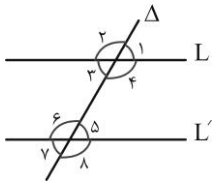
هندسه و استدلال
- تعریف‌ها و قضیه‌های مهم در مورد زاویه‌ها
- هم‌نهشتی مثلث‌ها

چند قضیه و تعریف مهم در مورد زاویه‌ها

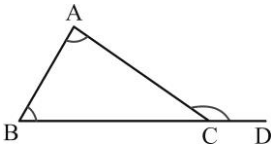
1. اگر مجموع دو زاویه 90 درجه باشد، آن دو زاویه را متمم گوییم.
2. اگر مجموع دو زاویه 180 درجه باشد، آن دو زاویه را مکمل گوییم.
3. اگر دو زاویه با هم برابر باشند، متمم‌های آن‌ها با هم و مکمل‌های آن‌ها نیز با هم برابرند.
4. زاویه‌های متقابل به رأس، در هر دو خط متقاطع با هم برابرند.
5. اگر یک خط مورب، دو خط موازی را قطع کند، همه‌ی زاویه‌های حاده با هم و همه‌ی زاویه‌های منفرجه با هم برابرند.



$$\begin{cases} L \parallel L' \\ \text{مورب } \Delta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \hat{1}=\hat{3}=\hat{5}=\hat{7} \\ \hat{2}=\hat{4}=\hat{6}=\hat{8} \end{cases}$$

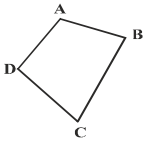
توجه کنید که عکس این قضیه نیز صحیح است، یعنی اگر خطی دو خط دیگر را قطع کند، بطوری که همه‌ی زاویه‌های حاده‌ی (یا همه‌ی زاویه‌های منفرجه‌ی) ایجاد شده با هم برابر باشند، آنگاه آن دو خط با هم موازیند.

6. مجموع زاویه‌های داخلی هر مثلث 180 درجه است.
7. در هر مثلث، هر زاویه‌ی خارجی برابر است با مجموع دو زاویه‌ی داخلی غیر مجاور به آن.



$$A\hat{C}D = \hat{A} + \hat{B}$$

8. مجموع زاویه‌های داخلی هر چهارضلعی محدب ۳۶۰^{o} است.



$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}+\hat{D} = ۳۶۰^{o}$$

نیمساز زاویه

1. نیمساز هر زاویه، نیم خطی است که از رأس آن زاویه می‌گذرد و آن زاویه را به دو زاویه‌ی مساوی تقسیم می‌کند.
2. نیمسازهای دو زاویه‌ی مجانب (مجاور و مکمل) بر هم عمودند.

نتیجه: نیمساز زاویه‌ی داخلی و خارجی هر رأس مثلث، بر هم عمودند.

3. در مثلث ABC، زاویه‌ی منفرجه‌ی بین دو نیمساز داخلی زاویه‌های A و B برابر با $90^{\circ}+\frac{\hat{C}}{2}$ است.
4. در مثلث ABC، زاویه‌ی حاده‌ی بین دو نیمساز خارجی زاویه‌های A و B برابر با $90^{\circ}-\frac{\hat{C}}{2}$ است.
5. در مثلث ABC، زاویه‌ی حاده‌ی بین نیمساز داخلی زاویه‌ی A و نیمساز خارجی زاویه‌ی B برابر با $\frac{\hat{C}}{2}$ است.

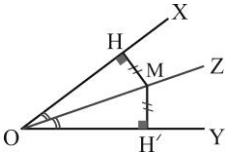
هم‌نهشتی مثلث‌ها

دو مثلث را هم‌نهشت گوییم هرگاه دقیقاً برهم منطبق شوند و یکدیگر را بپوشانند. اگر دو مثلث هم‌نهشت باشند، همه‌ی اجزای نظیر در آن‌ها با هم برابر است.

1. دو مثلث در حالات تساوی سه ضلع (ض‌ض‌ض)، تساوی دو ضلع و زاویه‌ی بین (ض‌زض) و تساوی دو زاویه و ضلع بین (زض‌ز) هم‌نهشت هستند.
2. دو مثلث قائم‌الزاویه علاوه بر حالات فوق در حالات تساوی وتر و یک ضلع زاویه‌ی قائمه و همچنین وتر و یک زاویه‌ی حاده با هم هم‌نهشت هستند.

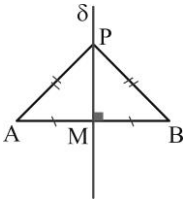
با استفاده از هم‌نهشتی مثلث‌ها، می‌توان دو قضیه‌ی مهم زیر را اثبات کرد:

1. هر نقطه که روی نیمساز یک زاویه قرار داشته باشد، از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است. یعنی در شکل مقابل اگر OZ نیمساز زاویه‌ی XOY و M نقطه‌ی واقع بر آن باشد، آنگاه $MH = MH'$.



عکس این قضیه نیز صحیح است، یعنی اگر نقطه‌ای از دو ضلع یک زاویه، به یک فاصله باشد، آنگاه روی نیمساز آن زاویه قرار دارد.

2. هر نقطه که روی عمود منصف یک پاره‌خط قرار داشته باشد، از دو سر آن پاره‌خط به یک فاصله است. یعنی در شکل مقابل اگر δ، عمود منصف پاره‌خط AB و P نقطه‌ای واقع بر آن باشد، آنگاه $PA = PB$.



عکس این قضیه نیز صحیح است، یعنی اگر نقطه‌ای از دو سر یک پاره‌خط به یک فاصله باشد، آنگاه روی عمود منصف آن پاره خط قرار دارد.

زیرموضوع (1) زاویه (مفاهیم مقدماتی)

-1 مجموع دو زاویه 120 درجه است، مجموع مکمل‌های این دو زاویه چقدر است؟ (آزاد پزشکی – 76)

1) 240° 2) 120°
3) 180° 4) 200°

-2 زاویه‌های A و B مکملند، اگر زاویه‌ی A دو برابر زاویه‌ی B باشد، حاصل $2\hat{A}-3\hat{B}$ چقدر است؟ (آزاد پزشکی – 78)

1) 90° 2) 30°
3) 120° 4) 60°

-3 دو زاویه‌ی A و B متمم‌اند. اندازه‌ی زاویه‌ی A، برابر $\frac{4}{9}$ اندازه‌ی مکمل زاویه‌ی B است. زاویه‌ی A چند درجه است؟ (سراسری ریاضی – 75)

1) 27 2) 36
3) 63 4) 72

زیرموضوع (2) زاویه در مثلث

-4 زاویه‌های مثلثی متناسب با اعداد 8، 5 و 2 است. اندازه‌ی کوچک‌ترین زاویه‌ی خارجی این مثلث چند درجه است؟ (سراسری تجربی – 80)

1) 72 2) 82
3) 84 4) 96

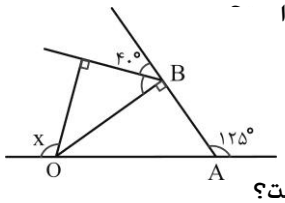
-5 اندازه‌های سه زاویه‌ی مثلثی با اعداد 5، 4 و 1 متناسب هستند. نوع این مثلث کدام است؟ (سراسری ریاضی – 65)

1) متساوی الاضلاع 2) متساوی الساقین
3) قائم الزاویه 4) منفرجه الزاویه

-6 در یک مثلث زاویه‌ها به نسبت 2، 3 و 5 هستند. اختلاف بزرگ‌ترین زاویه‌ی مثلث با کوچکترین زاویه‌ی آن چند درجه است؟ (آزاد پزشکی – 91)

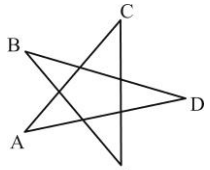
1) 30° 2) 36°
3) 54° 4) 60°

-7 در شکل مقابل $\hat{A}=125^\circ$ و $\hat{B}=40^\circ$. زاویه‌ی x چند درجه است؟ (سراسری تجربی – 87)



1) 105
2) 110
3) 115
4) 125

-8 در شکل مقابل مجموع زوایای A، B، C، D و E، کدام است؟ (سراسری تجربی – 74)



1) 180°
2) 270°
3) کمتر از 180°
4) بین 180° و 270°

-9 اگر در مثلثی $\hat{B}-\hat{C}=90^\circ$، آنگاه زاویه‌ی حاده‌ی بین نیمساز زاویه‌ی A و ضلع BC برابر است با: (سراسری تجربی – 51)

1) 15° 2) 30°
3) 45° 4) 60°

زیرموضوع (3) زاویه‌ی بین نیمسازها

-10 در مثلث ABC، زاویه‌ی بین نیمساز زاویه‌ی A و نیمساز زاویه‌ی B برابر 110 درجه است. زاویه‌ی C کدام است؟ (آزاد ریاضی – 79)

1) 70° 2) 110°
3) 40° 4) 35°

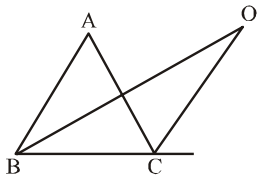
-11 در مثلث قائم‌الزاویه با زوایای $\angle A=20^\circ$ و $\angle C=90^\circ$، زاویه‌ی بین نیمسازهای زاویه‌های A و B کدام است؟ (آزاد پزشکی – 86)

1) 10°
2) 35°
3) 110°
4) 135°

-12 در مثلث ABC زاویه‌های خارجی C و B به ترتیب 120° و α° و زاویه‌ی بین نیمسازهای این دو زاویه‌ی خارجی 45° است، α چه‌قدر است؟ (آزاد ریاضی – 66)

1) 150°
2) 120°
3) 90°
4) 75°

-13 در شکل زیر اگر $\hat{A}=60^\circ$ و BO و CO نیمساز باشند، آنگاه : (آزاد ریاضی – 76)



1) $\hat{O}=45^\circ$
2) $\hat{O}=60^\circ$
3) $\hat{O}=30^\circ$
4) هیچ‌کدام

زیرموضوع (4) زاویه‌ی بین ارتفاع‌ها و عمود منصف‌ها با اجزای فرعی

-14 اگر در مثلث ABC، $\hat{B}=40^\circ$ و $\hat{C}=80^\circ$، آنگاه زاویه‌ی بین ارتفاع و نیمساز نظیر رأس A چقدر است؟ (آزاد غیر پزشکی – 77)

1) 10°
2) 20°
3) 40°
4) 30°

-15 اگر در مثلث ABC، $\hat{A}=50^\circ$ و $\hat{B}=60^\circ$، آنگاه زاویه‌ی بین نیمساز زاویه‌ی A و عمود منصف ضلع BC چقدر است؟ (آزاد تجربی – 78)

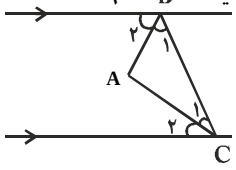
1) 15°
2) 75°
3) 5°
4) 45°

-16 در مثلث ABC، $\angle A=80^\circ$ و $\angle B=60^\circ$. زاویه‌ی بین ارتفاع AH و ارتفاع BH' کدام است؟ (آزاد غیر پزشکی – 84)

1) 60°
2) 20°
3) 40°
4) 80°

زیرموضوع (5) زاویه در خطوط موازی و مورب

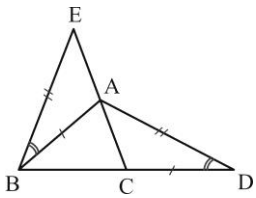
-17 در شکل زیر اگر $\hat{B}_1=\hat{B}_2$ و $\hat{C}_1=\hat{C}_2$، آنگاه اندازه‌ی زاویه‌ی A کدام است؟ (تألیفی)



1) 60°
2) 75°
3) 90°
4) 105°

زیرموضوع (6) همنهشتی دو مثلث

-18 با توجه به شکل مقابل، کدام نتیجه‌گیری لزوماً درست است؟ (سراسری تجربی خارج از کشور – 85)



1) $AB=AC$
2) $AB=BC$
3) $AE=BC$
4) $AE=AC$

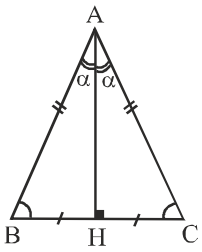
هندسه و استدلال
- مثلث متساوی‌الساقین
- مثلث متساوی‌الاضلاع

مثلث متساوی‌الساقین: مثلثی که دو ضلع برابر داشته باشد، متساوی‌الساقین نامیده می‌شود، هر کدام از دو ضلع مساوی با هم را ساق و ضلع دیگر را قاعده می‌نامیم.

1 در مثلث متساوی‌الساقین، زاویه‌های روبرو به اضلاع مساوی، با یکدیگر مساویند.

2 عکس قضیه‌ی (1) نیز صحیح است، یعنی اگر در مثلثی دو زاویه‌ی مساوی وجود داشته باشد، آن مثلث متساوی‌الساقین است (اضلاع روبرو به زاویه‌های مساوی آن با هم برابرند).

3 در مثلث متساوی‌الساقین، نیمساز، ارتفاع و میانه‌ی وارد بر قاعده، بر هم منطبقند.



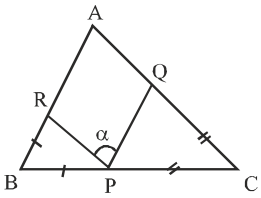
4 در مثلث متساوی‌الساقین ABC $(AB = AC)$ روابط زیر برقرار است:

$\hat{B} = \hat{C} = \frac{180^\circ - \hat{A}}{2}$　　زوایای مجاور به ساق

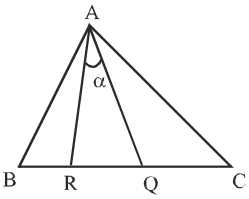
$\hat{A} = 180^\circ - 2\hat{B} = 180^\circ - 2\hat{C}$　　زاویه‌ی روبه‌رو به قاعده

5 در سه شکل زیر، دو مثلث متساوی‌الساقین (که B و C رأس‌های روبه‌رو به قاعده‌ی آن‌ها هستند) کنار مثلث ABC وجود دارد، داریم:

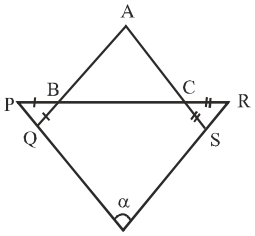
$\alpha = 90 - \frac{\hat{A}}{2}$



$\begin{cases} BP = BR \\ CP = CQ \end{cases}$

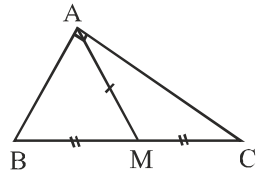


$\begin{cases} AB = BQ \\ AC = CR \end{cases}$



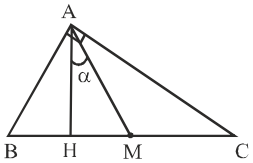
$\begin{cases} BP = BQ \\ CR = CS \end{cases}$

6 با رسم میانه‌ی وارد بر وتر در هر مثلث قائم‌الزاویه، دو مثلث متساوی‌الساقین ایجاد می‌شود.



$\begin{cases} \hat{A} = 90 \\ BM = CM \end{cases} \Rightarrow \overset{\Delta}{MAB}$ و $\overset{\Delta}{MAC}$ متساوی‌الساقین هستند

7 با کمک قضیه‌ی قبل می‌توان ثابت کرد در هر مثلث قائم‌الزاویه، زاویه‌ی بین ارتفاع و میانه‌ی وارد بر وتر، برابر با قدر مطلق تفاضل دو زاویه‌ی حاده مثلث است.

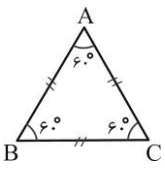


$\alpha = |\hat{B} - \hat{C}|$

مثلث متساوی‌الاضلاع

مثلثی که هر سه ضلع آن با هم برابر باشند، متساوی‌الاضلاع نامیده می‌شود. زاویه‌های مثلث متساوی‌الاضلاع، هر سه با هم برابرند و اندازه‌ی آن‌ها 60 درجه است.

همچنین اگر هر سه زاویه‌ی مثلثی با هم برابر بودند، می‌توان نتیجه گرفت که آن مثلث متساوی‌الاضلاع است، یعنی هر سه ضلع آن مثلث با هم برابرند.



