کارت ۱
فصل ۱

مجموع اعداد طبیعی

* روش محاسبه‌ی مجموع اعداد طبیعی ۱ تا n (ابتکار گاوس)

$$S = 1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) + n$$
$$S = n + (n-1) + \ldots + 3 + 2 + 1$$
$$2S = \underbrace{(n+1) + (n+1) + \ldots + (n+1)}_{\text{تا } n}$$
$$\Rightarrow 2S = n(n+1) \Rightarrow S = \frac{n(n+1)}{2}$$

مثال ۱: بر محیط دایره‌ای ۲۱ نقطه‌ی متمایز قرار دارد. از هر نقطه به نقاط دیگر وصل می‌کنیم. تعداد کل وترهای متمایز را به‌دست آورید.

مثال ۲: در معادله‌ی زیر مقدار m را بیابید.

$$1 + 2 + \ldots + m = 10(m-3)$$

مثال۳: نشان دهید:

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2$$

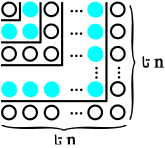
مجموعه اعداد طبیعی

حل ۱: با وصل نقطه‌ی اول به هر یک از نقاط دیگر ۲۰ وتر پدید می‌آید. با وصل نمودن نقطه‌ی دوم به نقاط دیگر (به غیر نقطه‌ی اول) ۱۹ وتر، با ادامه‌ی این روند تعداد وترهای حاصل برابر است با: $20+19+\dots+2+1=\frac{20(20+1)}{2}=210$

حل ۲:

$$1+2+\dots+m=\frac{m(m+1)}{2}=10(m-3)$$
$$\Rightarrow m^2+m=20m-60 \Rightarrow m^2-19m+60=0$$
$$\Rightarrow (m-15)(m-4)=0 \Rightarrow m=4,\quad m=15$$

حل ۳: با تقسیم بندی که در شکل زیر انجام گرفته و این‌که تعداد کل دایره‌ها برابر n^2 می‌باشد، به راحتی می‌توان نتیجه گرفت که: $1+3+5+\dots+(2n-1)=n^2$



کارت ۲ — فصل ۱

مجموع جملات دنباله‌ی حسابی

تعریف: به دنباله‌ای که تفاضل هر دو جمله‌ی متوالی آن مقداری ثابت باشد، دنباله‌ی حسابی گفته می‌شود.

نکته: به مقدار ثابتی که به جملات اضافه (کم) می‌شود، قدر نسبت (d) گفته می‌شود.

جمله‌ی اول: a_1 ، جمله‌ی nاُم: a_n ، تعداد کل جمله‌ها: n

روابط حاکم در دنباله‌ی حسابی:

- جملات: $a_1, a_1+d, a_1+2d, \ldots$
- جمله‌ی عمومی: $a_n = a_1 + (n-1)d$
- مجموع جملات:
  - $S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$
  - $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$

مثال ۱: در دنباله‌ی حسابی ... و ۱۰ و ۶ و ۲ حداقل چند جمله‌ی آن را با هم جمع کنیم تا حاصل از ۸۰۰ بیش‌تر شود؟

مثال ۲: در ۳۰ جمله‌ی اول یک دنباله‌ی حسابی مجموع جملات شماره‌ی فرد ۱۳۵ و مجموع جملات شماره‌ی زوج ۱۵۰ می‌باشد. جمله‌ی اول و قدر نسبت دنباله را تعیین کنید.

مثال ۳: در یک دنباله‌ی حسابی $S_n = 3n^2 + 4n$ می‌باشد. S_{10} و جمله‌ی عمومی دنباله را به‌دست آورید.

کارت ۲ فصل ۱

مجموع جملات دنباله‌ی حسابی

حل ۱: $S_n > 800 \Rightarrow \dfrac{n}{2}(2a_1+(n-1)d) > 800$

$\Rightarrow \dfrac{n}{2}(2(2)+(n-1)\times 4) > 800 \Rightarrow 2n^2 > 800 \Rightarrow n^2 > 400$

$\Rightarrow n > 20$. حداقل ۲۱ جمله را باید با هم جمع کنیم.

