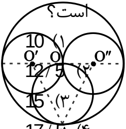
کارت ۱ فصل ۱
محیط و مساحت دایره

تعریف دایره: دایره مجموعه‌ی نقاطی از صفحه است که از یک نقطه‌ی ثابت به نام مرکز دایره، به فاصله‌ی ثابتی باشند. این فاصله‌ی ثابت را شعاع دایره می‌نامیم. دایره‌ای به مرکز O و شعاع R را با نماد $C(O,R)$ نمایش می‌دهیم.

محیط دایره‌ای به شعاع R، برابر $2\pi R$ و مساحت دایره‌ای به شعاع R، برابر πR^2 است.

مثال ۱: در شکل زیر، دایره‌ی بزرگ به مرکز O و به شعاع ۵ سانتی‌متر است. مساحت مثلث $O'O''A$ چند سانتی‌متر است؟



۱) 10
۲) 12/5
۳) 15
۴) 17/5

پاسخ: گزینه‌ی «۲»

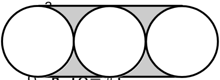
$$O'O'' = \frac{5}{2} + \frac{5}{2} = 5$$

$OA = 5$ (شعاع دایره‌ی بزرگ)

$$S_{AO'O''} = \frac{1}{2}(OA)\,(O'O'') = \frac{1}{2} \times 5 \times 5 = 12/5$$

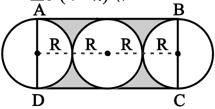
محیط و مساحت دایره

مثال ۲: سه دایره‌ی مساوی به شعاع R به هم مماس‌اند و مراکز آن‌ها روی یک خط راست است. سطح هاشور خورده کدام است؟



(۱ $R^2(8-\pi)$

(۴ $2R^2(4-\pi)$



برای پیدا کردن مساحت قسمت هاشور خورده، باید مساحت دایره‌ی وسط و دو نیم دایره را از مساحت مستطیل ABCD کم کنیم.

$$S_{ABCD} = 4R \times 2R = 8R^2$$

$$S_{(\text{دو دایره})} = 2\pi R^2$$

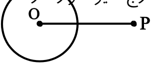
$$S_{\text{هاشور خورده}} = 8R^2 - 2\pi R^2 = 2R^2(4 - \pi)$$

کارت ۲
فصل ۱

وضعیت نقطه نسبت به دایره

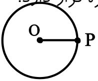
نقطه‌ی P نسبت به دایره‌ی $C(O,R)$ سه وضعیت می‌تواند داشته باشد:

۱) نقطه‌ی P خارج دایره قرار دارد.



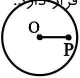
$$PO > R$$

۲) نقطه‌ی P روی دایره قرار دارد.



$$PO = R$$

۳) نقطه‌ی P درون دایره قرار دارد.



$$PO < R$$

نکته: فرض کنید نقطه‌ی A در صفحه‌ی دایره‌ی $C(O,R)$ واقع باشد، در این‌صورت کم‌ترین و بیش‌ترین فاصله‌ی

نقطه‌ی A از دایره به ترتیب برابر $|OA - R|$ و
$OA + R$ است.

وضعیت نقطه نسبت به دایره

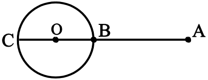
مثال: نزدیک‌ترین و دورترین فاصله‌ی نقطه‌ی A از یک دایره به ترتیب ۸ و ۱۲ است. شعاع این دایره کدام است؟

(آزاد ریاضی –۷۶)

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۶ ۴) ۴

پاسخ: گزینه‌ی «۲»

با توجه به فواصل داده شده و گزینه‌ها، واضح است که نقطه‌ی A خارج دایره قرار دارد. مطابق شکل نزدیک‌ترین و دورترین نقاط دایره نسبت به نقطه‌ی A ، نقاط C و B هستند و داریم:



$$AC = 12 \Rightarrow \begin{cases} OA + R = 12 \\ OA - R = 8 \end{cases}$$
$$AB = 8 \Rightarrow$$

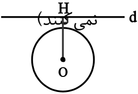
$$\Rightarrow \begin{cases} OA = 10 \\ R = 2 \end{cases}$$

کارت ۳
فصل ۱

وضعیت نسبی خط و دایره

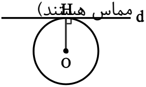
خط d و دایره‌ی $C(O,R)$ سه وضعیت نسبت به هم می‌توانند داشته باشند:

۱) خط و دایره هیچ نقطه‌ی مشترکی ندارند (همدیگر را قطع نمی کنند)



$$OH > R$$

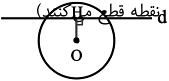
۲) خط و دایره در یک نقطه مشترک‌اند (در یک نقطه بر هم مماس هستند)



$$OH = R$$

در این حالت خط مماس، بر شعاع دایره در نقطه‌ی تماس، عمود است.