زیرموضوع (1) ویژگی‌های مثلث متساوی‌الساقین

-19 یک ساق مثلث متساوی‌الساقین را از طرف رأس مثلث به اندازه‌ی خودش ادامه می‌دهیم. نقطه‌ی حاصل و قاعده‌ی مثلث چه نوع مثلثی را تشکیل می‌دهند؟ (سراسری تجربی – 69)

1) قائم‌الزاویه
2) قائم‌الزاویه متساوي‌الساقین
3) متساوي‌الساقین
4) منفرجه الزاویه

-20 اگر مثلثي متساوي‌الساقین باشد، طول ارتفاع وارد بر قاعده برابر کدام است؟(سراسری تجربی – 66)

1) نصف طول قاعده
2) طول میانه یک ضلع دیگر
3) ارتفاع وارد بر ساق
4) طول نیم‌ساز زاویه‌ي مقابل به قاعده

-21 در مثلث ABC با فرض $\hat{B} > \hat{C}$ ، براي آن‌که طول‌هاي نیم‌سازهاي دروني و برونی زاویه‌ي A با یک‌دیگر برابر باشند، لازم است داشته باشیم: (آزاد ریاضی – 65)

1) $\hat{B}-\hat{C}=\frac{\pi}{3}$
2) $\hat{B}-\hat{C}=\frac{\pi}{6}$
3) $\hat{B}-\hat{C}=\frac{\pi}{2}$
4) $\hat{B}-\hat{C}=\frac{\pi}{4}$

-22 در مثلث متساوي‌الساقین ABC $(AB=AC)$ ، نیم‌ساز خارجي زاویه‌ي A و نیم‌ساز داخلي زاویه‌ي B در نقطه‌ي D متلاقي‌اند، طول پاره خط AD برابر کدام جزء مثلث است؟(سراسری تجربی – 74)

1) AC
2) طول نیم‌ساز داخلي زاویه‌ي B
3) BC
4) ارتفاع وارد بر قاعده

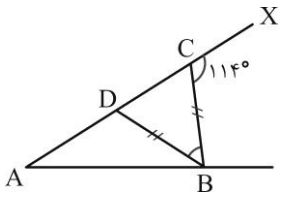
-23 در مثلث متساوی‌الساقین $(AB=AC)ABC$ در رأس A خط عمود بر AC، نیمساز زاویه‌ی داخلی C را در D قطع می‌کند. اگر M محل تلاقی نیمسازهای داخلی مثلث مفروض باشد. AD برابر کدام است؟ (سراسری تجربی – 94)

1) AM
2) MD
3) MC
4) $\frac{۱}{۲}AC$

-24 در مثلث $(\hat{C}=۲۴^{o}, \hat{A}=۹۰^{o})ABC$ ، از رأس C خطی بر CA عمود کرده و بر روی آن، $CD=CB$ را طوری جدا می‌کنیم که BD ضلع AC را قطع کند. زاویه‌ی $B\hat{D}C$ چند درجه است؟(سراسری خارج کشور تجربی – 94)

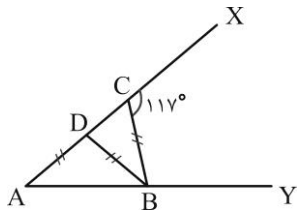
1) 33
2) 36
3) 38
4) 48

-25 اگر در شکل مقابل $B\hat{C}X=114^{\circ}$ ، آنگاه زاویه‌ي CBD چند درجه است؟ (سراسری تجربی – 84)



1) 44
2) 46
3) 48
4) 52

-26 در شکل مقابل $B\hat{C}X=117^{\circ}$. زاویه‌ي CBY چند درجه است؟ (سراسری تجربی خارج از کشور – 84)

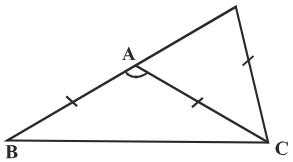


1) 93
2) 94/5
3) 95/5
4) 96

-27 اگر در مثلث متساوي‌الساقین ABC ، طول نیم‌ساز داخلي زاویه‌ي B برابر طول قاعده‌ي BC باشد، زاویه‌ي A برابر است با: (سراسری ریاضی – 53)

1) $\frac{2\pi}{5}$
2) $\frac{\pi}{5}$
3) $\frac{3\pi}{10}$
4) $\frac{\pi}{10}$

-28 در مثلث متساوی‌الساقین $(AB=AC)ABC$، ساق BA را از نقطه‌ی B به اندازه‌ی قاعده‌ی BC تا نقطه‌ی D، امتداد می‌دهیم. اگر $CD=CA$ باشد، زاویه‌ی A چند درجه است؟ (سراسری خارج کشور ریاضی – 94)

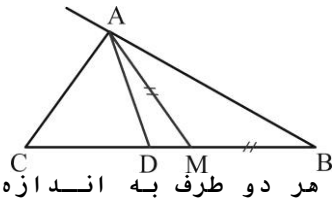


1) 102
2) 105
3) 108
4) 112

-29 در مثلث متساوی‌الساقین $(AB=AC)ABC$، ساق AB را به اندازه‌ی $BD=BC$ امتداد می‌دهیم. اگر CD برابر AC باشد، زاویه‌ی A چند درجه است؟ (سراسری خارج کشور تجربی – 94)

1) 25
2) 30
3) 32
4) 36

-30 در شکل AD نیمساز زاویه‌ي A و $AM=MB$ است. اگر $\hat{B}=30^\circ$ و $D\hat{A}M=20^\circ$، زاویه‌ي $\hat{C}$ چقدر است؟ (آزاد غیرپزشکی – 82)



1) 30°
2) 40°
3) 50°
4) 20°

-31 در مثلث متساوی الساقین ABC، قاعده‌ی BC را از هر دو طرف به اندازه‌ی ساق‌ها، تا نقاط D و E امتداد می‌دهیم. در مثلث ADE کوچک‌ترین زاویه‌ی خارجی، چند برابر کوچک‌ترین زاویه‌ی داخلی آن است؟ (سراسری تجربی خارج از کشور – 93)

1) 1
2) $\frac{3}{2}$
3) 2
4) 3

-32 در مثلث ABC داریم $A=108^\circ$. ضلع BC را از هر دو طرف به اندازه‌های $BD=BA$ و $CE=CA$ امتداد می‌دهیم. کوچکترین زاویه‌ی خارجی مثلث ADE چند درجه است؟ (سراسری تجربی – 93)

1) 24
2) 32
3) 36
4) 54

-33 در مثلث متساوي‌الساقين ABC، $(\hat{A}=32^\circ, AC=AB)$ قاعده‌ي BC را به اندازه‌ي ساق تا نقطه‌ي D امتداد مي‌دهيم، زاويه‌ي $A\hat{D}C$ چند درجه است؟ (سراسری ریاضی – 81)

1) 36
2) 34
3) 37
4) 39

-34 در مثلث متساوی‌الساقین $(AB=AC)ABC$، قاعده‌ی BC را به اندازه‌ی ساق تا نقطه‌ی D امتداد می‌دهیم. اگر زاویه‌ی خارجی رأس A از مثلث ABD برابر 102 درجه باشد، کوچکترین زاویه‌ی مثلث ABC چند درجه است؟ (سراسری تجربی – 94)

1) 34
2) 38
3) 42
4) 44

-35 يكي از زواياي مثلث متساوي‌الساقيني برابر 100° است. نيم‌ساز خارجي يكي از زاويه‌ها امتداد ضلع مقابل را با كدام زاويه قطع مي‌كند؟ (سراسری ریاضی – 76)

1) 25°
2) 30°
3) 35°
4) 40°

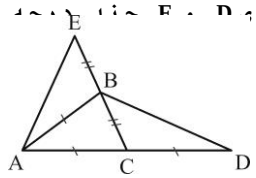
-36 در مثلث ABC داریم $AB=AC$ و $\hat{A}=80^\circ$، عمودمنصف‌هاي دو ساق مثلث، قاعده‌ي BC را در M و N قطع مي‌كند. كوچك‌ترين زاويه‌ي مثلث AMN چند درجه است؟ (سراسری تجربی – 92)

1) 15
2) 20
3) 25
4) 30

-37 بر قاعده‌ي BC از مثلث متساوي‌الساقين ABC ، دو نقطه‌ي M و N را چنان اختيار مي‌كنيم كه BM = NC ، اين نقاط را به رأس A وصل مي‌كنيم ، مثلث AMN همواره چگونه است؟ (سراسری تجربی – 62)

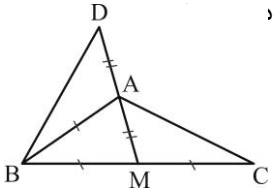
1) غير مشخص
2) متساوي‌الاضلاع
3) متساوي‌الساقين
4) قائم‌الزاويه

-38 اگر در شكل مقابل $B\hat{A}C = 52^\circ$ ، آنگاه مجموع دو زاويه‌ي D و E چند درجه است؟ (سراسری تجربی خارج از کشور – 89)



1) 38
2) 52
3) 58
4) 64

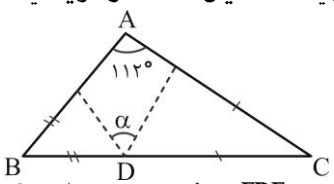
-39 در شكل مقابل $\hat{D} + \hat{C} = 61^\circ$. اندازه‌ي زاويه‌ي ABC چند ... (سراسری تجربی – 89)



1) 39
2) 56
3) 58
4) 61

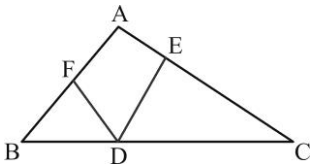
زيرموضوع (3) دو مثلث متساوی‌الساقين در كنار مثلث اصلی

-40 در شكل مقابل، $\hat{A} = 112^\circ$ و دو مثلث كناري متساوي‌الساقين‌اند. زاويه‌ي α چند درجه است؟ (سراسری تجربی – 85)



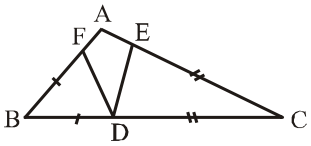
1) 32
2) 34
3) 36
4) 38

-41 در شكل مقابل، $BF = BD$ و $CD = CE$ و $\hat{A} = 120^\circ$ ، زاويه‌ي FDE چند درجه است؟ (آزاد ریاضی – 83)



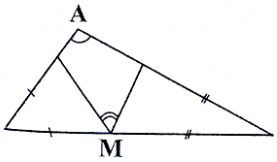
1) 60
2) 30
3) 15
4) 45

-42 در شكل مقابل $BF = BD$ و $CE = CD$ و $\angle B + \angle C = 40^\circ$. زاويه‌ي BAC چند برابر زاويه‌ي FDE است؟ (آزاد ریاضی – 88)



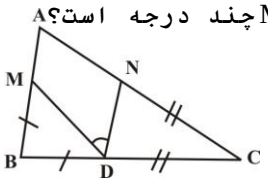
1) 7
2) 3
3) 5
4) 9

-43 در شکل زیر، هر دو مثلث کناري متساويالساقينانـد. اگـر زاويـهي A برابـر 106 درجـه باشد، زاويـهي M چند درجه است؟ (سراسری ریاضی خارج کشور – 88)



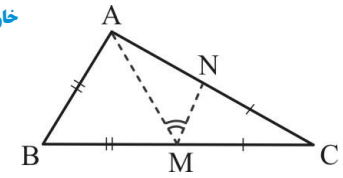
1) 37
2) 38
3) 44
4) 54

-44 در شکل مقابل $\hat{A}=58^\circ$ ، $BM=BD$ و $CN=CD$ ، زاويـهي MDN چند درجه است؟ (سراسری ریاضی – 91)



1) 58
2) 59
3) 61
4) 62

-45 در شکل مقابل، دو مثلث کناري متساويالساقينانـد و $M=43^\circ$ ، انـدازهي زاويـهي BAC چنـد درجه است؟ (خارج از کشور تجربی – 92)

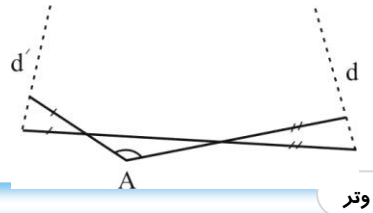


1) 93
2) 94
3) 96
4) 97

-46 در مثلث ABC بر روي ضلع BC پارهخطهاي $BM=BA$ و $CN=CA$ را جدا ميکنيم، اگـر زاويـهي $\hat{A}=72^\circ$ باشد، زاويـهي MÂN چند درجه است؟ (سراسری تجربی – 86)

1) 54
2) 52
3) 48
4) 42

-47 در شکل مقابل دو مثلث کناري متساويالساقينانـد و زاويـهي $\hat{A}=100^\circ$ ، دو خـط d و d' با زاويـهي چند درجه متقاطعاند؟ (سراسری ریاضی – 88)



1) 20
2) 40
3) 45
4) 50

زیرموضوع (4) زاویه بین میانه و ارتفاع وارد بر وتر

-48 در يک مثلث قائمالزاويه، يک زاويه 35° است، اندازهي زاويـهي بين ميانـه و ارتفـاع وارد بر وتر اين مثلث کدام است؟ (سراسری تجربی – 64)

1) 15°
2) 20°
3) 30°
4) 45°

-49 در مثلث قائمالزاويـهاي، زاويـهي بين ارتفاع و ميانـهي وارد بر وتر برابر 26° اسـت. کوچکترين زاويـهي مثلث چند درجه است؟ (سراسری تجربی – 81)

1) 24
2) 28
3) 32
4) 34

-50 در يک مثلث، زوايا به نسبت 1 ، 8 و 9 هستند. زاويـهی بين ميانه و ارتفاع وارد بـر ضلع بزرگتر چقدر است؟ (آزاد ریاضی – 91)

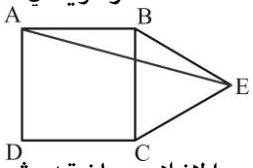
1) 80°
2) 70°
3) 60°
4) 50°

زیرموضوع (5) زاویه در مثلث متساویالاضلاع

-51 یک مثلث متساوي‌الاضلاع به سه مثلث همنهشت تقسیم شده است. زاویه‌هاي هر مثلث همنهشت کدام است؟ (سراسری تجربی خارج از کشور – 87)

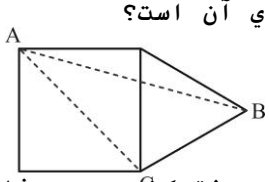
1) 60° ، 60° و 60°
2) 30° ، 30° و 90°
3) 30° ، 60° و 90°
4) 30° ، 30° و 120°

-52 مربع ABCD و مثلث متساوي‌الاضلاع BEC در شکل داده شده‌اند، زاویه‌ي $\hat{DAE}$ چقدر است؟ (آزاد پزشکی – 77)



1) 75°
2) 60°
3) 45°
4) 70°

-53 در شکل زیر، بر روي ضلع مربع مفروض، مثلث متساوي‌الاضلاع ساخته شده است. در مثلث ABC بزرگ‌ترین زاویه چند برابر کوچک‌ترین زاویه‌ي آن است؟ (سراسری تجربی خارج از کشور – 88)



1) 3
2) $\frac{7}{2}$
3) 4
4) $\frac{9}{2}$

-54 مربع و مثلث متساوي‌الاضلاع درون مربع، در یک ضلع مشترک‌اند. در مثلث غیر قائم‌الزاویه که دو ضلع آن به‌ترتیب قطر مربع و ضلع مثلث متساوي‌الاضلاع است، زاویه‌ي بزرگ‌تر چند برابر زاویه‌ي کوچکتر است؟ (سراسری تجربی خارج از کشور – 86)

1) 7
2) 7/5
3) 8
4) 9

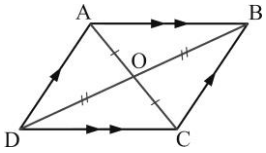
هندسه و استدلال

- متوازی‌الاضلاع
- تعریف‌ها و قضیه‌های مهم در مورد خم‌ها

متوازی‌الاضلاع

یک متوازی‌الاضلاع چهارضلعی است که ضلع‌های آن دوبه‌دو با هم موازی هستند، از موازی بودن دوبه‌دوی اضلاع، نتیجه می‌شود که در متوازی الاضلاع:

1. ضلع‌های روبه‌رو با هم مساویند.
2. زاویه‌های روبه‌رو با هم مساویند.
3. زاویه‌های مجاور با هم مکملند.
4. قطرها همدیگر را نصف می‌کنند. $OA = OC$ و $OB = OD$



5. با رسم هر قطر، متوازی الاضلاع به دو مثلث همنهشت تقسیم می‌شود.

$\overset{\Delta}{ABD} \cong \overset{\Delta}{CDB}$ و $\overset{\Delta}{ACD} \cong \overset{\Delta}{CBA}$

6. با رسم دو قطر، متوازی‌الاضلاع به چهار مثلث تقسیم می‌شود. $\overset{\Delta}{OAB} \cong \overset{\Delta}{OCD}$ و $\overset{\Delta}{OAD} \cong \overset{\Delta}{OCB}$
7. **مستطیل:** متوازی‌الاضلاعی است که زاویه‌های آن با هم مساوی باشند (هر چهار زاویه 90 درجه هستند).

از تعریف فوق، می‌توان نتیجه گرفت که در مستطیل، طول قطرها با هم برابر است.

8. **لوزی:** متوازی‌الاضلاعی است که ضلع‌های آن با هم مساوی باشند.

از تعریف فوق، می‌توان نتیجه گرفت که در لوزی، قطرها بر هم عمود بوده و همچنین نیمساز زاویه‌های لوزی هستند.

9. **مربع:** متوازی‌الاضلاعی که ضلع‌های آن با هم و زاویه‌های آن با هم برابر باشند، با این تعریف، مربع تمام خواص مستطیل و لوزی را دارد.

تعریف‌ها و قضیه‌های مهم در مورد خم‌ها

1. **خم مسطح:** مجموعه‌ای از نقطه‌هاست که بتوانیم آن را بدون بلند کردن قلم از روی کاغذ، رسم کنیم.
2. **خم ساده:** یک خم مسطح است که هیچ یک از نقطه‌های خود را قطع نکند، مگر در حالتی که نقطه‌های انتهایی به هم می‌رسند.
3. **خم بسته:** اگر نقطه‌های انتهایی یک خم بر هم منطبق باشند، آن خم بسته نامیده می‌شود.
4. **قضیه‌ی خم جردن:** هر خم ساده‌ی بسته C، صفحه را به سه زیرمجموعه‌ی جدا از هم درون، بیرون و روی خم تقسیم می‌کند.
5. اگر همه‌ی زاویه‌های داخلی یک چندضلعی کمتر از 180 درجه باشند، ناحیه‌ی داخل آن چندضلعی محدب است و اگر در یک چندضلعی حداقل یک زاویه‌ی بیش‌تر از 180 درجه وجود داشته باشد، ناحیه‌ی داخل آن چندضلعی محدب نیست.
6. یک ناحیه (یا مجموعه‌ای از نقطه‌ها) **محدب** است اگر پاره‌خطی که هر دو نقطه‌ی دلخواه آن را به هم وصل می‌کند، کاملاً در آن ناحیه قرار گیرد.

چندضلعی‌ها

1. **چندضلعی:** یک خم ساده‌ی بسته است که از اجتماع حداقل سه پاره‌خط تشکیل شده باشد، به طوری که نقطه‌های انتهایی آن پاره‌خط‌ها روی یک صفحه بوده و هیچ سه نقطه‌ی متوالی از آن‌ها روی یک خط قرار نگرفته باشند.

زیرموضوع (1)　　متوازی‌الاضلاع

-55 کدام گزینه همواره درست است؟ (آزاد ریاضی - 73)

1) اگر در یک چهار ضلعی قطرها یکدیگر را نصف کنند، چهار ضلعی متوازی‌الاضلاع است.
2) اگر در یک چهار ضلعی قطرها با یکدیگر برابر باشند، چهار ضلعی مستطیل است.
3) اگر در یک چهار ضلعی قطرها بر هم عمود باشند، چهار ضلعی مربع است.
4) اگر در یک چهار ضلعی اضلاع برابر باشند، چهار ضلعی مربع است.