حل ۲: $S_{\text{فرد}} = a_1+a_3+\dots+a_{29} = a_1+(a_1+2d)+\dots+(a_1+28d)$

$S_{\text{زوج}} = a_2+a_4+\dots+a_{30} = (a_1+d)+(a_1+3d)+\dots+(a_1+29d)$

$$\Rightarrow \begin{cases} S_{\text{فرد}} = \dfrac{15}{2}(a_1+a_1+28d) = 135 \\ S_{\text{زوج}} = \dfrac{15}{2}(a_1+d+a_1+29d) = 150 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1+14d = 9 \\ a_1+15d = 10 \end{cases}$$

$\Rightarrow d = 1 \ , a_1 = -5$

حل ۳: S_{10} یعنی مجموع ۱۰ جمله‌ی اول پس؛

$S_{10} = 3(10)^2 + 4(10) = 340$

از طرفی:

$$\begin{cases} S_1 = a_1 = 3+4 = 7 \\ S_2 = a_1+a_2 = 3(2)^2+4(2) = 20 \Rightarrow a_2 = 20-7 = 13 \end{cases}$$

$d = a_2 - a_1 \Rightarrow d = 13-7 = 6$

جمله‌ی عمومی: $a_n = 7+(n-1)6 \Rightarrow a_n = 6n+1$

مجموع جملات دنباله‌ی هندسی

تعریف: به دنباله‌ای که نسبت هر دو جمله‌ی متوالی آن مقداری ثابت باشد، دنباله‌ی هندسی گفته می‌شود.

نکته: به نسبت جملات متوالی، قدر نسبت (q) گفته می‌شود.

جمله‌ی اول: a_1 ، جمله‌ی nاُم: a_n ، تعداد کل جمله‌ها: n

روابط حاکم در دنباله‌ی هندسی:

جملات: $a_1, a_1q, a_1q^2, a_1q^3, \dots$

جمله‌ی عمومی: $a_n = a_1 . q^{n-1}$

مجموع جملات: $S_n = \dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}$

مثال ۱: برای محافظت از تابش مضر مواد رادیواکتیویته، لایه‌های محافظی ساخته شده است که شدت تابش پس از عبور از آن‌ها ثلث می‌شود. حداقل چند لایه باید استفاده کنیم تا شدت تابش مواد مضر ۴۹/۵ درصد کاهش یابد؟

مثال ۲: طول ضلع مربعی یک متر است. ابتدا نیمی از مساحت آن را رنگ می‌کنیم. سپس نیمی از مساحت باقی‌مانده را رنگ می‌کنیم و به همین ترتیب در هر مرحله نیمی از مساحت باقی‌مانده از مرحله قبل را رنگ می‌کنیم.

پس از چند مرحله حداقل ۹۹ درصد سطح مربع رنگ شده است؟

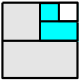
مجموع جملات دنباله‌ی هندسی

حل ۱: دنباله اعداد به صورت روبه‌رو خواهد بود. $\frac{1}{3},\frac{1}{9},\frac{1}{27},\dots$

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\dots+\frac{1}{3^n}\ge\frac{49/5}{100}\Rightarrow\frac{1}{3}\times\frac{1-(\frac{1}{3})^n}{1-\frac{1}{3}}\ge\frac{49/5}{100}$$

$$\Rightarrow 1-(\frac{1}{3})^n\ge\frac{99}{100}\Rightarrow(\frac{1}{3})^n\le\frac{1}{100}\Rightarrow 3^n\ge 100\Rightarrow n\ge 5$$

حل ۲: در مرحله‌ی اول نصف مربع، در مرحله‌ی دوم نیمی از نصف باقی‌مانده مربع یعنی $\frac{1}{4}$ آن را رنگ می‌کنیم و ... دنباله‌ی این اعداد به صورت زیر خواهد بود؛



$$\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\dots\Rightarrow\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{2^n}\ge\frac{99}{100}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{2}\times\frac{1-(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}}\ge\frac{99}{100}\Rightarrow 1-(\frac{1}{2})^n\ge\frac{99}{100}$$

$$\Rightarrow(\frac{1}{2})^n\le\frac{1}{100}\Rightarrow 2^n\ge 100\Rightarrow n\ge 7$$

بنابراین حداقل ۷ مرحله نیاز است.