۳) خط و دایره دو نقطه‌ی مشترک دارند (همـدیگر را در دو نقطه قطع می‌کنند)



$OH < R$

وضعیت نسبی خط و دایره

مثال: کم‌ترین و بیش‌ترین فاصله‌ی نقطه‌ی A از محیط دایره‌ی C برابر ۵ و ۹ است. طول مماسی که از نقطه‌ی A بر دایره رسم شده است. چند برابر شعاع دایره است؟

(آزاد ریاضی -۸۹)

۱) $\frac{3\sqrt{5}}{2}$ ۲) $3\sqrt{5}$ ۳) $6\sqrt{5}$ ۴) $\frac{3\sqrt{5}}{4}$

پاسخ: گزینه‌ی «۱»

مطابق شکل طول‌های AB و AD ، به ترتیب برابر کم‌ترین و بیش‌ترین فاصله‌ی نقطه‌ی A از دایره‌ی C هستند.

داریم:

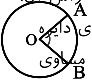
$$\begin{matrix} AB=5 \Rightarrow \\ AD=9 \Rightarrow \end{matrix} \begin{cases} OA-R=5 \\ OA+R=9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} OA=7 \\ R=2 \end{cases}$$

با توجه به آن که مماس AT در نقطه‌ی T بر شعاع OT عمود است، داریم:

$$\Delta OAT: AT^2 = OA^2 - OT^2$$

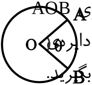
$$\Rightarrow AT^2 = 49 - 4 = 45 \Rightarrow AT = 3\sqrt{5} \Rightarrow \frac{AT}{R} = \frac{3\sqrt{5}}{2}$$

کارت ۴ فصل ۱
زاویه‌های مرکزی، کمان و قطاع



زاویه‌ی مرکزی: زاویه‌ای است که رأس آن، مرکز دایره و ضلع‌های آن، شعاع‌های دایره هستند. اندازه‌ی هر زاویه‌ی مرکزی مساوی اندازه‌ی کمان مقابل آن است. یعنی داریم:

$$A\hat{O}B = AB$$



طول کمان و مساحت قطاع: زاویه‌ی مرکزی $A\hat{O}B$ به اندازه‌ی θ بر حسب رادیان را در دایره‌ی $C(O,R)$ در نظر بگیرید.

آ) طول کمان AB برابر است با $R\theta$

تذکر ۱: اگر θ بر حسب درجه باشد، آن‌گاه طول کمان برابر $\frac{\pi R\theta}{180}$ است.

ب) مساحت قطاع AOB برابر است با $\frac{R^2\theta}{2}$

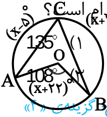
تذکر ۲: اگر θ بر حسب درجه باشد، آن‌گاه مساحت قطاع برابر $\frac{\pi R^2\theta}{360}$ است.

کارت ۴

فصل ۱

زاویه‌های مرکزی، کمان و قطاع

مثال ۱: در شکل مقابل، O مرکز دایره است. اندازه‌ی کمان AB کدام است؟



۱) 135° ۲) 121°

۳) 108° ۴) 127°

پاسخ: گزینه‌ی «۴»

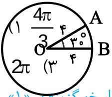
$$AB + AC + BC = 360^\circ$$

$$\Rightarrow x + 22^\circ + x - 5^\circ + x + 28^\circ = 360^\circ$$

$$\Rightarrow 3x + 45^\circ = 360^\circ \Rightarrow 3x = 315^\circ \Rightarrow x = 105^\circ$$

$$\Rightarrow AB = (x + 22)^\circ = 127^\circ$$

مثال ۲: در شکل مقابل، مساحت قطاع AOB کدام است؟



۱) $\frac{4\pi}{3}$ ۲) $\frac{3\pi}{2}$

۳) 2π ۴) π

پاسخ: گزینه‌ی «۱»

$$S = \frac{\pi R^2 \theta}{360} = \frac{\pi (4)^2 \times 30}{360} = \frac{16\pi}{12} = \frac{4\pi}{3}$$

کارت ۵ فصل ۱

وتر در دایره (بخش اول)

تعریف وتر: پاره‌خطی که دو نقطه‌ی متمایز از یک دایره را به هم وصل می‌کند، وتر آن دایره نامیده می‌شود.