-56 کدام گزینه یک مربع را مشخص می‌کند؟ (آزاد تجربی - 75)

1) لوزی که یک قطرش با ضلع آن برابر باشد.
2) مستطیلی که قطرهایش بر هم عمود باشند.

3) متوازي‌الاضلاعي كه دو قطرش مساوي باشند.
4) ذوزنقه‌اي كه دو زاويه‌ي قائمه داشته باشد.

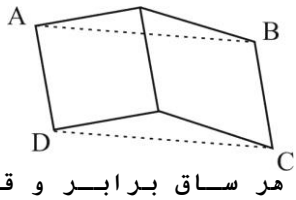
-57 كدام گزينه صحيح است؟ (آزاد پزشکی – 71)
1) مربع لوزي است كه اقطارش مساوي است.
2) هر چهار ضلعي كه اقطارش بر هم عمود باشند، مربع است.
3) هر متوازي‌الاضلاع كه اقطارش بر هم عمود باشند، مربع است.
4) هر ذوزنقه كه يك زاويه‌ي قائمه داشته باشد، مربع است.

-58 كدام‌يك از چهار ضلعي‌هاي زير يك متوازي‌الاضلاع را مشخص نمي‌كند؟ (آزاد پزشکی – 68)
1) چهار ضلعي كه دو ضلع موازي و دو ضلع مساوي داشته باشد.
2) چهار ضلعي كه قطرهايش منصف يكديگر باشند.
3) چهار ضلعي كه دو ضلع مساوي و موازي داشته باشد.
4) چهار ضلعي كه زواياي روبه‌رويش مساوي باشند.

-59 كدام قضيه درست نيست؟ (آزاد تجربی – 66)
1) متوازي‌الاضلاعي كه قطرهايش بر هم عمود باشد، لوزي است.
2) ذوزنقه‌اي كه دو قطرش برابر باشد، متساوي‌الساقين است.
3) مستطيلي كه قطرهايش بر هم عمود باشد، مربع است.
4) هر چهار ضلعي كه دو ضلعش برابر باشد، ذوزنقه است.

-60 كدام‌يك از تعريف‌هاي زير، تعريف لوزي نيست؟ (سراسری ریاضی – 62)
1) متوازي‌الاضلاعي كه اضلاعش با هم مساوي‌اند.
2) متوازي‌الاضلاعي كه اقطارش بر هم عمودند.
3) متوازي‌الاضلاعي كه اقطارش منصف يكديگرند.
4) متوازي‌الاضلاعي كه قطرهايش نيم‌ساز زوايا باشند.

-61 در شكل زير، يك مربع و يك لوزي با زاويه‌ي 60 درجه، در يك ضلع مشتركند. بزرگ‌ترين زاويه‌ي متوازي الاضلاع ABCD چند درجه است؟ (سراسری تجربی – 88)



1) 100
2) 105
3) 120
4) 135

-62 در يك ذوزنقه‌ي متساوي‌الساقين، قاعده‌ي كوچك با هر ساق برابر و قاعده‌ي بزرگ دو برابر هر يك از آن‌هاست. اندازه‌ي زاويه‌ي حاده‌ي اين ذوزنقه چند درجه است؟ (سراسری ریاضی – 74)
1) 30 2) 45 3) 60 4) 75

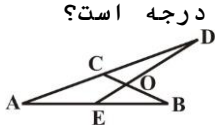
-63 در مثلث ABC، از نقطه‌ي D، محل تلاقي نيم‌ساز داخلي زاويه‌ي A با ضلع BC، خطوطي موازي دو ضلع ديگر رسم مي‌كنيم تا آن دو را در M و N قطع كنند، MN و AD نسبت به هم چه وضعي دارند؟ (سراسری تجربی – 78)
1) فقط عمود بر هم
2) فقط منصف هم
3) زاويه‌ي بين آن‌ها مكمل $\hat{A}$
4) عمود منصف هم

زيرموضوع (2) خم

-64 ناحيه‌ي محدود به يك چند ضلعي در كدام حالت ممكن است مجموعه‌ي محدب نباشد؟ (سراسری ریاضی – 76)
1) تمام نقاط پاره خطي كه دو نقطه‌ي دلخواه آن را به هم وصل مي‌كنند عضو آن مجموعه است.
2) هر زاويه‌ي داخلي كمتر از نيم‌صفحه است.
3) ساير رأس‌ها، در يك طرف هر خطي قرار دارند كه بر ضلع آن منطبق است.
4) يك قطر، آن را به دو مجموعه‌ي محدب تقسيم مي‌كند.

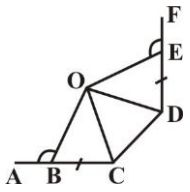
آزمون فصل اول

-1 در شکل مقابل، اگر $B\hat{O}D=22^0$ و $B\hat{A}D=18^0$، آنگاه $\hat{B}+\hat{D}$ چند درجه است؟ (آزمون کانون – 92)



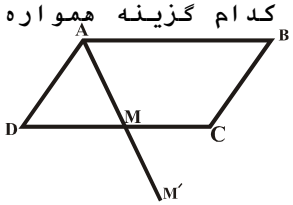
1) 4　　2) 8
3) 10　　4) 20

-2 در شکل زیر، اگر $BC=DE$ و $\hat{OBA}=\hat{OEF}$، آنگاه کدام یک از تساوی‌های زیر، برای هم‌نهشتی دو مثلث OBC و ODE کافی نیست؟ (آزمون کانون – 91)



1) $\hat{OCB}=\hat{ODE}$
2) $\hat{COB}=\hat{EOD}$
3) $OB=OE$
4) $OC=OD$

-3 در متوازی الاضلاع ABCD از رأس A به نقطه‌ی M، وسط CD وصل کرده و AM را، از طرف M به اندازه‌ی خودش امتداد می‌دهیم تا نقطه‌ی M' به‌دست آید. کدام گزینه همواره درست است؟ (آزمون کانون – 85)

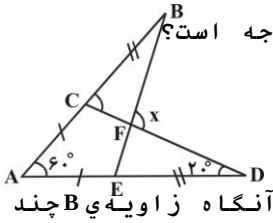


1) M'، C و B روی یک امتداد قرار دارند.
2) $A\hat{M}D=M\hat{M}'C$
3) $M'D=M'B$
4) $A\hat{D}M=M\hat{M}'C$

-4 از نقطه‌ی M واقع بر ضلع BC در مثلث ABC، خط d را گذرانده‌ایم. اگر بدانیم که دو نقطه‌ی B و C از خط d به یک فاصله هستند، آنگاه کدام گزینه، لزوماً درست است؟ (آزمون کانون – 92)

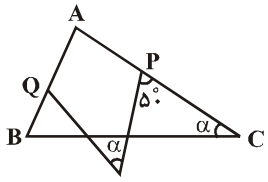
1) M وسط BC است.
2) نیم‌ساز داخلی $\hat{A}$ بر d واقع است.
3) میانه‌ی گذرنده از A بر d واقع است.
4) d عمود منصف BC است.

-5 در شکل مقابل $AC=AE$ و $BC=DE$. اندازه‌ی زاویه‌ی x چند درجه است؟ (آزمون کانون – 91)



1) 100　　2) 90
3) 80　　4) 120

-6 در شکل مقابل $AP=AQ$، $PT=QT$ و $T\hat{P}C=50^0$. اگر $\hat{T}=\hat{C}=\alpha$، آنگاه زاویه‌ی B چند درجه است؟ (آزمون کانون – 90)



1) 80
2) 75
3) 70
4) 65

-7 در مثلث ABC، نیمساز زاویه‌ی داخلی A، ضلع BC را در نقطه‌ی D قطع می‌کند. از نقطه‌ی D عمودهای DE و DF را به ترتیب بر اضلاع AB و AC رسم می‌کنیم. طول‌های کدام دو پاره‌خط، همواره با هم مساوی است؟ (آزمون کانون – 88)

1) CF و BE　　2) AE و CF　　3) AF و AE　　4) AF و BE

-8 در چهارضلعی ABCD، اگر AB=AD و CB=CD، آنگاه روی قطر AC چند نقطه وجود دارد که از دو رأس B و D به یک فاصله باشند؟ (آزمون کانون – 92)

1) 1　　2) 2　　3) 4　　4) بی‌شمار

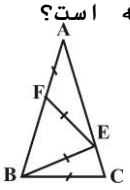
-9 در مثلث متساوی‌الساقین ABC، عمودمنصف ساق AB با ساق AC در نقطه‌ی M متقاطع است. اگر $M\hat{B}C=57^0$، آنگاه زاویه‌ی A چند درجه است؟ (آزمون کانون – 92)

1) 21　　2) 22　　3) 23　　4) 24

-10 در مثلث ABC، زاویه‌ی A حاده است. اگر عمودمنصف‌های دو ضلع AC و AB یکدیگر را در نقطه‌ی O قطع کنند، آنگاه زاویه‌ی $B\hat{O}C$ همواره برابر کدام است؟ (آزمون کانون – 90)

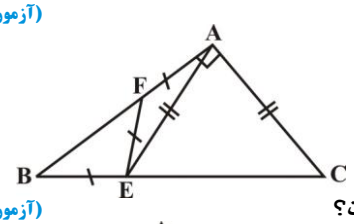
1) $90^\circ+\frac{1}{2}\hat{A}$ 2) $\hat{B}+\hat{C}$ 3) $\frac{1}{2}(\hat{B}+\hat{C})$ 4) $2\hat{A}$

-11 در شکل روبه‌رو $AB=AC$ و $AF=FE=EB=BC$ ؛ زاویه‌ي A چند درجه است؟ (آزمون کانون –92)



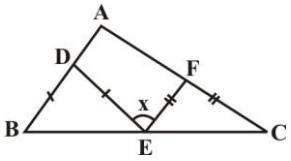
1) 36
2) 18
3) $\frac{180}{7}$
4) 24

-12 در مثلث قائم‌الزاویه‌ي ABC نقاط F و E به ترتیب روي AB و BC طوري انتخاب شده‌اند که $BE=EF=FA$ و $AE=AC$. زاویه‌ي B چند درجه است؟ (آزمون کانون –91)



1) 18
2) 36
3) 32
4) 25

-13 در شکل زیر، اگر $\hat{A}=84^\circ$ ، آنگاه زاویه‌ي x چند درجه است؟ (آزمون کانون –92)



1) 84
2) 96
3) 48
4) 58

-14 در مثلث ABC که $\hat{A}=90^\circ$ ، نقاط A' ، B' و C' را به ترتیب روي ضلع‌هاي BC ، AC و AB طوري در نظر مي‌گیریم که $CA'=CB'$ و $C'\hat{A}'B'=45^\circ$. نوع مثلث $A'BC'$ لزوماً چگونه است؟ (آزمون کانون –92)

1) متساوي‌الساقین 2) متساوي‌الاضلاع 3) قائم‌الزاویه 4) نامشخص

-15 در مثلث ABC که $\hat{B}=60^\circ$ ، روي ضلع BC که بزرگ‌ترین ضلع این مثلث است، پاره‌خط BD را هم طول با BA جدا مي‌کنیم. اگر $\hat{C}=3C\hat{A}D$ ، آنگاه زاویه‌ي A چند درجه است؟ (آزمون کانون –92)

1) 65 2) 70 3) 75 4) 80

-16 در ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین ABCD ، اگر ساق AD برابر قاعده‌ی کوچک‌تر و قطر AC برابر قاعده‌ی بزرگ‌تر باشد، زاویه‌ي D چند درجه است؟ (آزمون کانون – 92)

1) 36 2) 60 3) 72 4) 54

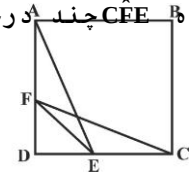
-17 در مثلث ABC، زاویه‌ي A قائمه است و میانه‌ي وارد بر ضلع BC ، نیمساز داخلي زاویه‌ي B را در نقطه‌ي O قطع کرده است. اگر $A\hat{O}B=120^\circ$ ، آنگاه زاویه‌ي C چند درجه است؟ (آزمون کانون – 90)

1) 30 2) 40 3) 50 4) 60

-18 در متوازي‌الاضلاع ABCD نیمساز زاویه‌ي حاده‌ي A و زاویه‌ي منفرجه‌ي B ، یک‌دیگر را در نقطه‌اي روي ضلع DC قطع کرده‌اند؛ نسبت محیط این متوازي‌الاضلاع به طول ضلع کوچک‌تر آن کدام است؟ (آزمون کانون –90)

1) 8 2) 6 3) 4 4) 3

-19 در شکل مقابل، ABCD مربع است و AE=CF . اگر $D\hat{A}E=15^\circ$ ، آنگاه $C\hat{F}E$ چند درجه است؟ (آزمون کانون – 92)



1) 15 2) 22/5 3) 30 4) 45

-20 قضیه‌ي خم جردن براي کدام یک از خم‌هاي زیر صادق نیست؟ (آزمون کانون –92)

1) 2) 3) 4)

پاسخ فصل اول

1- گزینه‌ی «1»

دو زاویه‌ي A و B را در نظر مي‌گيريم، طبق فرض سؤال $\hat{A}+\hat{B}=120^\circ$؛ همچنين مكمل زاويه‌ي A، برابر $180^\circ-\hat{A}$ و مكمل زاويه‌ي B، برابر $180^\circ-\hat{B}$ است، پس مجموع مكمل‌هاي دو زاويه‌ي A و B برابر است با:

$$(180^\circ-\hat{A})+(180^\circ-\hat{B})=360^\circ-(\hat{A}+\hat{B})$$

$$\xrightarrow{\text{طبق}} 360^\circ-120^\circ=240^\circ$$

2- گزینه‌ی «4»

طبق فرض، $\hat{A}$ و $\hat{B}$ مكملند، پس: (1) $\hat{A}+\hat{B}=180^\circ$

همچنين طبق فرض سؤال: (2) $\hat{A}=2\hat{B}$

$$(2)\Rightarrow \begin{cases}\hat{A}+\hat{B}=180^\circ\\ \hat{A}=2B\end{cases} \xrightarrow{\text{حل}} \begin{cases}\hat{B}=60^\circ\\ \hat{A}=120^\circ\end{cases}$$ و

(1)

$$\Rightarrow 2\hat{A}-3\hat{B}=240^\circ-180^\circ=60^\circ$$

3- گزینه‌ی «4»

طبق فرض سؤال، A و B دو زاويه‌ي متمم‌اند، پس:

$$\hat{A}+\hat{B}=90^\circ \quad (1)$$

همچنين، طبق فرض سؤال، اندازه‌ي زاويه‌ي A، $\frac{4}{9}$ مكمل زاويه‌ي B است، پس: (2)

$$(1)\Rightarrow \begin{cases}\hat{A}+\hat{B}=90^\circ\\ 9\hat{A}+4\hat{B}=720^\circ\end{cases} \xrightarrow{\text{حل}} \begin{cases}\hat{A}=72^\circ\\ \hat{B}=18^\circ\end{cases}$$

4- گزینه‌ی «3»

زاويه‌هاي اين مثلث را $\hat{A}$، $\hat{B}$ و $\hat{C}$ در نظر مي‌گيريم، چون اين زوايا، طبق فرض سؤال، با اعداد 8، 5 و 2 متناسبند، پس $\frac{\hat{A}}{8}=\frac{\hat{B}}{5}=\frac{\hat{C}}{2}$، با فرض $\frac{\hat{A}}{8}=\frac{\hat{B}}{5}=\frac{\hat{C}}{2}=k$، داريم $\begin{cases}\hat{A}=8k\\ \hat{B}=5k\\ \hat{C}=2k\end{cases}$؛ همچنين مي‌دانيم كه مجموع زاويه‌هاي داخلي هر مثلث، 180 درجه است، پس:

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180^\circ \Rightarrow 8k+5k+2k=180^\circ$$

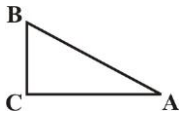
$$\Rightarrow 15k=180^\circ \Rightarrow k=12^\circ$$

كوچكترين زاويه‌ي خارجي، متناظر با بزرگترين زاويه‌ي داخلي است و داريم:

$$\Rightarrow \begin{cases}\hat{A}=8k=96^\circ & \text{(بزرگترين زاويه‌ي داخلي)}\\ \hat{B}=5k=60^\circ\\ \hat{C}=2k=24^\circ\end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{كوچكترين زاويه‌ي خارجي}=180^\circ-96^\circ=84^\circ$$

5- گزینه‌ی «3»



راه اول: فرض كنيم شرايط مسئله در مثلث ΔABC مانند وجود داشته باشد، يعني رابطه‌ي $\frac{\hat{A}}{1}=\frac{\hat{B}}{4}=\frac{\hat{C}}{5}$ بين زاويه‌هاي اين مثلث برقرار باشد، در اين‌صورت داريم:

$$\begin{cases}\hat{B}=4\hat{A}\\ \hat{C}=5\hat{A}\end{cases} \quad (*)$$

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180^\circ \xrightarrow{(*)} \hat{A}+4\hat{A}+5\hat{A}=180^\circ$$

$$\Rightarrow 10\hat{A}=180^\circ \Rightarrow \hat{A}=18^\circ \xrightarrow{(*)} \begin{cases}\hat{B}=72^\circ\\ \hat{C}=90^\circ\end{cases}$$

در نتيجه مثلث ABC در رأس C قائمه است.

