ۳AB - ۷۰ = ۰$$

$$\Rightarrow (AB^۲ + ۱۰)(AB - ۷) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} AB = -۱۰ & \text{غ ق ق} \\ AB = ۷ \end{cases}$$

گزینه ۳ صحیح است.

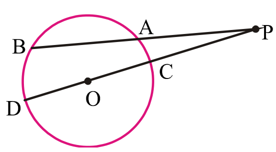
▼مثال ۵۴) **در شکل مقابل، $PA = ۵$ ، $AB = ۳$ و شعاع دایره برابر ٤ واحد است. فاصله نقطه P تا مرکز دایره کدام است؟**



(صفحه ۱۸ کتاب درسی– مکمل و مرتبط – سراسری ریاضی – ۷۷)

۱) $۲\sqrt{۲۱}$ ۲) $۲\sqrt{۱۴}$ ۳) $۴\sqrt{۷}$ ٤) $۳\sqrt{۷}$

پاسخ طبق روابط طولی در دایره داریم:



$$PA.PB = PC.PD \Rightarrow ۵(۵ + ۳) = (PO - R)(PO + R)$$

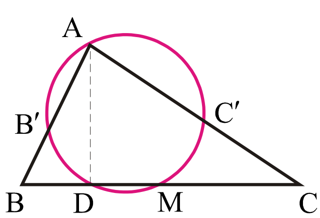
$$\Rightarrow ۴۰ = (PO - ۴)(PO + ۴) \Rightarrow PO^۲ - ۱۶ = ۴۰$$

$$PO^۲ = ۵۶ \Rightarrow PO = ۲\sqrt{۱۴}$$

گزینه ۲ صحیح است.

▼مثال ۵۵) **در مثلث ABC، نقطه M وسط ضلع BC و AD نیمساز زاویه A است. دایره محیطی مثلث ADM رسم شده است. نسبت $\frac{BB'}{CC'}$ برابر کدام نسبت است؟**

(صفحه ۱۸ کتاب درسی– مکمل و مرتبط – سراسری ریاضی – ۹۴)



۱) ۱

۲) $\frac{AB}{AC}$

۳) $\frac{AB'}{AC'}$

٤) $\frac{DB}{DM}$

پاسخ طبق روابط طولی در دایره داریم:

$$\left.\begin{aligned} BD\times BM &= BB'\times BA \\ CM\times CD &= CC'\times CA \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{BD\times BM}{CM\times CD}=\frac{BB'\times BA}{CC'\times CA} \xrightarrow{BM=CM} \frac{BD}{CD}=\frac{BB'}{CC'}\times\frac{AB}{AC}$$

با توجه به اینکه AD نیمساز زاویه A است، پس $\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{CD}$ و در نتیجه داریم: $\frac{BB'}{CC'}=1$

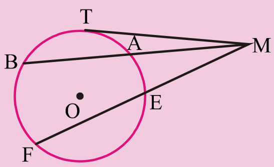
گزینه ۱ صحیح است.

قوت نقطه نسبت به دایره:

فرض کنید M نقطه ای بیرون دایره $C(O,R)$ باشد.

هر مماس و قاطعی که از نقطه M رسم کنیم، حاصل ضرب اندازه‌های قطعه‌ها برابر یکدیگر است و این مقدار برابر مربع اندازه مماسی است که از نقطه M بر دایره رسم می‌شود، یعنی داریم: $MA.MB=ME.MF=MT^2$

این مقدار را قوت نقطه M نسبت به دایره $C(O,R)$ می‌گویند.

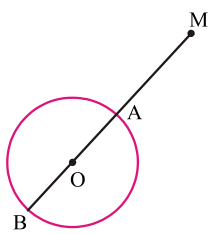


▼مثال ۵۶) **ثابت کنید اگر M نقطه ای بیرون دایره $C(O,R)$ و $OM=d$ باشد، آن گاه قوت نقطه M نسبت به این دایره برابر است با:**

$$MA.MB=d^2-R^2$$

(صفحه ۱۹ کتاب درسی- مکمل و مرتبط با فعالیت)

پاسخ از نقطه M به مرکز دایره وصل می کنیم و امتداد می‌دهیم تا دایره را در دو نقطه A و B قطع کند. قوت نقطه M نسبت به دایره $C(O,R)$ برابر است با:



$$MA.MB=(MO-OA)(MO+OB)=(d-R)(d+R)=d^2-R^2$$

نکته: اگر M نقطه ای درون دایره باشد، هر وتری که از نقطه M رسم کنیم، حاصل ضرب اندازه های قطعه های ایجاد شده روی هر وتر، برابر یکدیگر است. یعنی داریم: $MA.MB=ME.MF$ قرینه‌ی این مقدار را قوت نقطه M نسبت به دایره می نامند.