۱) در هر دایره، قطر عمود بر وتر، وتر و کمان نظیر آن را نصف می‌کند.

۲) در هر دایره، خطی که مرکز دایره را به وسط یک وتر از آن دایره وصل می‌کند، بر آن وتر عمود است.

۳) در هر دایره، خطی که مرکز دایره را به وسط یک کمان از آن دایره وصل می‌کند، بر وتر نظیر آن کمان عمود است.

۴) کوچک‌ترین وتری که از یک نقطه واقع در درون یک دایره می‌توان رسم کرد، وتری است که بر قطر گذرنده از آن نقطه عمود است.

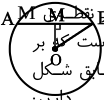
کارت ۵
فصل ۱

وتر در دایره
(بخش اول)

مثال: از نقطه‌ی M به فاصله‌ی $\frac{R}{2}$ از مرکز دایره‌ی $C(O,R)$ کوتاه‌ترین وتر ممکن را رسم کرده‌ایم. طول این وتر کدام است؟

۱) $\sqrt{3}R$ ۲) $\sqrt{2}R$ ۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}R$ ۴) $\frac{\sqrt{3}}{2}R$

پاسخ: گزینه‌ی «۱»



کوتاه‌ترین وتری که از نقطه M قابل رسم است، وتری است که بر MO عمود است. مطابق شکل داریم:

$$\Delta OMB: MB^2 = OB^2 - OM^2 = R^2 - \frac{R^2}{4} = \frac{3R^2}{4}$$

$$\Rightarrow MB = \frac{\sqrt{3}}{2}R$$

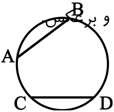
از طرفی می‌دانیم قطر عمود بر وتر، وتر را نصف می‌کند، بنابراین $AM = MB$ است و در نتیجه داریم:

$$AB = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} R = \sqrt{3} R$$

وتر در دایره (بخش دوم)

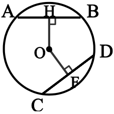
کارت ۶
فصل ۱

۱) در هر دایره، اگر دو وتر مساوی باشند، کمان‌های متناظر آن‌ها مساوی یکدیگرند و برعکس.



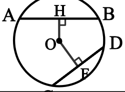
$AB = CD \Leftrightarrow \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$

۲) در هر دایره، اگر فاصله‌ی دو وتر از مرکز دایره با هم برابر باشند، طول آن دو وتر نیز برابر یکدیگر است و بر عکس.



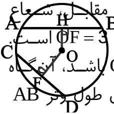
$AB = CD \Leftrightarrow OH = OF$

۳) در هر دایره، وتری بزرگ‌تر است که فاصله‌اش از مرکز دایره کم‌تر است و بر عکس.



$$AB > CD \Leftrightarrow OH < OF$$

وتر در دایره
(بخش دوم)



مثال: در شکل مقابل، شعاع دایره برابر 5 و $OF = 3$ است. اگر $OH < OF$ باشد، آن‌گاه کدام مقدار برای طول وتر AB قابل قبول است؟

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۰

پاسخ: گزینه‌ی «۳»

$$\Delta OFC: OC^2 = OF^2 + CF^2$$

$$\Rightarrow 25 = 9 + CF^2 \Rightarrow CF^2 = 16 \Rightarrow CF = 4$$

با توجه به آن که قطر عمود بر وتر، وتر را نصف می‌کند، پس $CD = 2CF = 8$ است. از طرفی $OH < OF$، یعنی فاصله‌ی مرکز دایره از وتر AB، کم‌تر از فاصله‌ی مرکز دایره از وتر CD است، بنابراین $AB > CD$ یعنی $AB > 8$ از طرفی بلندترین وتر در یک دایره، قطر آن دایره است و چون $R = 5$ است و قطعاً قطر دایره قابل قبول نیست، پس $AB < 10$، در نتیجه تنها مقدار قابل قبول $AB = 9$ است.