راه دوم: از ابتدا مي‌توانستيم زاويه‌هاي اين مثلث را به‌صورت x، $4x$ و $5x$ در نظر گرفته، مجموع آن‌ها را 180° قرار دهيم:

$$5x+4x+x=180^\circ \Rightarrow 10x=180^\circ \Rightarrow x=18^\circ$$

$$\Rightarrow \begin{cases}4x=72^\circ\\ 5x=90^\circ\end{cases}$$

$$\hat{A}=\frac{4}{9}(180^\circ-\hat{B}) \Rightarrow 9\hat{A}=4(180^\circ-\hat{B})$$

6- گزینه‌ی «3»

چون زاويه‌هاي مثلث ABC به نسبت 2، 3 و 5 هستند، پس:

$$\begin{cases}\hat{A}=2k\\ \hat{B}=3k\\ \hat{C}=5k\end{cases}$$

از طرفي مي‌دانيم كه $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180^0$، پس:

$$2k+3k+5k=180^0 \Rightarrow 10k=180^0 \Rightarrow k=18^0$$

$$\text{اختلاف بزرگترين زاويه با كوچكترين زاويه}=\hat{C}-\hat{A}=5k-2k$$

$$=3k=3\times 18^0=54^0$$

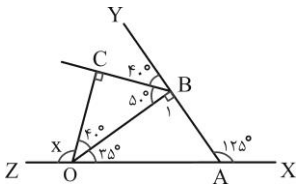
7- گزینه‌ی «1»

براي مثلث OAB، زاويه‌ي BAX يك زاويه‌ي خارجي است، پس:

$$B\hat{A}X=\hat{B}_1+A\hat{O}B$$

$$\Rightarrow 125^\circ=90^\circ+A\hat{O}B$$

$$\Rightarrow A\hat{O}B=35^\circ$$



از طرفي:

$\hat{B}_1+O\hat{B}C+C\hat{B}Y=180^\circ \Rightarrow 90^\circ+O\hat{B}C+40^\circ=180^\circ$

$\Rightarrow O\hat{B}C=50^\circ$

در مثلث قائم‌الزاویه‌ي OBC داریم:

$B\hat{O}C=90^\circ-O\hat{B}C=90^\circ-50^\circ=40^\circ$

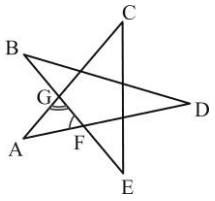
همچنین:

$x+B\hat{O}C+A\hat{O}B=180^\circ$

$\Rightarrow x+40^\circ+35^\circ=180^\circ \Rightarrow x=105^\circ$

8- گزینه‌ی «1»

مطابق شکل،



زاویه‌ي $A\hat{F}G$، براي مثلث BFD یک زاویه‌ي خارجي است، پس:

$A\hat{F}G=\hat{B}+\hat{D}$ (*)

همچنین زاویه‌ي $A\hat{G}F$، براي مثلث GCE، یک زاویه‌ي خارجي است، پس:

$A\hat{G}F=\hat{C}+\hat{E}$ (**)

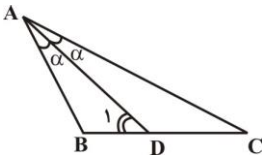
از طرفي در مثلث AGF، مجموع زاویه‌هاي داخلي 180 درجه است، پس: $\hat{A}+A\hat{F}G+A\hat{G}F=180^\circ$

$\xrightarrow{(*),(**)} \hat{A}+(\hat{B}+\hat{D})+(\hat{C}+\hat{E})=180^\circ$

$\Rightarrow \hat{A}+\hat{B}+\hat{C}+\hat{D}+\hat{E}=180^\circ$

9- گزینه‌ی «3»

مطابق شکل، مثلث ABC را با شرایط مسأله رسم مي‌کنیم، چون AD نیمساز زاویه‌ي A است آن را به دو زاویه‌ي مساوي تقسیم مي‌کند. ما به دنبال محاسبه‌ي زاویه‌ي D_1 هستیم.



این زاویه، زاویه‌ي خارجي مثلث ADC است و در نتیجه:

$\hat{D}_1=\alpha+\hat{C}$

از طرفي در مثلث ABD داریم: $\alpha+\hat{D}_1+\hat{B}=180^\circ$

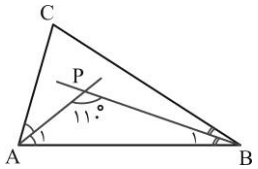
طبق فرض سؤال $\hat{B}-\hat{C}=90^\circ$، پس $\hat{B}=90^\circ+\hat{C}$ و رابطه‌ي بالا را مي‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$\alpha+\hat{D}_1+(90^\circ+\hat{C})=180^\circ \Rightarrow (\alpha+\hat{C})+\hat{D}_1=90^\circ$

$\xrightarrow{\hat{D}_1=\alpha+\hat{C}} \hat{D}_1+\hat{D}_1=90^\circ \Rightarrow 2\hat{D}_1=90^\circ \Rightarrow \hat{D}_1=45^\circ$

10- گزینه‌ی «3»

راه اول: مطابق شکل، فرض مي‌کنیم که نیمسازهاي داخلي زاویه‌هاي A و B، در نقطه‌ي P متقاطعند، طبق فرض سؤال $A\hat{P}B=110^\circ$.



در مثلث PAB، مجموع زاویه‌هاي داخلي 180 درجه است، پس:

$A\hat{P}B+\hat{A}_1+\hat{B}_1=180^\circ$ (1)

AP نیمساز $\hat{A}$ است. $\Rightarrow \hat{A}_1=\frac{\hat{A}}{2}$ (2)

BP نیمساز $\hat{B}$ است. $\Rightarrow \hat{B}_1=\frac{\hat{B}}{2}$ (3)

همچنین:

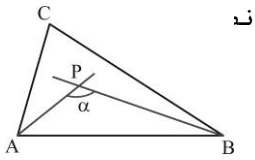
$\xrightarrow{(1),(2),(3)} 110^\circ+\frac{\hat{A}}{2}+\frac{\hat{B}}{2}=180^\circ \Rightarrow \frac{\hat{A}+\hat{B}}{2}=70^\circ$ (*)

از طرفي، مجموع زاویه‌هاي داخلي مثلث ABC نیز 180 درجه است، پس:

$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180^\circ \Rightarrow \hat{A}+\hat{B}=180^\circ-\hat{C}$

$\xrightarrow{(*)} \frac{180^\circ-\hat{C}}{2}=70^\circ \Rightarrow 180^\circ-\hat{C}=140^\circ \Rightarrow \hat{C}=40^\circ$

راه دوم: همان‌طور که در متن درس اشاره شد، در هر مثلث، زاویه‌ي منفرجه‌ي بین نیمسازهاي دو زاویه‌ي داخلي، برابر است با 90 درجه، بعلاوه‌ي نصف زاویه‌ي سوم مثلث.



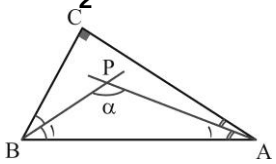
با توجه به نکته‌ي بالا و شکل مقابل، مي‌توان نوشت:

$\alpha=90^\circ+\frac{\hat{C}}{2}$

طبق فرض سؤال $\alpha=110^\circ$، پس: $110^\circ=90^\circ+\frac{\hat{C}}{2} \Rightarrow \hat{C}=40^\circ$

11- گزینه‌ی «4»

راه اول: چون مثلث در رأس C قائم‌الزاویه است، پس:



$\hat{B}=90^\circ-\hat{A}=90^\circ-20^\circ=70^\circ$

و چون AP و BP، به‌ترتیب نیمسازهاي زاویه‌هاي A و B هستند، پس $\hat{A}_1=\frac{\hat{A}}{2}=\frac{20^\circ}{2}=10^\circ$ و $\hat{B}_1=\frac{\hat{B}}{2}=\frac{70^\circ}{2}=35^\circ$.

در مثلث PAB، مي‌توانیم بنویسیم:

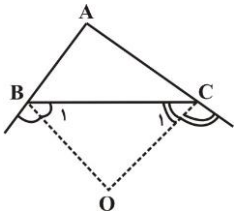
$\alpha+\hat{A}_1+\hat{B}_1=180^\circ \Rightarrow \alpha+10^\circ+35^\circ=180^\circ$

$\Rightarrow \alpha=135^\circ$

راه دوم: $\alpha=90^\circ+\frac{\hat{C}}{2} \xrightarrow{\hat{C}=90^\circ} \alpha=90^\circ+\frac{90^\circ}{2}=135^\circ$

12- گزینه‌ی «1»

همان‌طور که در متن درس اشاره شد، در هر مثلث زاویه‌ي حاده‌ي بین نیمسازهاي خارجي دو زاویه برابر است با



90 درجه منهاي نصف زاويه‌ي سوم. يعني در شكل اگر BO و CO نيمساز خارجي زواياي B و C باشند، آنگاه

$$\overset{\Delta}{BOC}: \hat{O}+\hat{B}_1+\hat{C}_1=180^\circ \text{ زيرا: } \hat{O}=90^\circ-\frac{\hat{A}}{2}$$

$$\Rightarrow \hat{O}+\frac{180^\circ-\hat{B}}{2}+\frac{180^\circ-\hat{C}}{2}=180^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{O}+90^\circ-\frac{\hat{B}}{2}+90^\circ-\frac{\hat{C}}{2}=180^\circ \Rightarrow \hat{O}=\frac{\hat{B}+\hat{C}}{2}$$

در مثلث ABC، $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180^\circ$، پس $\hat{B}+\hat{C}=180^\circ-\hat{A}$ و از تساوي بالا داريم:

$$\Rightarrow \hat{O}=\frac{180^\circ-\hat{A}}{2}=90^\circ-\frac{\hat{A}}{2}$$

حال با استفاده از رابطه‌ي به‌دست آمده داريم:

$$\hat{O}=90^\circ-\frac{\hat{A}}{2}\Rightarrow 45^\circ=90^\circ-\frac{\hat{A}}{2}\Rightarrow \frac{\hat{A}}{2}=45^\circ$$

$$\hat{A}=90^\circ$$

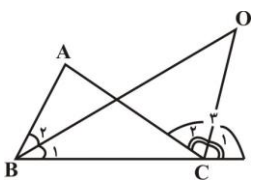
زاويه‌ي خارجي $\hat{B}=120^\circ \Rightarrow 180^\circ-\hat{B}=120^\circ \Rightarrow \hat{B}=60^\circ$

زاويه‌ي خارجي $\hat{C}=\alpha \Rightarrow 180^\circ-\hat{C}=\alpha \Rightarrow \hat{C}=180^\circ-\alpha$

لذا در مثلث ABC داريم:

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180^\circ \Rightarrow 90^\circ+60^\circ+(180^\circ-\alpha)=180^\circ$$
$$\Rightarrow \alpha=150^\circ$$

13- گزينه‌ي «3»



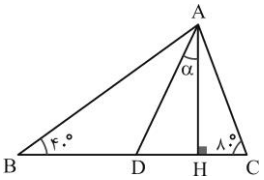
همان طور كه در متن درس اشاره شد در هر مثلث زاويه‌ي بين يك نيمساز داخلي و يك نيمساز خارجي برابر است با نصف زاويه‌ي سوم. زيرا $\hat{C}_3$ زاويه‌ي خارجي مثلث ABC و $\hat{C}_1$ زاويه‌ي خارجي مثلث BOC است، در نتيجه داريم:

$$\begin{cases}\hat{C}_3=\hat{A}+\hat{B}\\ \hat{C}_1=\hat{O}+\hat{B}_1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\hat{C}_3=\hat{A}+\hat{B}\\ \frac{\hat{C}_3}{2}=\hat{O}+\frac{\hat{B}}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{\hat{C}_3}{2}=\frac{\hat{A}}{2}+\frac{\hat{B}}{2}\\ \frac{\hat{C}_3}{2}=\hat{O}+\frac{\hat{B}}{2}\end{cases}$$

از مقايسه‌ي دو رابطه‌ي اخير نتيجه مي‌شود كه $\hat{O}=\frac{\hat{A}}{2}$.

در اين تست $\hat{A}=60^\circ$ و در نتيجه $\hat{O}=30^\circ$.

14- گزينه‌ي «2»



مجموع زاويه‌هاي داخلي هر مثلث، 180 درجه است، پس:

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180^\circ$$
$$\Rightarrow 80^\circ+60^\circ+\hat{C}=180^\circ$$
$$\Rightarrow \hat{C}=40^\circ$$

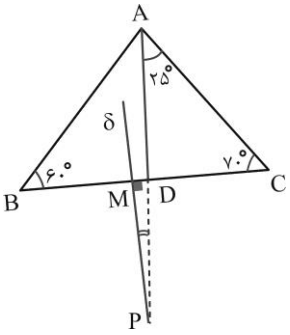
با توجه به گزينه‌ها، زاويه‌ي حاده‌ي بين دو ارتفاع AH و BH′ مد نظر سؤال است، پس بايد در شكل بالا، زاويه‌ي α را محاسبه كنيم؛ داريم: مثلث ACH قائم‌الزاويه است، پس:

$$C\hat{A}H=90^\circ-\hat{C}=90^\circ-40^\circ=50^\circ$$

مثلث APH′ قائم‌الزاويه است، پس:

$$\alpha=90^\circ-C\hat{A}H=90^\circ-50^\circ=40^\circ$$

15- گزينه‌ي «3»



مطابق شكل، فرض مي‌كنيم كه AD نيمساز زاويه‌ي A و خط δ عمود منصف پاره‌خط BC است و امتداد پاره‌خط AD، خط δ را در نقطه‌ي P قطع كرده است، زاويه‌ي MPD مد نظر سؤال است.

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180^\circ \Rightarrow 50^\circ+60^\circ+\hat{C}=180^\circ \Rightarrow \hat{C}=70^\circ$$

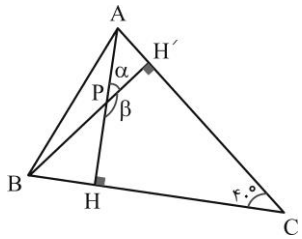
$AD \Rightarrow D\hat{A}C=\frac{\hat{A}}{2}=\frac{50^\circ}{2}=25^\circ$ نيمساز $\hat{A}$ است.

زاويه‌ي PDC، براي هر يك از مثلث‌هاي ACD و MDP، يك زاويه‌ي خارجي است، پس:

$$\begin{cases}P\hat{D}C=D\hat{A}C+\hat{C}=25^\circ+70^\circ=95^\circ\\ P\hat{D}C=D\hat{M}P+M\hat{P}D=90^\circ+M\hat{P}D\end{cases}$$

$$\Rightarrow 95^\circ=90^\circ+M\hat{P}D\Rightarrow M\hat{P}D=5^\circ$$

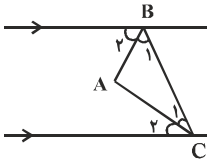
16- گزينه‌ي «3»



مجموع زاويه‌هاي داخلي مثلث ABC، 180 درجه است، پس:

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180^\circ$$
$$\Rightarrow 80^\circ+60^\circ+\hat{C}=180^\circ$$
$$\Rightarrow \hat{C}=40^\circ$$

17- گزينه‌ي «3»



براساس قضيه‌ي خطوط موازي و مورب داريم:

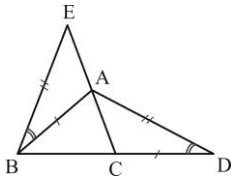
$$\hat{B}_1+\hat{B}_2+\hat{C}_1+\hat{C}_2=180^\circ$$

از طرفی فرض $\hat{B}_1=\hat{B}_2$ و $\hat{C}_1=\hat{C}_2$ پس داریم:

$$2\hat{B}_1+2\hat{C}_1=180^\circ\Rightarrow\hat{B}_1+\hat{C}_1=90^\circ\Rightarrow\hat{A}=90^\circ$$

18- گزینه‌ی «4»

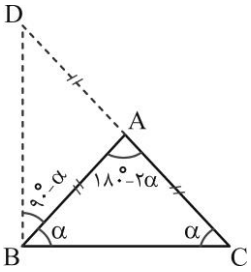
با توجه به شکل:



$$\begin{cases}AD=BE\\ A\hat{D}C=A\hat{B}E\\ CD=AB\end{cases}\xrightarrow{\text{ضزض}}\overset{\Delta}{ACD}\cong\overset{\Delta}{EAB}$$

$$\Rightarrow AC=AE$$

19- گزینه‌ی «1»



با فرض $\hat{C}=\alpha$، به دلیل متساوی‌الساقین بودن مثلث ABC (طبق فرض مسأله) می‌توان گفت:

$$B\hat{A}C=\alpha$$ و $$B\hat{A}C=180^\circ-2\alpha$$

زاویه‌ی $B\hat{A}C$، برای مثلث متساوی‌الساقین ABD یک زاویه‌ی خارجی است، پس:

$$B\hat{A}C=A\hat{B}D+\hat{D}\xrightarrow[B\hat{A}C=180^\circ-2\alpha]{A\hat{B}D=\hat{D}}180^\circ-2\alpha=2A\hat{B}D$$

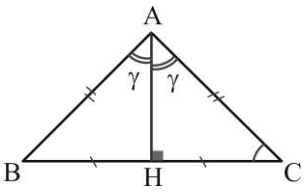
$$\Rightarrow A\hat{B}D=\frac{180^\circ-2\alpha}{2}=90^\circ-\alpha$$

$$\Rightarrow C\hat{B}D=A\hat{B}D+A\hat{B}C=(90^\circ-\alpha)+\alpha=90^\circ$$

یعنی مثلث BCD در رأس B قائم‌الزاویه است.

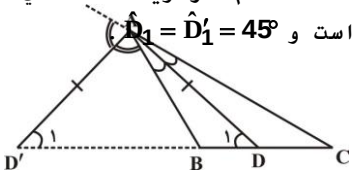
20- گزینه‌ی «4»

در مثلث متساوی‌الساقین، ارتفاع، میانه و نیمساز وارد بر قاعده بر هم منطبقند، پس ارتفاع وارد بر قاعده، نیمساز زاویه‌ی روبرو به قاعده نیز هست.