کارت ۴
فصل ۱

نکات تکمیلی در دنباله‌های حسابی و هندسی

در یک دنباله‌ی حسابی با قدرنسبت d، برای دو جمله‌ی a_m و a_n داریم:

$$d=\frac{a_m-a_n}{m-n}$$

در یک دنباله‌ی هندسی با قدرنسبت q، برای دو جمله a_m و a_n داریم:

$$\frac{a_m}{a_n}=q^{m-n}$$

در یک دنباله‌ی هندسی، رابطه‌ی بین مجموع n جمله اول و مجموع $۲n$ جمله اول به قرار زیر است:

$$\frac{S_{2n}}{S_n}=1+q^n$$

مثال ۱: در یک دنباله‌ی حسابی، جمله ۵اُم برابر ۴۶ و جمله ۱۷اُم برابر ۱۷۸ می‌باشد. قدرنسبت دنباله را بیابید.

مثال ۲: در یک دنباله‌ی هندسی داریم: $\frac{S_6}{S_3}=-7$ ، $S_3=9$، مجموع ۱۰ جمله اول این دنباله را به‌دست آورید.

کارت ۴
فصل ۱

نکات تکمیلی در دنباله‌های حسابی و هندسی

حل ۱: روش اول:

$$\left.\begin{array}{l} a_5 = a_1 + 4d \\ a_{17} = a_1 + 16d \end{array}\right\} \Rightarrow a_{17} - a_5 = 12d$$

$$\Rightarrow 178 - 46 = 12d \Rightarrow d = 11$$

روش دوم:

$$d = \frac{a_m - a_n}{m - n} = d = \frac{178 - 46}{17 - 5} = 11$$

حل ۲:

$$\frac{S_6}{S_3} = 1 + q^3 = -7 \Rightarrow q^3 = -8$$

$$\Rightarrow q = -2 \xrightarrow{S_3 = 9} \frac{a_1(1-(-2)^3)}{1+2} = 9 \Rightarrow a_1 = 3$$

بنابراین:

$$S_{10} = \frac{3(1-(-2)^{10})}{1-(-2)} = 1 - 2^{10} = -1023$$

کارت ۵
فصل ۱
روابط بین ضرایب و ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم

حاصل جمع و ضرب ریشه‌ها: (معادله‌ی $ax^2+bx+c=0$)

مجموع ریشه‌ها $=S=x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$

ضرب ریشه‌ها $=P=x_1\,x_2=\dfrac{c}{a}$

تشکیل معادله درجه ۲ بر حسب S، P:

$$x^2-Sx+P=0$$

مثال ۱: اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم $3x^2-4x=7$ باشند، حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

آ) $\dfrac{\alpha}{\beta}+\dfrac{\beta}{\alpha}$ ب) $\alpha^3+\beta^3$

مثال ۲: در معادله‌ی $4x^2-8x+m=0$ یکی از ریشه‌ها ۳ واحد بزرگ‌تر از ریشه‌ی دیگر است. هر دو ریشه و مقدار m را بیابید.

مثال ۳: معادله‌ی درجه دومی بنویسید که ریشه‌های آن $3-\sqrt{2}, 3+\sqrt{2}$ باشد.

روابط بین ضرایب و ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم

حل ۱:

آ) $\dfrac{\alpha}{\beta}+\dfrac{\beta}{\alpha}=\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\dfrac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}$

$$=\frac{(\frac{4}{3})^2-2(\frac{-7}{3})}{-\frac{7}{3}}=\frac{(\frac{16}{9})+\frac{14}{3}}{-\frac{7}{3}}=-\frac{58}{21}$$