21- گزینه‌ی «3»

می‌دانیم که نیمسازهای خارجی و داخلی هر زاویه بر هم عمودند یعنی $D\hat{A}D'=90^\circ$ و چون طبق فرض $AD'=AD$ است، در نتیجه مثلث ADD'، قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین است و $\hat{D}_1=\hat{D}'_1=45^\circ$



$$\begin{cases}\overset{\Delta}{ADC}: \text{زاویه‌ی خارجی } \hat{D}_1=\frac{\hat{A}}{2}+\hat{C}\\ \overset{\Delta}{ABD}: \frac{\hat{A}}{2}+\hat{B}+\hat{D}_1=180^\circ\end{cases}$$

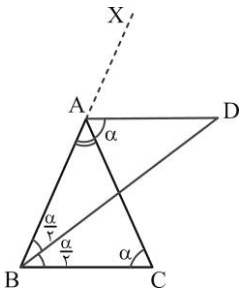
$$\xrightarrow{\hat{D}_1=45^\circ}\begin{cases}\hat{C}=45^\circ-\frac{\hat{A}}{2}\\ \hat{B}=135^\circ-\frac{\hat{A}}{2}\end{cases}$$

با کم کردن طرفین دو رابطه‌ي به‌دست آمده داریم:

$$\hat{B}-\hat{C}=(135^\circ-\frac{\hat{A}}{2})-(45^\circ-\frac{\hat{A}}{2})$$

$$=135^\circ-\frac{\hat{A}}{2}-45^\circ+\frac{\hat{A}}{2}=90^\circ=\frac{\pi}{2}$$

22- گزینه‌ی «1»



راه اول: مطابق شکل، نیمساز خارجی زاویه‌ي A و نیمساز داخلی زاویه‌ي B در نقطه‌ي D متقاطعند. با فرض $\hat{B}=\hat{C}=\alpha$، داریم:

$\overset{\Delta}{ABC}$ متساوی‌الساقین است، پس داریم:

$$B\hat{A}C=180^\circ-2\alpha\qquad(1)$$

$$C\hat{A}X=\hat{B}+\hat{C}\xrightarrow{\hat{B}=\hat{C}=\alpha}C\hat{A}X=2\alpha$$: زاویه‌ي خارجی

و از آنجا که AD نیمساز زاویه‌ي $C\hat{A}X$ است، پس:

$$C\hat{A}D=\frac{C\hat{A}X}{2}=\frac{2\alpha}{2}=\alpha\qquad(2)$$

می‌توان نوشت:

$$B\hat{A}D=B\hat{A}C+C\hat{A}D=(180^\circ-2\alpha)+(\alpha)=180^\circ-\alpha$$

در مثلث ABD، مجموع زاویه‌هاي داخلی، 180 درجه است، پس:

$$B\hat{A}D+A\hat{B}D+A\hat{D}B=180^\circ$$

$$\Rightarrow(180^\circ-\alpha)+\frac{\alpha}{2}+A\hat{D}B=180^\circ\Rightarrow A\hat{D}B=\frac{\alpha}{2}$$

$\overset{\Delta}{ABD}$ متساوی الساقین است.

$$\Rightarrow A\hat{D}B=A\hat{B}D\Rightarrow$$

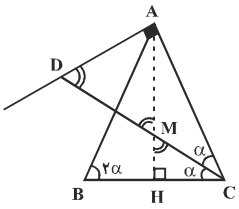
$$\Rightarrow AD=AB\xrightarrow{AB=AC}AD=AC$$

راه دوم: پس از آنکه نشان دادیم $C\hat{A}D=\alpha$، از آنجا که $C\hat{A}D=A\hat{C}B=\alpha$، طبق عکس قضیه‌ي خطوط موازي و مورب، می‌توان گفت

که $AD \parallel BC$ و از آنجا که خط مورب BD این دو خط موازي را قطع كرده، پس $A\hat{D}B = D\hat{B}C = \frac{\alpha}{2}$، پس $A\hat{D}B = A\hat{B}D$ و مثلث ABD متساوي‌الساقين است، بنابراين $AD = AB = AC$.

نكته در هر مثلث متساوی‌الساقين، نيمساز خارجی زاويه‌ی روبه‌رو به قاعده، با قاعده موازی است.

23- گزينه‌ی «1»



نيمساز زاويه‌ی داخلی A را رسم می‌كنيم. نقطه‌ی برخورد آن با نيمساز داخلی زاويه‌ی C، همان M است. با توجه به مفروضات مسأله، شكل مقابل را رسم می‌كنيم. حال با در نظر گرفتن $\hat{B} = \hat{C} = ۲\alpha$، داريم:

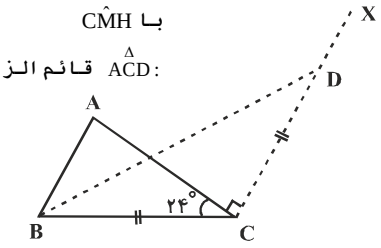
$$\overset{\Delta}{MCH} \text{ قائم‌الزاويه} \Rightarrow C\hat{M}H = ۹۰^{o} - \alpha$$

$$\left.\begin{aligned} A\hat{M}D &= ۹۰^{o} - \alpha \\ A\hat{D}C &= ۹۰^{o} - \alpha \end{aligned}\right\} A\hat{M}D = A\hat{D}C$$

$$\Rightarrow \overset{\Delta}{ADM} \text{ متساوی‌الساقين} \Rightarrow AD = AM$$

24- گزينه‌ی «1»

ابتدا شكلی از مسأله ترسيم می‌كنيم، با توجه به شكل می‌توان گفت:



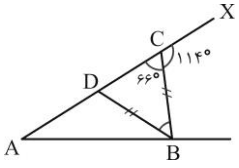
متقابل به رأس $C\hat{M}H$ با $\overset{\Delta}{ACD}$: قائم‌الزاويه

$$\overset{\Delta}{CBD} \text{ متساوی‌الساقين} \Rightarrow D\hat{B}C = B\hat{D}C = \frac{۱۸۰^{o} - B\hat{C}D}{۲}$$

$$= \frac{۱۸۰^{o} - (۹۰^{o} + ۲۴^{o})}{۲} = ۳۳^{o}$$

25- گزينه‌ی «3»

مطابق شكل، داريم:



$$B\hat{C}D = 180^{\circ} - B\hat{C}X$$

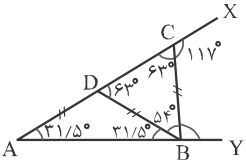
$$= 180^{\circ} - 114^{\circ} = 66^{\circ}$$

از آنجا كه $BD = BC$، پس مثلث BCD متساوي‌الساقين است، بنابراين:

$$C\hat{B}D = 180^{\circ} - 2B\hat{C}D = 180^{\circ} - 132^{\circ} = 48^{\circ}$$

26- گزينه‌ی «2»

مطابق شكل، داريم:



$$B\hat{C}D = 180^{\circ} - 117^{\circ} = 63^{\circ}$$

و چون مثلث BCD متساوي‌الساقين است، پس:

$$\begin{cases} B\hat{D}C = 63^{\circ} \quad (*) \\ C\hat{B}D = 180^{\circ} - 2B\hat{D}C = 180^{\circ} - 2\times 63^{\circ} = 54^{\circ} \quad (**) \end{cases}$$

زاويه‌ي $B\hat{D}C$، براي مثلث متساوي‌الساقين DAB، يك زاويه‌ي خارجي است، پس:

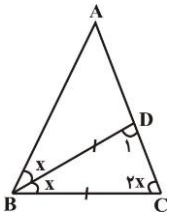
$$B\hat{D}C = D\hat{B}A + D\hat{A}B \xrightarrow[(*)]{D\hat{B}A = D\hat{A}B} 63^{\circ} = 2D\hat{B}A$$

$$\Rightarrow D\hat{B}A = 31/5^{\circ}$$

زاويه‌ي CBY براي مثلث ABC يك زاويه‌ي خارجي است، پس:

$$C\hat{B}Y = A\hat{C}B + D\hat{A}B = 63^{\circ} + 31/5^{\circ} = 94/5^{\circ}$$

27- گزينه‌ی «2»



چون BD نيمساز زاويه‌ي B است مي‌توان گفت كه زاويه‌ي B را به دو قسمت مساوي به اندازه‌ي x تقسيم كرده است.

$$\overset{\Delta}{ABC} : AB = AC \Rightarrow \hat{B} = \hat{C} = 2x$$

$$\overset{\Delta}{BDC} : BD = BC \Rightarrow \hat{D}_1 = \hat{C} = 2x$$

در مثلث BDC مجموع زاويه‌هاي داخلي 180° است، در نتيجه داريم:

$$C\hat{B}D + \hat{D}_1 + \hat{C} = 180^{\circ} \Rightarrow x + 2x + 2x = 180^{\circ} \Rightarrow$$

$$5x = 180^{\circ} \Rightarrow x = 36^{\circ} \Rightarrow \hat{B} = \hat{C} = 2x = 72^{\circ}$$

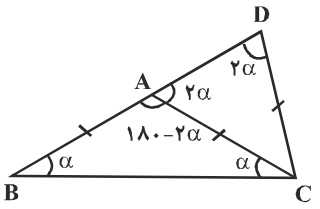
پس زاويه‌ي A برابر است با:

$$\hat{A} = 180^{\circ} - (\hat{B} + \hat{C}) = 180^{\circ} - (72^{\circ} + 72^{\circ}) = 36^{\circ} = \frac{\pi}{5}$$

28- گزينه‌ی «3»

با در نظر گرفتن $A\hat{B}C = \alpha$، داريم $A\hat{C}B = \alpha$ و از آنجا كه $D\hat{A}C$ زاويه‌ی خارجی مثلث ABC، داريم $D\hat{A}C = ۲\alpha$ و به دليل متساوی الساقين بودن مثلث CAD، داريم $C\hat{D}B = ۲\alpha$.

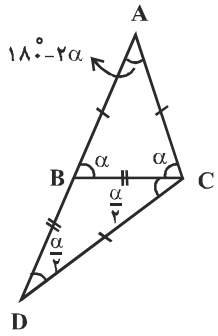
از طرفی طبق فرض سؤال ساق BA از نقطه‌ی B به اندازه‌ی قاعده‌ی BC تا نقطه‌ای D، امتداد داده شده است، پس $BD = BC$ و مثلث BCD متساوی‌الساقين است، يعنی: $B\hat{C}D = C\hat{D}B$، مجموع زاويه‌های داخلی مثلث BCD، برابر ۱۸۰^{o} است، پس:



$\alpha+2\alpha+2\alpha=180^\circ \Rightarrow \alpha=36^\circ$

$\Rightarrow \hat{A}=180^\circ-2\alpha=108^\circ$

29- گزینه‌ی «4»



با توجه به گزینه‌ها، مثلث ABC را طوری در نظر می‌گیریم که زاویه‌ی A حاده باشد. با در نظر گرفتن $A\hat{B}C=A\hat{C}B=\alpha$، در مثلث متساوی‌الساقین ABC، داریم: $\hat{A}=180^\circ-2\alpha$ و از آن‌جا که زاویه‌ی $A\hat{B}C$ برای مثلث متساوی‌الساقین BCD زاویه‌ی خارجی است، پس

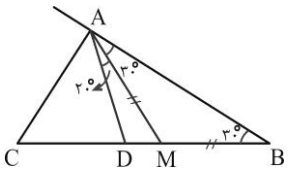
$$B\hat{D}C=B\hat{C}D=\frac{\alpha}{2}.$$

با توجه به شکل در مثلث متساوی‌الساقین ACD، داریم:

$$\hat{A}=\hat{D}\Rightarrow 180^\circ-2\alpha=\frac{\alpha}{2}\Rightarrow \alpha=72^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{A}=\hat{D}=\frac{\alpha}{2}=36^\circ$$

30- گزینه‌ی «3»



طبق فرض $AM=MB$، پس مثلث MAB متساوی‌الساقین است، بنابراین:

$M\hat{A}B=\hat{B}=30^\circ$

طبق فرض: $D\hat{A}M=20^\circ$

$\Rightarrow D\hat{A}B=D\hat{A}M+M\hat{A}B=20^\circ+30^\circ=50^\circ$

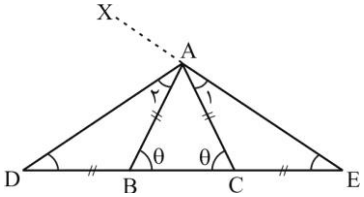
طبق فرض، AD نیمساز زاویه‌ی A است، پس

$\hat{A}=2D\hat{A}B=2\times 50^\circ=100^\circ$

از طرفی، مجموع زاویه‌های داخلی مثلث ABC، 180 درجه است، پس:

$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180^\circ \Rightarrow 100^\circ+30^\circ+\hat{C}=180^\circ \Rightarrow \hat{C}=50^\circ$

31- گزینه‌ی «3»



راه‌اول: مطابق شکل، در مثلث متساوی‌الساقین ABC، زوایای مجاور قاعده را θ را نظر می‌گیریم،

در این‌صورت $BAC=180^\circ-2\theta$ و از آن‌جا که زاویه‌ی BCA برای مثلث متساوی‌الساقین ACE زاویه‌ی خارجی است، می‌توان گفت:

$$BCA=A_1+E\Rightarrow A_1=E=\frac{\theta}{2}$$

در مثلث ADE، کوچک‌ترین زاویه‌ی داخلی $\hat{D}=\hat{E}=\frac{\theta}{2}$ است و کوچک‌ترین زاویه‌ی خارجی (DAX)، متناظر بزرگ‌ترین زاویه‌ی داخلی است:

$$DAX=180^\circ-DAE=180^\circ-\left(\frac{\theta}{2}+180-2\theta+\frac{\theta}{2}\right)=\theta$$

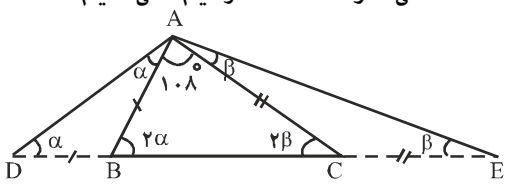
پس عدد مورد نظر سؤال، برابر است با: $\frac{\theta}{\frac{\theta}{2}}=2$.

راه‌دوم: با توجه به شکل $\overset{\Delta}{ABD}\cong\overset{\Delta}{ACE}$، پس $D=E=\alpha$، از طرفی $DAX=D+E\Rightarrow DAX=2\alpha$: زاویه‌ی خارجی

پس عدد مورد نظر سؤال برابر است با $\frac{2\alpha}{\alpha}=2$.

32- گزینه‌ی «3»

ابتدا شکلی از مسأله ترسیم می‌کنیم:



کوچک‌ترین زاویه‌ی خارجی، متناظر به بزرگ‌ترین زاویه‌ی داخلی است، پس باید زاویه‌ی خارجی متناظر زاویه $D\hat{A}E$ را به دست آوریم، مطابق شکل داریم:

$$D\hat{A}E=108+\alpha+\beta \qquad (*)$$

در دو مثلث متساوی‌الساقین ABD و ACE زاویه‌های روبرو به ساق‌ها با هم مساوی هستند، همچنین داریم:

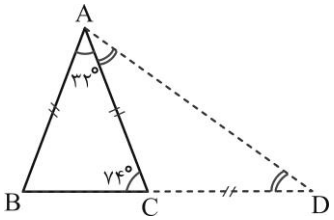
$$\begin{cases} A\hat{B}C=\alpha+\alpha=2\alpha \\ A\hat{C}B=\beta+\beta=2\beta \end{cases} \xrightarrow{\overset{\Delta}{ABC}} 108^\circ+2\alpha+2\beta=180^\circ$$

$$\Rightarrow \alpha+\beta=\frac{180^\circ-108^\circ}{2}=36^\circ$$

$$\xrightarrow{(*)} D\hat{A}E=108^\circ+36^\circ=144^\circ$$

$$\Rightarrow D\hat{A}E \text{ زاویه‌ی خارجی}=180^\circ-D\hat{A}E=180^\circ-144^\circ=36^\circ$$

33- گزینه‌ی «3»



مطابق شکل، در مثلث متساوی‌الساقین

ABC ،
قاعده‌ي BC را به اندازه‌ي ساق مثلث امتداد داده‌ايم تا نقطه‌ي D حاصل شود.
در مثلث متساوي الساقين ABC ، داريم:

$$A\hat{C}B=\frac{180^\circ-\hat{A}}{2}=\frac{180^\circ-32^\circ}{2}=74^\circ$$

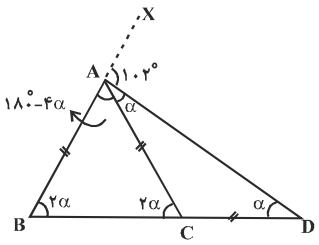
زاويه‌ي ACB ، براي مثلث متساوي الساقين ACD ، يك زاويه‌ي خارجي است، پس:

$$A\hat{C}B=C\hat{A}D+A\hat{D}C$$

$$\xrightarrow[A\hat{C}B=74^\circ]{C\hat{A}D=A\hat{D}C} 74^\circ=2A\hat{D}C\Rightarrow A\hat{D}C=\frac{74^\circ}{2}=37^\circ$$

34- گزينه‌ي «4»

ابتدا شكلي از مسأله ترسيم مي‌كنيم. در شكل رسم شده فرض مي‌كنيم $A\hat{D}B=\alpha$ ، داريم:



ACD متساوي‌الساقين $\Rightarrow C\hat{A}D=A\hat{D}B=\alpha$

زاويه‌ي خارجي $A\hat{C}B=\alpha+\alpha=2\alpha=A\hat{B}C$

$$\Rightarrow B\hat{A}C=180^0-(2\alpha+2\alpha)=180^0-4\alpha$$

مطابق شكل، داريم:

$$D\hat{A}X=102^0\Rightarrow 180^0-(180^0-4\alpha+\alpha)=102^0$$

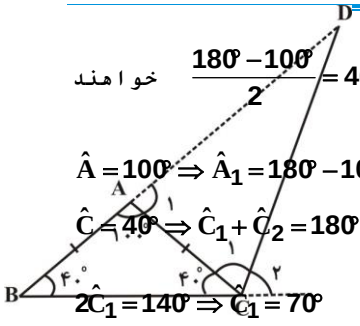
$$\Rightarrow 3\alpha=102^0\Rightarrow\alpha=34^0$$

بنابراين زاويه‌هاي مثلث ABC، عبارتند از:

$$\begin{cases}\hat{A}=180^0-4\times34^0=44^0\\ \hat{B}=\hat{C}=2\times34^0=68^0\end{cases}$$

35- گزينه‌ي «2»

معلوم است كه در يك مثلث متساوي‌الساقين زاويه‌هاي پاي ساق نمي‌توانند 100° باشند زيرا در اين‌صورت مجموع اين دو زاويه به تنهايي از 180° بيشتر مي‌شود كه امكان ندارد. يعني زاويه‌ي رأس اين مثلث متساوي‌الساقين 100° است و زاويه‌هاي پاي ساق هر كدام $\frac{180^\circ-100^\circ}{2}=40^\circ$ خواهند بود.



$$\hat{A}=100^\circ\Rightarrow\hat{A}_1=180^\circ-100^\circ=80^\circ$$

$$\hat{C}=40^\circ\Rightarrow\hat{C}_1+\hat{C}_2=180^\circ-40^\circ=140^\circ\xrightarrow[\hat{C}_1=\hat{C}_2]{\text{نيم‌ساز CD}}$$

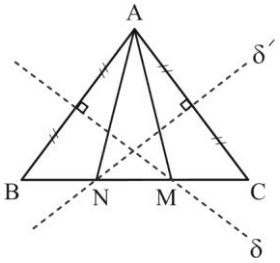
$$2\hat{C}_1=140^\circ\Rightarrow\hat{C}_1=70^\circ$$

پس در مثلث ADC داريم:

$$\hat{A}_1+\hat{C}_1+\hat{D}=180^\circ\Rightarrow 80^\circ+70^\circ+\hat{D}=180^\circ\Rightarrow$$

$$\hat{D}=30^\circ$$

36- گزينه‌ي «2»



$$\hat{A}=۸۰^\circ\ ,\ AB=AC\Rightarrow\hat{B}=\hat{C}=\frac{۱۸۰-\hat{A}}{۲}=۵۰^\circ$$

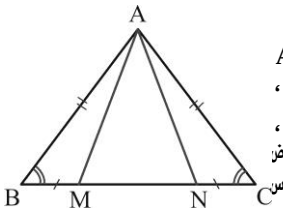
هر نقطه واقع بر عمود منصف يك پاره‌خط، از دو سر آن پاره‌خط به يك فاصله است، پس:

$$\begin{cases}M\in\delta\Rightarrow MA=MB\Rightarrow B\hat{A}M=\hat{B}=۵۰^\circ\Rightarrow A\hat{M}B=۸۰^\circ\\ N\in\delta'\Rightarrow NA=NC\Rightarrow C\hat{A}N=\hat{C}=۵۰^\circ\Rightarrow A\hat{N}C=۸۰^\circ\end{cases}$$

$$\Rightarrow M\hat{A}N=۱۸۰^\circ-(A\hat{M}B+A\hat{N}C)=۲۰^\circ$$

بنابراين، كوچكترين زاويه‌ي مثلث AMN زاويه‌ي $M\hat{A}N=۲۰^\circ$ است.

37- گزينه‌ي «3»

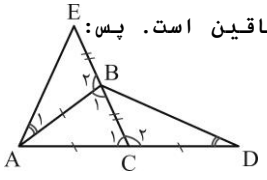


چون مثلث ABC متساوي‌الساقين است، پس $AB=AC$ و $\hat{B}=\hat{C}$ ، طبق فرض سؤال $BM=CN$ ، پس داريم:

$$\begin{cases}AB=AC\\ \hat{B}=\hat{C}\\ BM=CN\end{cases}\xrightarrow{\text{ض‌زض}}\overset{\Delta}{ABM}\cong\overset{\Delta}{ACN}\Rightarrow AM=AN$$

يعني مثلث AMN متساوي‌الساقين است.

38- گزينه‌ي «4»



مثلث ABC ، متساوي‌الساقين است. پس:

$$\hat{B}_1=\hat{C}_1$$

$$\Rightarrow 180^\circ-\hat{B}_1=180^\circ-\hat{C}_1$$

$$\Rightarrow\hat{B}_2=\hat{C}_2$$

$$\begin{cases}AB=CD\\ \hat{B}_2=\hat{C}_2\\ BE=BC\end{cases}\xrightarrow{(\text{ض‌زض})}\overset{\Delta}{ABE}\cong\overset{\Delta}{DCB}\Rightarrow\hat{D}=\hat{A}_1\ (*)$$

همچنین، از متساوی‌الساقین بودن مثلث ABC، نتیجه می‌شود که:

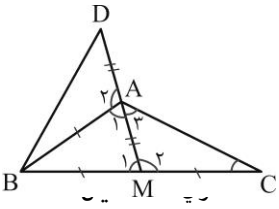
$$\hat{B}_1=\frac{180^\circ-B\hat{A}C}{2}=\frac{180^\circ-52^\circ}{2}=64^\circ$$

از طرفی:

زاویه‌ی خارجی: $\hat{B}_1=\hat{A}_1+\hat{E}\xrightarrow{(*)}\hat{B}_1=\hat{D}+\hat{E}$

$$\xrightarrow{(**)}\hat{D}+\hat{E}=64^\circ$$

39- گزینه‌ی «3»



$\overset{\Delta}{BAM}\Rightarrow\hat{A}_1=\hat{M}_1$

$$\Rightarrow 180^\circ-\hat{A}_1=180^\circ-\hat{M}_1\Rightarrow\hat{A}_2=\hat{M}_2$$

$$\begin{cases}AM=AD\\ \hat{M}_2=\hat{A}_2\\ CM=AB\end{cases}\xrightarrow{\text{ضزض}}\overset{\Delta}{AMC}\cong\overset{\Delta}{DAB}\Rightarrow\hat{A}_3=\hat{D}\quad(*)$$

$$\hat{D}+\hat{C}=61^\circ\xrightarrow{(*)}\hat{A}_3+\hat{C}=61^\circ\quad(**)$$

زاویه‌ی خارجی: $\hat{M}_1=\hat{A}_3+\hat{C}\xrightarrow{(**)}\hat{M}_1=61^\circ$

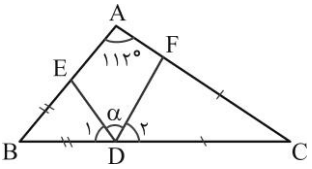
$$\xrightarrow{AB=MB}\hat{A}_1=\hat{M}_1=61^\circ$$

در مثلث ABM، می‌توان نوشت:

$$A\hat{B}C+\hat{A}_1+\hat{M}_1=180^\circ\Rightarrow A\hat{B}C+61^\circ+61^\circ=180^\circ$$

$$\Rightarrow A\hat{B}C=58^\circ$$

40- گزینه‌ی «2»



در مثلث متساوی‌الساقین BDE، داریم:

$$\hat{D}_1=\frac{180^\circ-\hat{B}}{2}\quad(1)$$

در مثلث متساوی‌الساقین CDF، داریم:

$$\hat{D}_2=\frac{180^\circ-\hat{C}}{2}\quad(2)$$

همچنین:

$$\hat{D}_1+\alpha+\hat{D}_2=180^\circ$$

$$\Rightarrow\alpha=180^\circ-(\hat{D}_1+\hat{D}_2)$$

$$\overset{(1),(2)}{=\!=}180^\circ-\left(\frac{180^\circ-\hat{B}}{2}+\frac{180^\circ-\hat{C}}{2}\right)$$

$$=180^\circ-\left(\frac{360^\circ-(\hat{B}+\hat{C})}{2}\right)\quad(*)$$

در مثلث ABC، داریم:

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180^\circ\Rightarrow\hat{B}+\hat{C}=180^\circ-\hat{A}\quad(**)$$

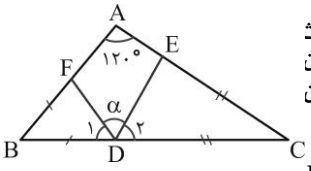
$$\xrightarrow{(*),(**)}\alpha=180^\circ-\left(\frac{360^\circ-(180^\circ-\hat{A})}{2}\right)$$

$$\Rightarrow\alpha=180^\circ-\left(\frac{180^\circ+\hat{A}}{2}\right)=180^\circ-\left(90^\circ+\frac{\hat{A}}{2}\right)$$

$$\Rightarrow\alpha=90^\circ-\frac{\hat{A}}{2}$$

$$\xrightarrow{\hat{A}=112^\circ}\alpha=90^\circ-\frac{112^\circ}{2}=90^\circ-56^\circ=34^\circ$$

41- گزینه‌ی «2»



در مثلث متساوی‌الساقین BDF، می‌توان نوشت:

$$\hat{D}_1=\frac{180^\circ-\hat{B}}{2}\quad(1)$$

در مثلث متساوی‌الساقین CDE، می‌توان نوشت:

$$\hat{D}_2=\frac{180^\circ-\hat{C}}{2}\quad(2)$$

از طرفی:

$$\hat{D}_1+\alpha+\hat{D}_2=180^\circ$$

$$\xrightarrow{(1),(2)}\frac{180^\circ-\hat{B}}{2}+\alpha+\frac{180^\circ-\hat{C}}{2}=180$$

$$\Rightarrow\alpha+\frac{360^\circ-(\hat{B}+\hat{C})}{2}=180^\circ$$

$$\xrightarrow{\hat{B}+\hat{C}=180^\circ-\hat{A}}\alpha+\frac{360^\circ-(180^\circ-\hat{A})}{2}=180^\circ$$

$$\Rightarrow\alpha+\frac{180^\circ+\hat{A}}{2}=180^\circ\Rightarrow\alpha+90^\circ+\frac{\hat{A}}{2}=180^\circ$$

$$\Rightarrow\alpha=90^\circ-\frac{\hat{A}}{2}$$

$$\xrightarrow{\hat{A}=120^\circ}\alpha=90^\circ-\frac{120^\circ}{2}=30^\circ$$

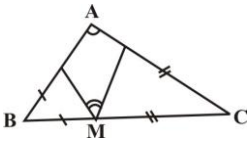
42- گزینه‌ی «1»

در مثلث ABC چون $\hat{B}+\hat{C}=40^\circ$ است، به راحتی معلوم می‌شود که زاویه‌ی A برابر $180^\circ-(\hat{B}+\hat{C})=140^\circ$ است. از طرفی همان‌طور که در متن درس اشاره شد، داریم:

$$F\hat{D}E=90^\circ-\frac{\hat{A}}{2}=90^\circ-\frac{140^\circ}{2}=90^\circ-70^\circ=20^\circ$$

در نتیجه زاویه‌ی $\hat{A}=140^\circ$، هفت برابر زاویه‌ی $F\hat{D}E=20^\circ$ است.

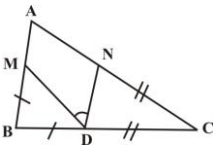
43- گزینه‌ی «1»



همان‌طور که در متن درس اشاره شد، داریم:

$$\hat{A}=۱۰۶^\circ\Rightarrow\hat{M}=۹۰^\circ-\frac{\hat{A}}{۲}=\frac{۱۸۰^\circ-۱۰۶^\circ}{۲}=۳۷^\circ$$

44- گزینه‌ی «3»



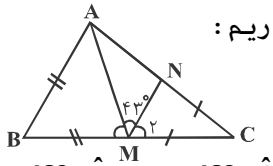
همان‌طور که در متن درس اشاره شد، در مثلث شکل زیر که $BM = BD$ و $CN = CD$، داریم:

$$\hat{MDN} = 90 - \frac{\hat{A}}{2}$$

با توجه به صورت سؤال و نکته‌ی فوق داریم:

$$\hat{MDN} = 90^\circ - \frac{58^\circ}{2} = 90^\circ - 29^\circ = 61^\circ$$

45- گزینه‌ی «2»



با توجه به شکل داریم:

راه‌اول: مطابق شکل، می‌توان نوشت:

$$\hat{M}_1 + 43^\circ + \hat{M}_2 = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \frac{180 - \hat{B}}{2} + 43^\circ + \frac{180 - \hat{C}}{2} = 180$$

$$\Rightarrow 43^\circ - \frac{\hat{B} + \hat{C}}{2} = 180^\circ \Rightarrow 43^\circ - \frac{180^\circ - \hat{A}}{2} = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{A} = B\hat{A}C = 94^\circ$$

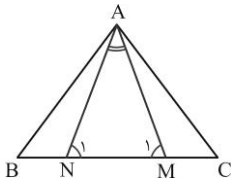
راه‌دوم:

همان‌طور که در متن درس اشاره شد، در شکل بالا چون دو مثلث کناری متساوی‌الساقین هستند، داریم:

$$A\hat{M}N = 90^\circ - \frac{B\hat{A}C}{2}$$

$$\Rightarrow 43^\circ = 90^\circ - \frac{B\hat{A}C}{2} \Rightarrow B\hat{A}C = 94^\circ$$

46- گزینه‌ی «1»



راه اول: چون $BA = BM$، پس مثلث BAM متساوی‌الساقین است، بنابراین:

$$\hat{M}_1 = \frac{180^\circ - \hat{B}}{2}$$

چون $CA = CN$، پس مثلث CAN متساوی‌الساقین است، بنابراین:

$$\hat{N}_1 = \frac{180^\circ - \hat{C}}{2}$$

در مثلث MAN، مجموع زاویه‌های داخلی 180 درجه است، پس:

$$M\hat{A}N + \hat{M}_1 + \hat{N}_1 = 180^\circ$$

$$\Rightarrow M\hat{A}N + \frac{180^\circ - \hat{B}}{2} + \frac{180^\circ - \hat{C}}{2} = 180^\circ$$

$$\Rightarrow M\hat{A}N + \frac{360^\circ - (\hat{B} + \hat{C})}{2} = 180^\circ \quad (*)$$

مجموع زاویه‌های داخلی مثلث ABC، برابر 180° است، پس:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ - \hat{A}$$

$$\xrightarrow{(*)} M\hat{A}N + \frac{360^\circ - (180^\circ - \hat{A})}{2} = 180^\circ$$

$$\Rightarrow M\hat{A}N + \frac{180^\circ + \hat{A}}{2} = 180^\circ \Rightarrow M\hat{A}N + 90^\circ + \frac{\hat{A}}{2} = 180^\circ$$

$$\Rightarrow M\hat{A}N = 90^\circ - \frac{\hat{A}}{2}$$

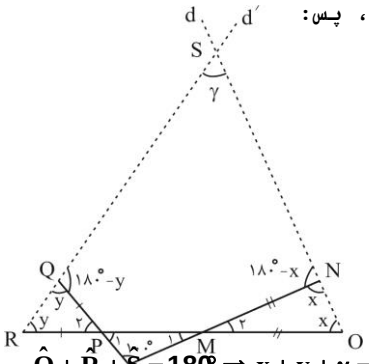
$$\xrightarrow{\hat{A}=72^\circ} M\hat{A}N = 90^\circ - \frac{72^\circ}{2} = 54^\circ$$

راه دوم: همان‌طور که در متن درس داده شد، با توجه به شکل از همان ابتدا می‌توان گفت:

$$M\hat{A}N = ۹۰^\circ - \frac{\hat{A}}{۲} \Rightarrow M\hat{A}N = ۹۰^\circ - \frac{۷۲^\circ}{۲} = ۵۴^\circ$$

47- گزینه‌ی «2»

راه اول: در مثلث ORS، مجموع زاویه‌های داخلی 180° است، پس:



$$\hat{O} + \hat{R} + \hat{S} = 180^\circ \Rightarrow x + y + \gamma = 180^\circ \quad (*)$$

در دو مثلث متساوی‌الساقین $\overset{\Delta}{MNO}$ و $\overset{\Delta}{PQR}$، می‌توانیم بنویسیم:

$$\begin{cases} \hat{M}_1 = \hat{M}_2 = 180^\circ - 2x \\ \hat{P}_1 = \hat{P}_2 = 180^\circ - 2y \end{cases}$$

و همچنین در مثلث $\overset{\Delta}{AMP}$، داریم:

$$\hat{A} + \hat{M}_1 + \hat{P}_1 = 180^\circ$$

$$\Rightarrow 100^\circ + (180^\circ - 2x) + (180^\circ - 2y) = 180^\circ$$

$$\Rightarrow x + y = 140^\circ$$

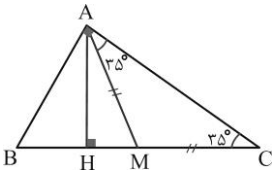
و نهایتاً از رابطه‌ی $(*)$ نتیجه می‌شود:

$$140^\circ + \gamma = 180^\circ \Rightarrow \gamma = 180^\circ - 140^\circ = 40^\circ$$

راه دوم: از همان ابتدا با توجه به نکته‌ی مطرح شده در متن درس می‌توان گفت:

$$\gamma = 90 - \frac{\hat{A}}{2} \xrightarrow{\hat{A}=100^\circ} \gamma = 40^\circ$$

48- گزینه‌ی «2»



مطابق شکل، میانه و ارتفاع وارد بر وتر را به‌ترتیب AM و AH نامیده‌ایم.

در مثلث قائم الزاويه‌ي AHC ، داريم:

$$H\hat{A}C = 90^\circ - \hat{C} = 90^\circ - 35^\circ = 55^\circ \quad (1)$$

همچنين مي‌دانيم كه با رسم ميانه‌ي وارد بر وتر در مثلث قائم الزاويه، دو مثلث متساوي الساقين ايجاد مي‌شود، پس مثلث ACM متساوي الساقين است و داريم:

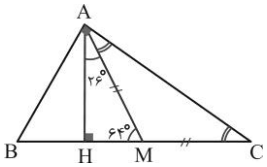
$$MA = MC \Rightarrow M\hat{A}C = \hat{C} = 35^\circ \quad (2)$$

بنابراين:

$$H\hat{A}M = H\hat{A}C - M\hat{A}C$$: زاويه‌ي بين ميانه و ارتفاع وارد بر وتر

$$\xrightarrow{(1),(2)} 55^\circ - 35^\circ = 20^\circ$$

49- گزينه‌ي «3»



مطابق شكل مقابل، در مثلث قائم الزاويه‌ي ABC ، ميانه و ارتفاع وارد بر وتر را به‌ترتيب AM و AH ناميده‌ايم.

همچنين در شكل مقابل، كوچكترين زاويه‌ي مثلث ABC ، زاويه‌ي C در نظر گرفته شده است.