ب) $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)\,(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)=(\alpha+\beta)((\alpha+\beta)^2-3\alpha\beta)$

$$=\frac{4}{3}\times((\frac{4}{3})^2-3(-\frac{7}{3}))=\frac{316}{27}$$

حل ۲: با فرض $x_2=x_1+3$ داریم:

$$S=x_1+x_2=-\frac{b}{a}\Rightarrow x_1+x_1+3=\frac{8}{4}=2\Rightarrow 2x_1=-1$$

$$\Rightarrow x_1=-\frac{1}{2}\ ,\ x_2=\frac{5}{2}$$

$$P=x_1x_2=\frac{c}{a}\Rightarrow -\frac{1}{2}\times\frac{5}{2}=\frac{m}{4}\Rightarrow m=-5$$

حل ۳:

$$\left.\begin{array}{l}S=(3+\sqrt{2})+(3-\sqrt{2})=6\\ P=(3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2})=9-2=7\end{array}\right\}\Rightarrow$$

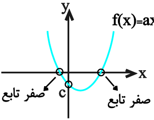
معادله: $x^2-6x+7=0$

کارت ۶ فصل ۱

صفرهای تابع

تعریف: برای تابع $f(x)$ جواب‌های معادله‌ی $f(x)=0$ را (در صورت وجود) صفرهای تابع f می‌نامیم. به عبارتی صفرهای تابع f آن مقادیری از x (دامنه‌ی f) هستند که به ازای آن‌ها $f(x)$ صفر می‌شود.

نکته: اگر نمودار $f(x)$ را رسم کنیم، صفرهای f در واقع طول‌های نقاط تلاقی نمودار با محور xهاست.

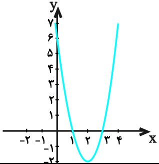


نقطه‌ی برخورد سهمی با محور عرض‌ها، عرضی برابر c دارد.

مثال ۱: اگر x' و x'' صفرهای تابع درجه دوم $f(x)=ax^2+bx+c$ باشند. نشان دهید:

$$ax^2+bx+c=a(x-x')(x-x'')$$

مثال ۲: اگر نمودار سهمی $y=ax^2+bx+c$ به صورت زیر باشد، ضابطه‌ی سهمی را مشخص کنید.



کارت ۶
فصل ۱

صفرهای تابع

حل ۱: از آن‌جا که x' و x'' صفرهای تابع اند، پس جواب‌های معادله‌ی $ax^2+bx+c=0$ می‌باشند و می‌توان نوشت:

$$a(x-x')(x-x'')=a(x^2-(x'+x'')x+x'x'')$$

$$=a(x^2-Sx+P)=a(x^2-(-\frac{b}{a}x)+\frac{c}{a})=ax^2+bx+c$$

حل ۲: با استفاده از رابطه‌ای که در مثال قبل آموختید، داریم؛

$$f(x)=ax^2+bx+c=a(x-1)(x-3)$$

ضمناً نمودار تابع از نقطه‌ی $(0,6)$ می‌گذرد، پس؛

$$6=a(0-1)(0-3)\Rightarrow a=2$$

معادله‌ی سهمی: $y=2(x-1)(x-3):y=2x^2-8x+6$

کاربرد صفرهای تابع در رسم نمودار

نکته: با توجه به روابط حاکم بین ضرایب و ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم می‌توان شکل کلی نمودار را رسم نمود و بالعکس. این روابط بدین شرح است:

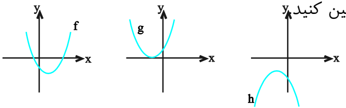
$(\Delta = b^2 - 4ac \ , \ f(x) = ax^2 + bx + c)$

(1) $a > 0 \Rightarrow$ دهانه سهمی رو به بالا
$a < 0 \Rightarrow$ دهانه سهمی رو به پایین

(2) مجموع ریشه ها $= -\dfrac{b}{a}$
ضرب ریشه‌ها $= \dfrac{c}{a}$
$f(0) = c$

(3) $\Delta > 0 \Rightarrow$ محور xها را در ۲ نقطه قطع می‌کند ← معادله ۲ ریشه حقیقی دارد.
$\Delta = 0 \Rightarrow$ مماس بر محور xهاست ← معادله یک ریشه‌ی مضاعف دارد.
$\Delta < 0 \Rightarrow$ محور xها را قطع نمی‌کند ← معادله ریشه حقیقی ندارد.

مثال ۱: با توجه به شکل سهمی رسم شده به معادله‌ی $y = ax^2 + bx + c$ ؛ علامت ضرایب و تعداد صفرهای توابع را تعیین کنید



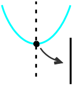
کاربرد صفرهای تابع در رسم نمودار

حل ۱:

ویژگی \ تابع	f	g	h
تعداد صفر تابع	۲	۱	۰
علامت a	+	+	−
علامت b	−	+	−
علامت c	−	+	−

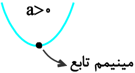
نکته: در سهمی به معادله‌ی $f(x)=ax^2+bx+c$ ، خط به معادله‌ی $x=\frac{-b}{2a}$ همان محور تقارن سهمی بوده و محل برخورد آن با سهمی را رأس سهمی می‌نامند.

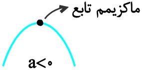
بنابراین مختصات رأس سهمی برابر است با:



$$\begin{cases} x=-\frac{b}{۲a} \\ y=f(\frac{-b}{۲a}) \end{cases}$$

نکته: تابع $f(x)=ax^2+bx+c$ به ازای $x=\frac{-b}{2a}$ در حالت $a>۰$ به کم‌ترین مقدار (مینیمم) و درحالت $a<۰$ به بیش‌ترین مقدار (ماکزیمم) خود می‌رسد.





تغییر متغیر و روش هندسی حل معادلات

روش تغییر متغیر روشی برای حل معادلات می‌باشد. به طوری که در حل برخی از معادلات می‌توان با تغییر متغیر مناسبی آن را به یکی از انواع معادلاتی که می‌شناسیم تبدیل کرد و پس از حل آن و بارجوع به تغییر متغیر صورت گرفته، مقادیر متغیر معادله‌ی اولیه را یافت.

اگر $f(x)$ و $g(x)$ دو تابع باشند، طول نقاط محل تلاقی این دو نمودار جواب‌های معادله‌ی $f(x)=g(x)$ خواهند بود و برعکس.

این روش حل معادله که از طریق آن تعداد جواب‌ها و مقدار تقریبی (و گاهی دقیق) آن‌ها قابل تشخیص است را روش هندسی (نموداری) حل معادلات می‌نامند.

مثال ۱: صفرهای تابع $f(x)=(x^2-1)^2+(x^2-1)-2$ را به‌دست آورید.

مثال ۲: معادله‌ی زیررا حل کنید.

$$(\frac{x^2}{3}-2)^2-7(\frac{x^2}{3}-2)+6=0$$

مثال ۳: به روش هندسی معادله‌ی $|x|=2x-x^2$ را حل کنید.

کارت ۸
فصل ۱

تغییر متغیر و
روش هندسی حل معادلات

حل ۱: هرچند معادله‌ی $f(x)=0$ ظاهراً از درجه چهار است اما با یک تغییر متغیر مناسب داریم؛

$$x^2-1=t \Rightarrow t^2+t-2=0 \Rightarrow t=1, t=-2$$

$$\begin{cases} t=1 \Rightarrow x^2-1=1 \Rightarrow x=\pm\sqrt{2} \\ t=-2 \Rightarrow x^2-1=-2 \Rightarrow x^2=-1 \quad \text{جواب ندارد} \end{cases}$$

حل ۲:

$$\frac{x^2}{3}-2=t \Rightarrow t^2-7t+6=0 \Rightarrow t=1, t=6$$

$$\begin{cases} t=1 \Rightarrow \frac{x^2}{3}-2=1 \Rightarrow x^2=9 \Rightarrow x=\pm 3 \\ t=6 \Rightarrow \frac{x^2}{3}-2=6 \Rightarrow x^2=24 \Rightarrow x=\pm 2\sqrt{6} \end{cases}$$

حل ۳:

$$f(x)=2x-x^2=-(x-1)^2+1$$

$$g(x)=|x| \Rightarrow |x|=2x-x^2$$

$$\Rightarrow f(x)=g(x)$$