در مثلث قائم الزاويه‌ي AHM ، داريم:

$$A\hat{M}H = 90^\circ - H\hat{A}M = 90^\circ - 26^\circ = 64^\circ \quad (1)$$

مي‌دانيم كه با رسم ميانه‌ي وارد بر وتر در مثلث قائم‌الزاويه، دو مثلث متساوي‌الساقين ايجاد مي‌شود، پس مثلث MAC متساوي الساقين است و در آن:

$$M\hat{A}C = \hat{C} \quad (2)$$

زاويه‌ي AMH ، براي مثلث MAC ، يك زاويه‌ي خارجي است، پس:

$$A\hat{M}H = M\hat{A}C + \hat{C} \xrightarrow{(1),(2)} 64^\circ = 2\hat{C} \Rightarrow \hat{C} = 32^\circ$$

50- گزينه‌ي «2»

طبق فرض، زواياي مثلثي كه آن را ABC مي‌ناميم به نسبت 1، 8 و 9 هستند، پس آن‌ها را به‌صورت $\hat{A} = 9k$ ، $\hat{B} = 8k$ و $\hat{C} = k$ در نظر مي‌گيريم؛ مي‌دانيم كه مجموع زاويه‌هاي داخلي هر مثلث 180° است، پس:

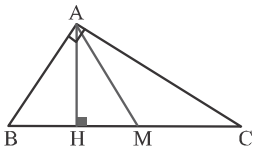
$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow 9k + 8k + k = 180^\circ$$

$$\Rightarrow 10k = 180^\circ \Rightarrow k = 10^\circ$$

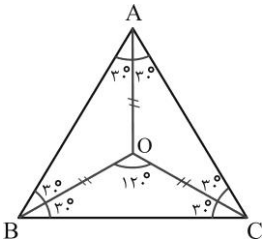
$$\Rightarrow \begin{cases} \hat{A} = 90^\circ \\ \hat{B} = 80^\circ \\ \hat{C} = 10^\circ \end{cases}$$

پس اين مثلث قائم‌الزاويه است و بزرگ‌ترين ضلع آن، ضلع روبه‌رو به بزرگ‌ترين زاويه، يعني وتر مثلث است، همان‌طور كه در متن درس اشاره شد، اگر مثلث ABC در رأس A قائم‌الزاويه باشد، زاويه‌ي بين ارتفاع و ميانه‌ي وارد بر وتر آن، برابر با $|\hat{B} - \hat{C}|$ است، پس در اين سؤال، داريم:

$$\hat{B} = 80^\circ \text{ و } \hat{C} = 10 \Rightarrow |\hat{B} - \hat{C}| = 70^\circ$$



51- گزينه‌ي «4»

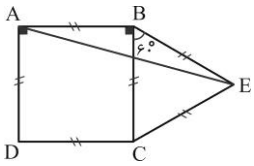


در شكل مقابل، مثلث متساوي‌الاضلاع ABC ، به سه مثلث همنهشت تقسيم شده است. همان‌طور كه مشاهده مي‌شود اين سه مثلث متساوي‌الساقين بوده و زاويه‌ي مجاور ساق‌هاي آن‌ها $\frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$ است.

پس زاويه‌هاي رأس هر يك برابر است با:

$$180^\circ - (30^\circ + 30^\circ) = 120^\circ$$

52- گزينه‌ي «1»



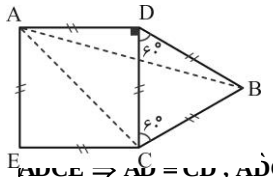
مطابق شكل، از مربع بودن چهارضلعي $ABCD$ و متساوي‌الاضلاع بودن مثلث BEC ، نتيجه مي‌شود كه $AB = BE$ و در نتيجه، مثلث ABE متساوي‌الساقين است، بنابراين داريم:

$$B\hat{A}E = \frac{180^\circ - A\hat{B}E}{2}$$

$$\Rightarrow B\hat{A}E = \frac{180^\circ - (90^\circ + 60^\circ)}{2} = 15^\circ$$

$$\Rightarrow D\hat{A}E = 90^\circ - B\hat{A}E = 90^\circ - 15^\circ = 75^\circ$$

53- گزينه‌ي «2»



$$\begin{cases} ABCE \Rightarrow AB = CD \,,\, A\hat{D}C = 90^\circ \\ \text{مربع است} \end{cases}$$

$$\overset{\Delta}{BCD} \Rightarrow CD = BD \,,\, B\hat{D}C = 60^\circ$$ متساوي‌الاضلاع است

$$\Rightarrow \begin{cases} AD = BD \Rightarrow \overset{\Delta}{DAB} \text{ متساوي‌الساقين} \\ A\hat{D}B = 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ \end{cases}$$

$$\Rightarrow D\hat{A}B = \frac{180^\circ - A\hat{D}B}{2} = \frac{180^\circ - 150^\circ}{2} = 15^\circ = D\hat{B}A$$

$$\Rightarrow A\hat{B}C = 60^\circ - D\hat{B}A = 45^\circ$$

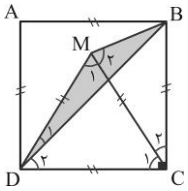
AC قطر مربع است. $\Rightarrow D\hat{A}C = D\hat{C}A = 45^\circ$

$$\Rightarrow \begin{cases} B\hat{A}C = D\hat{A}C - D\hat{A}B = 45^\circ - 15^\circ = 30^\circ \\ A\hat{C}B = D\hat{C}A + D\hat{C}B = 45^\circ + 60^\circ = 105^\circ \end{cases}$$

پس زوایای مثلث ABC عبارتند از $A\hat{C}B = 105^\circ$ ، $B\hat{A}C = 30^\circ$ و $A\hat{B}C = 45^\circ$ در نتیجه نسبت بزرگترین زاویه به کوچکترین زاویه در آن برابر است با:

$$\frac{105^\circ}{30^\circ} = \frac{7}{2}$$

-54 گزینه‌ی «4»



مطابق شکل مقابل، مثلث MBD ، مثلث مورد نظر است.

ΔMCD متساوی‌الاضلاع است، پس:

$$\Rightarrow \begin{cases} \hat{D}_1 + \hat{D}_2 = 60^\circ \quad (1) \\ \hat{M}_1 = 60^\circ \quad (2) \\ \hat{C}_1 = 60^\circ \Rightarrow \hat{C}_2 = 90 - \hat{C}_1 = 30^\circ \quad (3) \end{cases}$$

ΔBCD قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین است.

$$BC = CD \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \hat{D}_2 = 45^\circ \quad (4)$$

ΔBCM متساوی‌الساقین است. $CB = CM \Rightarrow$

$$\Rightarrow \hat{M}_2 = \frac{180^\circ - \hat{C}_2}{2} \overset{(3)}{=\!=} \frac{180^\circ - 30^\circ}{2} = 75^\circ \quad (5)$$

$$\begin{cases} (2),(5) \Rightarrow B\hat{M}D = \hat{M}_1 + \hat{M}_2 = 60^\circ + 75^\circ = 135^\circ \\ (1),(4) \Rightarrow \hat{D}_1 + 45^\circ = 60^\circ \Rightarrow \hat{D}_1 = B\hat{D}M = 15^\circ \end{cases}$$

در مثلث MBD ، مجموع زاویه‌های داخلی 180 درجه است، پس:

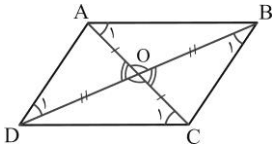
$$M\hat{B}D = 180^\circ - (B\hat{M}D + B\hat{D}M)$$

$$= 180^\circ - (135^\circ + 15^\circ) = 30^\circ$$

بنابراین، بزرگترین زاویه‌ی مثلث MBD ، زاویه‌ی $B\hat{M}D = 135^\circ$ و کوچکترین زاویه‌ی آن $B\hat{D}M = 15^\circ$ است، پس زاویه‌ی بزرگتر برابر زاویه‌ی کوچکتر است.

$$\frac{135^\circ}{15^\circ} = 9$$

-55 گزینه‌ی «1»

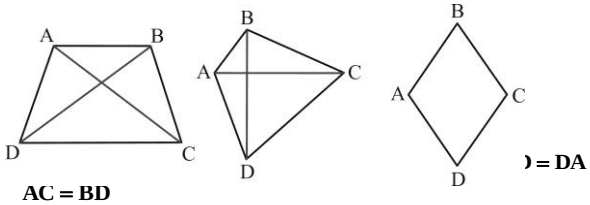


فرض کنید که در چهارضلعی $ABCD$ ، قطرها همدیگر را نصف کرده‌اند.

مثلثهای (OAB , OCD) و (OAD , OCB) بنا به حالت (ض‌زض) با هم مساویند.

پس $\hat{A}_1 = \hat{C}_1$ و $\hat{B}_1 = \hat{D}_1$. بنابراین از عکس قضیه‌ی خطوط موازی و مورب نتیجه می‌شود که $AB \parallel CD$ و $BC \parallel AD$ و چهارضلعی $ABCD$ متوازی‌الاضلاع است.

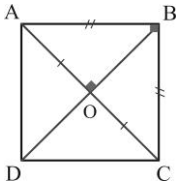
برای رد گزینه‌های دیگر، شکلهای زیر را در نظر بگیرید:



$AC = BD$

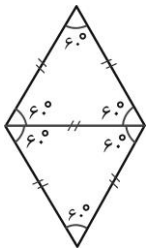
گزینه‌ی (4) گزینه‌ی (3) گزینه‌ی (2)) = DA

-56 گزینه‌ی «2»



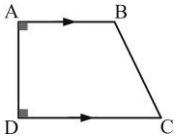
می‌دانیم که در مستطیل قطرها یکدیگر را نصف می‌کنند. حال فرض کنید که در مستطیل $ABCD$ ، مطابق شکل قطرها بر هم عمود نیز هستند. چون $OA = OC$ ، پس می‌توان نتیجه گرفت که در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC ، ارتفاع و میانه‌ی وارد بر وتر بر هم منطبقند. پس این مثلث متساوی‌الساقین نیز هست، بنابراین $AB = BC$ ، یعنی در مستطیل $ABCD$ ، دو ضلع مجاور با هم برابرند و مستطیلی که دو ضلع مجاور آن با هم برابر باشند، مربع است.

بررسی گزینه‌های دیگر:



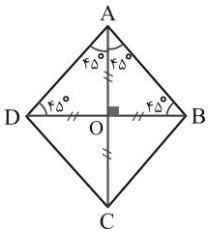
گزینه‌ی 1 : اگر دو مثلث متساوی‌الاضلاع مساوی را از یک ضلع به هم بچسبانیم، لوزی‌ای حاصل می‌شود که یک قطرش با ضلع آن برابر است، با توجه به شکل مقابل، مسلماً این لوزی، مربع نیست، چون زاویه‌های آن 60 و 120 درجه هستند.

گزینه‌ی 3 : متوازی‌الاضلاعی که دو قطرش مساوی باشند، مستطیل است و لزوماً مربع نیست.



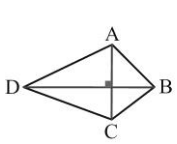
گزینه‌ی 4 : شکل مقابل را در نظر بگیرید:

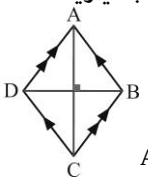
-57 گزینه‌ی «1»



می‌دانیم که در لوزی، قطرها بر هم عمودند و همدیگر را نصف می‌کنند؛ حال فرض کنید که در شکل مقابل طول قطرهای لوزی $ABCD$ با هم برابر است. که در این صورت با رسم قطرها، چهار مثلث قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین ایجاد می‌شود که نتیجه می‌شود هر زاویه‌ی لوزی (مثل زاویه‌ی A در شکل بالا)، برابر است با $45^\circ + 45^\circ = 90^\circ$ ؛ بنابراین همه‌ی زاویه‌های لوزی $ABCD$ ، زاویه‌های قائمه هستند، پس لوزی $ABCD$ ، یک مربع است.

براي رد گزينه‌هاي ديگر، شكل‌هاي زير را در نظر بگيريد:



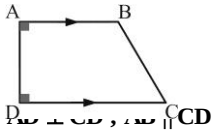


$AC \perp BD$

$AC \perp BD$

گزينه‌ي (3)

گزينه‌ي (2)

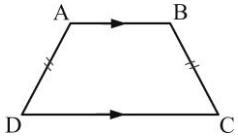


$AB \parallel CD$

گزينه‌ي (4)

توجه كنيد كه گزينه‌ي 3، زماني درست بود كه به اين صورت بيان مي‌شد:
«هر متوازي‌الاضلاعي كه اقطارش بر هم عمود باشند لوزي است.»

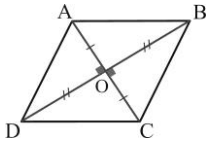
58- گزينه‌ي «1»



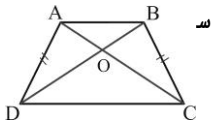
گزينه‌ي 1 : بعنوان مثال در شكل مقابل $AB \parallel CD$ و $AD = BC$ امّا چهارضلعي $ABCD$ متوازي‌الاضلاع نيست.

ساير گزينه‌ها، نتايج تعريف متوازي‌الاضلاع هستند.

59- گزينه‌ي «4»



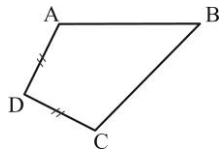
گزينه‌ي 1 : فرض كنيد كه مطابق شكل مقابل، قطرهاي متوازي‌الاضلاع $ABCD$ بر هم عمودند، از آنجا كه در متوازي‌الاضلاع قطرها يكديگر را نصف مي‌كنند، در حالتي كه قطرها بر هم عمودند، با رسم قطرها چهار مثلث قائم‌الزاويه كه طبق حالت (ض‌زض) با هم مساويند ايجاد مي‌شود، از مساوي بودن اين مثلث‌ها نتيجه مي‌شود كه $AB = BC = CD = DA$ و در نتيجه متوازي‌الاضلاع $ABCD$ لوزي است.



گزينه‌ي 2 : با توجه به شكل مقابل مي‌توان ثابت كرد كه اگر $AC = BD$، آنگاه $\triangle ABD \cong \triangle BAC$ و در نتيجه $AD = BC$.

گزينه‌ي 3 : مستطيلي كه قطرهاي آن بر هم عمودند، مربع است.

گزينه‌ي 4 : بعنوان مثال نقض، شكل مقابل را در نظر بگيريد.



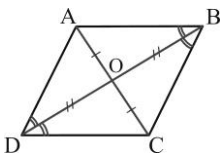
60- گزينه‌ي «3»

گزينه‌ي 1 : متوازي‌الاضلاعي كه اضلاعش با هم مساوي باشند، لوزي ناميده مي‌شود.

گزينه‌ي 2 : متوازي‌الاضلاعي كه قطرهايش بر هم عمودند، لوزي است.

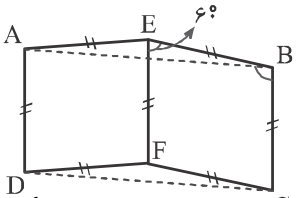
گزينه‌ي 3 : در هر متوازي‌الاضلاع، قطرها همديگر را نصف مي‌كنند (منصف همديگر هستند) و اين ويژگي به لوزي بودن متوازي‌الاضلاع بستگي ندارد.

گزينه‌ي 4 : در شكل مقابل، فرض كنيد كه قطرهاي متوازي‌الاضلاع $ABCD$، نيمساز زاويه‌هاي آن نيز هستند. اولاً توجه كنيد كه دو مثلث ABC و CDA با هم مساويند؛



ثانياً در اين دو مثلث، نيمساز زاويه‌ها، ميانه‌ي وارد بر ضلع روبرو به خود نيز هستند، بنابراين در اين دو مثلث ميانه و نيمساز نظير ضلع AC بر هم منطبقند، پس اين دو مثلث متساوي‌الساقين هستند و در نتيجه $\begin{cases} BA = BC \\ AD = DC \end{cases}$ و از مساوي بودن اين دو مثلث، نتيجه مي‌شود كه $AB = BC = AD = DC$.

61- گزينه‌ي «2»



$AEFD$ مربع است $\Rightarrow AE = EF$

$BCFE$ لوزي است $\Rightarrow BE = EF$

$\Rightarrow AE = BE \Rightarrow$ $\triangle EAB$ متساوي‌الساقين است.

$A\hat{E}B = 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ$

از متساوي‌الساقين بودن مثلث EAB، نتيجه مي‌شود كه:

$$E\hat{B}A = \frac{180^\circ - A\hat{E}B}{2} = \frac{180^\circ - 150^\circ}{2} = 15^\circ$$

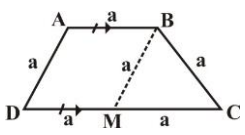
از طرفي چون زاويه‌ي حاده‌ي لوزي برابر 60° است، پس زاويه‌ي منفرجه‌ي آن $180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ است.

مي‌توانيم بنويسيم:

بزرگترين زاويه‌ي متوازي‌الاضلاع $ABCD$: $A\hat{B}C = E\hat{B}C - E\hat{B}A$

$= 120^\circ - 15^\circ = 105^\circ$

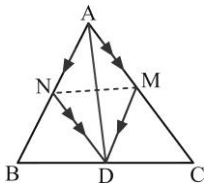
62- گزينه‌ي «3»



وسط قاعده‌ي بزرگ DC را M مي‌ناميم. از M به B وصل مي‌كنيم. در چهار ضلعي $ABMD$، ضلع AB و DM با هم موازي‌اند و هم مساوي‌اند.

در نتیجه این چهار ضلعی متوازی‌الاضلاع است و بنابراین دو ضلع مقابل AD و BM نیز برابرند. در نتیجه اضلاع مثلث BMC همگی برابر می‌باشند یعنی این مثلث متساوی‌الاضلاع و همه زاویه‌هایش از جمله زاویه‌ی C برابر 60° است.

63- گزینه‌ی «4»



مطابق شکل، نقطه‌ی D پای نیم ساز زاویه‌ی A روی ضلع BC است و طبق فرض سؤال $MD \parallel AB$ و $ND \parallel AC$، پس چهارضلعی AMDN متوازی‌الاضلاع است و در این متوازی‌الاضلاع قطر AD، نیمساز زاویه‌ی A است، از آن جا که لوزی متوازی‌الاضلاعی است که قطرهای آن نیمساز زوایای آن هستند، می‌توان نتیجه گرفت که AMDN لوزی است؛ MN و AD قطرهای این لوزی هستند و می‌دانیم که در لوزی قطرها همدیگر را نصف کرده و بر هم عمودند.

64- گزینه‌ی «4»

هر چهار گزینه را بررسی می‌کنیم:

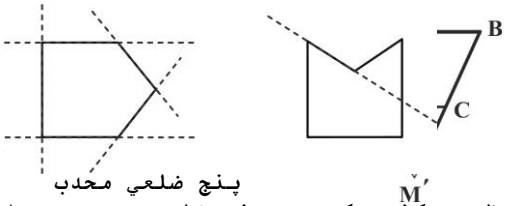
گزینه‌ی 1 : تعریف ناحیه‌ی محدب در این گزینه آورده شده است.

گزینه‌ی 2 : از تعریف ناحیه‌ی محدب، می‌توان نتیجه گرفت که یک چندضلعی، زمانی محدب است که همه‌ی زاویه‌های داخلی آن کمتر از نیم‌صفحه (180 درجه) باشند، دو شکل زیر را در نظر بگیرید:

پنج ضلعی نامحدب　　پنج ضلعی محدب

گزینه‌ی 3 : از تعریف چندضلعی محدب می‌توان این ویژگی را نتیجه گرفت.

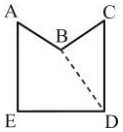
دو شکل زیر را در نظر بگیرید:



پنج ضلعی محدب

ملاحظه می‌کنید که در پنج ضلعی محدب، با رسم هر پنج خطی که یکی از اضلاع بر آن منطبق است، سایر رأس‌ها در یک طرف خط رسم شده قرار می‌گیرند، ولی پنج ضلعی نامحدب این ویژگی را ندارد.

گزینه‌ی 4 : برای نشان دادن اینکه گزینه‌ی 4 جواب این سؤال است، شکل روبرو را در نظر بگیرید:

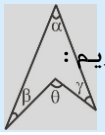


با رسم قطر BD در پنج ضلعی نامحدب ABCDE، مثلث BCD و چهارضلعی ABDE ایجاد شده است که ناحیه‌ی درون هر دوی آنها محدب است، در حالی که پنج ضلعی اولیه نامحدب بود، پس با شرایط گزینه‌ی 4 ممکن است که ناحیه‌ی محدود به چندضلعی محدب نباشد، همانطور که در شکل بالا اینگونه است.

آزمون فصل اول

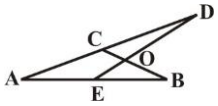
1- گزینه‌ی «1»

نکته در شکل مقابل داریم:



$$\theta = \alpha + \beta + \gamma$$

با توجه به نکته‌ی گفته شده در این سؤال می‌توان نوشت:



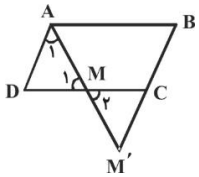
$$B\hat{O}D = B\hat{A}D + \hat{B} + \hat{D}$$

$$\Rightarrow 22^0 = 18^0 + \hat{B} + \hat{D} \Rightarrow \hat{B} + \hat{D} = 4^0$$

2- گزینه‌ی «4»

از تساوی $\hat{OBA} = \hat{OEF}$ می‌توان نتیجه گرفت که $\hat{OBC} = \hat{OED}$. بنابراین در گزینه‌ی «1»، دو مثلث به حالت دو زاویه و ضلع بین با یکدیگر همنهشت هستند. همچنین در گزینه‌ی «2»، تساوی $\hat{COB} = \hat{EOD}$، منجر به تساوی $\hat{OCB} = \hat{ODE}$ می‌شود که همان گزینه‌ی «1» است. در گزینه‌ی «3» یعنی حالتی که $OB = OE$، دو مثلث به حالت دو ضلع و زاویه‌ی بین، همنهشت هستند.

3- گزینه‌ی «1»



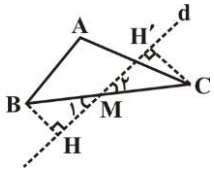
$$\left.\begin{matrix} AM = MM' \\ DM = MC \\ \hat{M}_1 = \hat{M}_2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{AMD} \cong \overset{\Delta}{M'MC}$$

$$\Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{M}' \Rightarrow AD \parallel CM'$$

$$\left.\begin{matrix} AD \parallel BC \\ AD \parallel CM' \end{matrix}\right\}$$

$\Rightarrow$ B، C و M′ روی یک امتداد قرار دارند

4- گزینه‌ی «1»

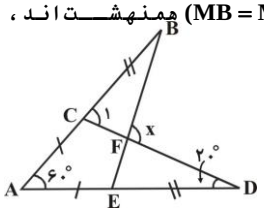


نکته: هر خطی که از وسط یک پاره خط بگذرد، از دو سر آن پاره‌خط به یک فاصله است.

برای اثبات نکته‌ی بالا، فرض کنید خط d را به دلخواه از نقطه‌ی M وسط BC می‌گذرانیم، BH و CH' فاصله‌های دو رأس B و C از خط d هستند. دو مثلث قائم‌الزاویه‌ی MBH و MCH' به حالت تساوی زاویه‌های متناظر $\hat{M}_1$ و $\hat{M}_2$ و تساوی وترها $(MB = MC)$ همنهشت‌اند، بنابراین $BH = CH'$.

-5 گزینه‌ی «1»

ابتدا نشان می‌دهیم که مثلث‌های ABE و ACD همنهشت‌اند:



$$\left.\begin{matrix} AE = AC \\ \hat{A} = \hat{A} \\ AB = AD \end{matrix}\right\} \longrightarrow \overset{\Delta}{ABE} \cong \overset{\Delta}{ACD} \Rightarrow \hat{B} = \hat{D} \quad (*)$$

حال طبق نکته‌ی سؤال «1» آزمون فصل اول، داریم:

$$x = \hat{A} + \hat{B} + \hat{D} \Rightarrow x = 60^0 + 2\times 20^0 = 100^0$$

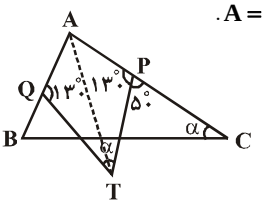
-6 گزینه‌ی «1»

چون $\hat{TPC} = 50^0$ پس $\hat{APT} = 130^0$ و چون دو مثلث APT و AQT به حالت تساوی سه ضلع هم‌نهشت هستند، پس

$$\hat{AQT} = 130^0.$$

در چهارضلعی AQTP مجموع زوایای داخلی 360^0 است، پس

$$\hat{A} = 360^0 - (260^0 + \alpha) = 100^0 - \alpha.$$

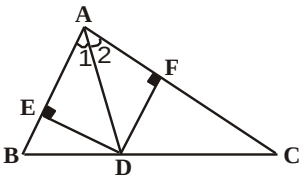


از طرفی:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^0 \Rightarrow (100^0 - \alpha) + \hat{B} + \alpha = 180^0$$

$$\Rightarrow \hat{B} = 80^0$$

-7 گزینه‌ی «3»

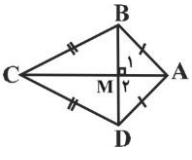


$$\begin{cases} \hat{A}_1 = \hat{A}_2 & \text{وتر و یک زاویه‌ی حاده} \\ AD = AD \end{cases} \longrightarrow$$

$$\overset{\Delta}{ADE} \cong \overset{\Delta}{ADF} \Rightarrow AE = AF$$

-8 گزینه‌ی «4»

با توجه به مفروضات سؤال، دو مثلث ABC و ACD طبق حالت تساوی سه ضلع با هم مساویند و بنابراین دو مثلث ABM و AMD طبق حالت تساوی دو ضلع و زاویه‌ی بین با هم مساویند، پس:

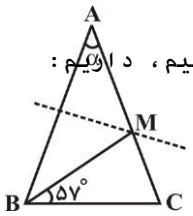


$$\begin{cases} \hat{M}_1 = \hat{M}_2 \xrightarrow{\hat{M}_1 + \hat{M}_2 = 180^0} \hat{M}_1 = \hat{M}_2 = 90^0 \\ BM = MD \end{cases}$$

یعنی قطر AC عمود منصف قطر BD است، بنابراین، بی‌شمار نقطه روی خط AC وجود دارند که از B و D به یک فاصله‌اند.

-9 گزینه‌ی «2»

اگر اندازه‌ی $\hat{A}$ را α فرض کنیم، داریم:



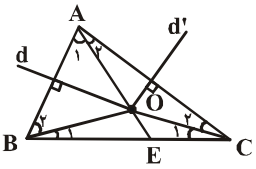
$$\hat{B} = \hat{C} = 90^0 - \frac{\alpha}{2}$$

$$MA = MB \Rightarrow A\hat{B}M = \hat{A} = \alpha$$

$$\hat{B} = M\hat{B}C + A\hat{B}M \Rightarrow 90^0 - \frac{\alpha}{2} = 57^0 + \alpha$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2}\alpha = 33^0 \Rightarrow \alpha = 22^0$$

-10 گزینه‌ی «4»



هر نقطه روی عمودمنصف یک پاره‌خط از دو سر آن پاره‌خط به یک فاصله است، پس:

$$d \Rightarrow OA = OB \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{B}_2 \quad \text{عمودمنصف ضلع } AB$$

$$d' \Rightarrow OA = OC \Rightarrow \hat{A}_2 = \hat{C}_2 \quad \text{عمودمنصف ضلع } AC$$

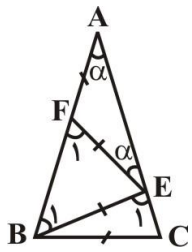
اگر مطابق شکل، امتداد پاره‌خط OA، ضلع BC را در نقطه‌ی E قطع کند، آنگاه:

$$B\hat{O}C = B\hat{O}E + C\hat{O}E = (\hat{A}_1 + \hat{B}_2) + (\hat{A}_2 + \hat{C}_2)$$

$$\Rightarrow B\hat{O}C = 2\hat{A}_1 + 2\hat{A}_2 = 2(\hat{A}_1 + \hat{A}_2) = 2\hat{A}$$

توجه کنید که چون $\hat{A}$ حاده است، نقطه‌ی O درون مثلث می‌افتد. اما اگر $\hat{A}$ منفرجه باشد، آنگاه نقطه‌ی O خارج مثلث قرار دارد که در آن صورت داریم: $\hat{BOC} = 360^0 - 2\hat{A}$

-11 گزینه‌ی «3»



اگر $\hat{A} = \alpha$ فرض شود، چون $AF = FE$، لذا $\hat{A} = \hat{E} = \alpha$ از طرفی $\hat{F}_1$ زاویه‌ی خارجی مثلث AFE است، لذا $\hat{F}_1 = \hat{B}_1 = 2\alpha$، به همین ترتیب $\hat{E}_1$ زاویه‌ی خارجی مثلث ABE است، در نتیجه

$$AB = AC \Rightarrow \hat{B} = \hat{C} = 3\alpha \qquad \hat{E}_1 = \hat{C} = 3\alpha \text{ داریم: .}$$

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^0 \Rightarrow \alpha + 3\alpha + 3\alpha = 180^0$$

ازی الاضلاع

$\Rightarrow 7\alpha = 180^0 \Rightarrow \alpha = \frac{180^0}{7}$

-12 گزینه‌ی «2»

$BE = EF \Rightarrow E\hat{F}A = 180^0 - \hat{B}$

$EF = FA \Rightarrow F\hat{A}E = \frac{180^0 - (180^0 - \hat{B})}{2} = \frac{\hat{B}}{2}$

$\Rightarrow E\hat{A}C = 90^0 - \frac{\hat{B}}{2} \xrightarrow{AE=AC}$

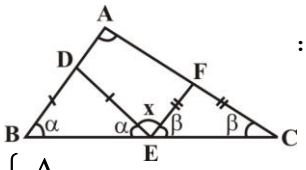
$\hat{C} = \frac{180^0 - (90^0 - \frac{\hat{B}}{2})}{2} = 45^0 + \frac{\hat{B}}{4}$

$\hat{B} + \hat{C} = 90^0 \Rightarrow \hat{B} + (45^0 + \frac{\hat{B}}{4}) = 90^0$

$\Rightarrow \frac{5\hat{B}}{4} = 45^0 \Rightarrow \hat{B} = 36^0$

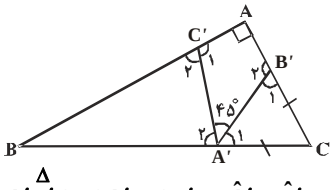
-13 گزینه‌ی «1»

مطابق شکل، داریم:



$\begin{cases} \Delta ABC : \alpha + \beta + \hat{A} = 180^0 \\ \alpha + \beta + x = 180^0 \end{cases} \Rightarrow x = \hat{A} = 84^0$

-14 گزینه‌ی «1»



$\Delta A'B'C : CA' = CB' \Rightarrow \hat{A}'_1 = \hat{B}'_1 = x \Rightarrow \hat{B}'_2 = 180° - x$

در چهار ضلعی $AC'A'B'$ مجموع زوایا برابر 360^o است. داریم: $\hat{A}'_2 + 45° + \hat{A}'_1 = 180° \Rightarrow \hat{A}'_2 = 135° - x$

$\hat{A} + \hat{B}'_2 + 45^0 + \hat{C}'_1 = 360^0$

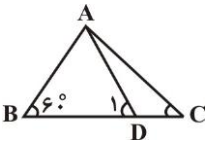
$\Rightarrow 90^0 + (180^0 - x) + 45^0 + \hat{C}'_1 = 360^0$

$\Rightarrow \hat{C}'_1 = 45^0 + x \Rightarrow \hat{C}'_2 = 135^0 - x$

مثلث $BA'C'$ متساوی الساقین است.

$\hat{A}'_2 = \hat{C}'_2 \Rightarrow$

-15 گزینه‌ی «3»



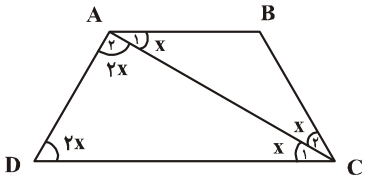
$BA = BD$ و $\hat{B} = 60^0$، پس مثلث ABD متساوی الاضلاع است. $\hat{D}_1 = 60^0$ زاویه‌ی خارجی مثلث ACD است، لذا:

$\hat{D}_1 = 60^0 = C\hat{A}D + \hat{C} \xrightarrow{\hat{C}=3C\hat{A}D} 4C\hat{A}D \Rightarrow C\hat{A}D = 15^0$

$\Rightarrow \hat{A} = 60^0 + C\hat{A}D = 75^0$

-16 گزینه‌ی «3»

فرض: $\hat{C}_1 = x \Rightarrow \hat{A}_1 = x$



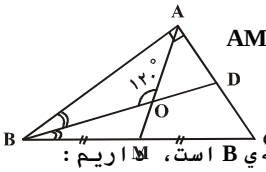
$AB = BC \Rightarrow \hat{C}_2 = x$

ذوزنقه‌ي متساوی الساقین $ABCD$: $\hat{D} = 2x \xrightarrow{AC=DC} \hat{A}_2 = \hat{D} = 2x$

$\Delta ADC : 2x + 2x + x = 180^0 \Rightarrow x = 36^\circ \Rightarrow \hat{D} = 2x = 72^\circ$

-17 گزینه‌ی «3»

AM، میانه‌ي وارد بر وتر است، داریم:



$AM = BM \Rightarrow B\hat{A}M = \hat{B} \quad (1)$

همچنین BD نیمساز زاویه‌ي B است، داریم:

$A\hat{B}D = C\hat{B}D = \frac{\hat{B}}{2} \quad (2)$

$\Delta OAB : A\hat{O}B = 180^0 - (B\hat{A}M + A\hat{B}D)$

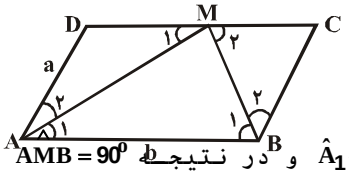
$\xrightarrow{(1),(2)} 120^0 = 180^0 - (\hat{B} + \frac{\hat{B}}{2})$

$\Rightarrow \hat{B} = 40^0 \Rightarrow \hat{C} = 90^0 - \hat{B} = 50^0$

-18 گزینه‌ی «2»

مطابق شکل، AM و BM به ترتیب نیمساز زاویه‌های A و B هستند.

از آن‌جا که $\hat{A} + \hat{B} = 180^0$، پس داریم:



$AMB = 90^0$ و در نتیجه $\hat{A}_1 + \hat{B}_1 = \frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{B}}{2} = 90^0$

و از این رو مثلث AMB قائم‌الزاویه است. در ادامه با توجه به این که $AB \| DC$، با فرض $AB = b$ و $AD = a$ خواهیم داشت:

$\Delta AMD \Rightarrow AD = MD = a$ متساوی‌الساقین است.

$\hat{A}_2 = \hat{A}_1 = \hat{M}_1 \Rightarrow$

$\overset{\Delta}{BMC} \Rightarrow MC = BC = a$ متساوي الساقين

$\hat{B}_1 = \hat{B}_2 = \hat{M}_2 \Rightarrow$ است.

$$DC = MD + MC \Rightarrow b = 2a$$

$$\Rightarrow \frac{p}{a} = \frac{2(a+b)}{a} = \frac{2(a+2a)}{a} = 6$$

19- گزینه‌ی «3»

$$\left.\begin{matrix} AD = DC \\ AE = CF \\ \hat{D} = 90^\circ \end{matrix}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{ADE} \cong \overset{\Delta}{DFC}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \hat{FCD} = D\hat{A}E = 15^\circ \Rightarrow D\hat{F}C = 90^\circ - 15^\circ = 75^\circ \\ DF = DE \Rightarrow D\hat{F}E = D\hat{E}F = 45^\circ \end{cases}$$

$$C\hat{F}E = D\hat{F}C - D\hat{F}E = 75^\circ - 45^\circ = 30^\circ$$

20- گزینه‌ی «3»

قضیه خم جردن، فقط برای خم‌های ساده‌ي بسته صادق است، اما گزینه‌ي 3 خم ساده‌ي بسته نیست.

یادداشت: