

فصل اوّل

مجموعه‌ها

این فصل شامل:

۴ درس

۴ گام اوّل: آنچه خوانده‌اید

۱۴ گام دوم: یادگیری عمیق‌تر

۳ پیمانۀ ۱۰ سؤالی

۱ پیمانۀ ۲۰ سؤالی

درس اول: معرفی مجموعه

گام اول: آنچه خوانده‌اید

- همان‌گونه که در کتاب دیدیم مهمترین ویژگی در معرفی یک مجموعه، مشخص بودن عضویت هر شیء در آن است.
- اگر a عضوی از مجموعه A باشد، می‌نویسیم $a \in A$.
- اگر a عضوی از مجموعه A نباشد، می‌نویسیم $a \notin A$.
- مجموعه تهی مجموعه‌ای است که هیچ عضوی ندارد و نماد آن $\emptyset$ یا $\{\}$ است.
- برای نمایش مجموعه‌ها در این درس سه روش معرفی شد.

۱ **توصیف مجموعه:** بیان یک عبارت که شرایط عضویت اشیاء در مجموعه را توصیف می‌کند.

۲ **نمایش اعضاء:** اعضای مجموعه را در داخل دو آکولاد قرار می‌دهیم به‌صورتی که بین اعضاء از نماد ویرگول استفاده می‌کنیم.

۳ **نمودار ون:** اشیاء را در صفحه نوشته و دور اشیاء درون مجموعه را یک منحنی (یا خط‌های ساده بسته) می‌کشیم.

برای نامگذاری مجموعه‌ها معمولاً از حروف بزرگ انگلیسی استفاده می‌کنیم.

گام دوم: یادگیری عمیق‌تر

عضویت

- وقتی می‌گوییم x عضو مجموعه A است که بتوانیم عضوی مانند a از A بیابیم که $x = a$ باشد. این تعریف به ظاهر سخت را با مثال زیر آسان می‌کنیم.

مثال

اگر $A = \{2, 3\}$ در این صورت عددهایی مانند $\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{5}}$ ، $\frac{14}{7}$ ، $\frac{-1}{-1}$ و $(-\sqrt{2})^2$ نیز عضو A هستند. زیرا همه این چهار عدد برابر ۲ می‌باشند.

به‌وجود آمدن یک مجموعه

- همان‌طور که در کتاب درسی در معرفی مجموعه خواندید، برای بیان یک مجموعه، باید تکلیف عضویت هر شیء به طور قطعی در آن مجموعه مشخص باشد. به عنوان مثال عبارت «سه عدد طبیعی متوالی» یک مجموعه معرفی نمی‌کند. زیرا تکلیف عضویت یک عدد طبیعی مانند ۲ در این عبارت مشخص نیست. در حالت $\{2, 3, 4\}$ عدد ۲ وجود دارد و در حالت $\{3, 4, 5\}$ عدد ۲ وجود ندارد. این در حالی است که هر دو حالت گفته شده «سه عدد طبیعی متوالی» هستند. بنابراین چون در پاسخ به «سه عدد طبیعی متوالی» مجموعه یکتایی نوشته نمی‌شود، این عبارت مجموعه‌ای را معرفی نمی‌کند.

مجموعه تهی

● اگر عبارتی که قرار است یک مجموعه معرفی کند، به گونه‌ای باشد که تکلیف عضویت هر شی با عضو نبودن در آن مجموعه مشخص باشد، آن مجموعه یک مجموعه خالی از عضو و یا به عبارتی تهی خواهد بود.

نماد ...

● مجموعه اعداد طبیعی یک رقمی را به صورت زیر می‌توان نوشت:

حال می‌خواهیم مجموعه اعداد طبیعی دو رقمی را بنویسیم:

$$\begin{aligned}
 A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \\
 B = \{10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, \\
 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, \\
 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, \\
 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, \\
 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, \\
 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99\}
 \end{aligned}$$

کار سختی بود. (با تشکر از حروفنگار محترم). اگر بخواهیم این رویه را ادامه دهیم، یعنی بخواهیم مجموعه اعداد طبیعی سه رقمی را بنویسیم، هیچ حروفنگاری حاضر به انجام این کار نیست. بنابراین برای راحتی نوشتن از «...» استفاده می‌کنیم.

$$C = \{100, 101, 102, 103, 104, 105, 106, \dots, 996, 997, 998, 999\}$$

حتی می‌توانیم مجموعه بالا را به صورت زیر نیز بنویسیم:

$$C = \{100, 101, 102, \dots, 999\}$$

ولی نوشتن مجموعه بالا به صورت $C = \{100, \dots, 999\}$ قابل قبول نیست. زیرا زمانی می‌توانیم از «...» استفاده کنیم که الگوی نوشتن اعضاء برای خواننده واضح باشد.

عضو تکراری در مجموعه

● نوشتن عضو تکراری در مجموعه غلط و اشتباه نیست که در اکثر مواقع کار بیهوده و بی‌ارزشی محسوب می‌شود و اگر در مجموعه‌ای عضو تکراری وجود داشته باشد، آن عضو یک‌بار شمرده می‌شود.

به عنوان مثال مجموعه $\{1, 2, 1, 4, 5\}$ چهار عضو دارد. به همین دلیل در کتاب درسی در معرفی مجموعه متمایز بودن عضوهای مجموعه مورد تأکید قرار گرفته است و بهتر است که عضوهای تکراری نادیده گرفته شود و یا می‌توان آن‌ها را حذف کرد. هرچند که مثال‌هایی می‌توان ساخت که بدون نوشتن عضو تکراری، تشخیص الگوی ساخت اعضاء مجموعه بسیار دشوار می‌شود. به عنوان مثال تشخیص الگوی ساخت اعضاء مجموعه زیر کار ساده‌ای نیست.

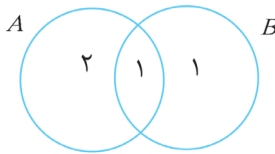
$$A = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \dots \right\}$$

در حالی که اگر مجموعه A را به صورت زیر بنویسیم، الگوی ساخت راحت‌تر تشخیص داده می‌شود.

$$A = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \dots \right\}$$

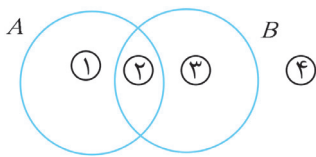
که در آن عضو $\frac{1}{4}$ و $\frac{2}{4}$ یکی هستند.

جایگاه يك عضو نمودار ون



● چون در معرفی مجموعه گفتیم که تکلیف عضویت هر شی باید نسبت به آن مجموعه مشخص باشد، پس در نمودار ون هر عضو فقط باید در یک ناحیه نوشته شود. به عنوان مثال ایرادی که در نمودار روبه‌رو وجود دارد این است که عدد ۱ هم درون A در نظر گرفته شده است و هم خارج A در نظر گرفته شده است. یعنی ۱ هم عضو A هست و هم عضو A نیست. عدد ۱ یا باید در A باشد، یا باید خارج A باشد و این یعنی A مجموعه نیست.

نمودار ون برای دو مجموعه

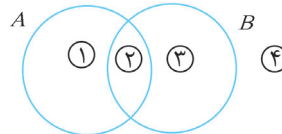
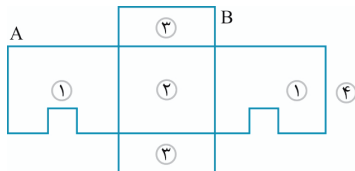


● توجه کنید که نمودار ون دو مجموعه در حالت کلی به صورت روبه‌رو است. تمام حالات ممکن برای دو مجموعه A و B را در زیر بررسی می‌کنیم.

اعداد داخل دایره‌های کوچک، نشان‌دهنده شماره ناحیه مربوطه هستند.

- * عضوهایی که فقط در A هستند. (ناحیه ۱)
- * عضوهایی که هم در A هستند و هم در B . (ناحیه ۲)
- * عضوهایی که فقط در B هستند. (ناحیه ۳)
- * عضوهایی که نه در A هستند و نه در B . (ناحیه ۴)

● توجه داشته باشید که در نمودار ون از هر خم ساده بسته‌ای برای نمایش مجموعه می‌توان استفاده کرد. در مثال زیر هر دو نمودار یکی هستند.



تمرین‌های پیمانه‌ای

۱- هر یک از مجموعه‌های زیر چند عضو دارند؟

- الف) $\{1, -1, 1, -1, \dots\}$ ب) $\{2, 2-2, -2\}$
 ج) $\{1, 2, 1, 3, 1, 4, \dots, 1, 1397\}$ د) $\{\{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6\}\}$

۲- با توجه به مجموعه‌های داده شده درستی گزاره‌های زیر را بررسی کنید.

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

$$B = \{-1, -2, -3, -4, -5, -6, -7, -8, -9\}$$

الف) $\sqrt{64} \in B$

ب) $(-2)^3 \in B$

ج) $(-3)^2 \in A$

د) $\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}} \notin A$

هـ) $10^\circ \in A$

و) $-2^\circ \notin B$

۳- مجموعه‌های زیر را با نوشتن اعضاء مشخص کنید.

الف) مجموعه شمارنده‌های طبیعی عدد ۲۰ :

ب) مجموعه مضرب‌های طبیعی عدد ۲۰ :

۴- در هر مورد مشخص کنید عبارت داده شده مجموعه معرفی می‌کند یا نه.

(الف) تمام اعداد طبیعی دو رقمی که هیچ کدام از ارقام آن فرد نیست.

(ب) تمام اعداد طبیعی سه رقمی که رقم صدگان آن‌ها یک است.

(ج) تمام اعداد اول یک رقمی.

(د) سه عدد اول یک رقمی.

(هـ) چهار عدد اول یک رقمی.

(و) کوچک‌ترین عدد صحیح مثبت.

(ز) کوچک‌ترین عدد گویای مثبت.

(ح) سه عدد طبیعی متمایز که مجموع آن‌ها برابر ۷ است.

(ط) چهار عدد طبیعی متمایز که مجموع آن‌ها برابر ۱۲ است.

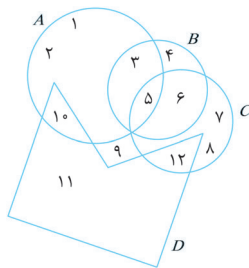
۵- مجموعه مقابل را در نظر بگیرید.

$$A = \left\{ \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{1}{3}, \frac{2}{2}, \frac{3}{1}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{4}{1}, \dots \right\}$$

(الف) پنج عضو بعدی این روند را بنویسید.

(ب) تعدادی عضو تکراری که در هنگام ساخت این مجموعه تولید می‌شوند را بیابید. این اعضاء چه ویژگی دارند؟

(ج) اعضای مجموعه A را توصیف کنید.



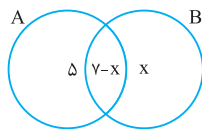
۶- با توجه به نمودار ون داده شده، درستی گزاره‌های زیر را بررسی کنید.

(الف) $11 \notin A$ (ب) $3 \in B$

(ج) $5 \in B$ (د) $4 \in D$

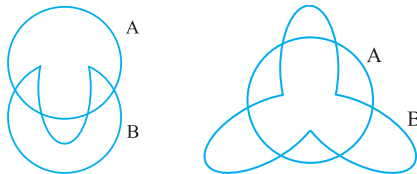
(هـ) $9 \in C$ (و) $2 \notin C$

(ز) $12 \notin D$ (ح) $10 \notin A$

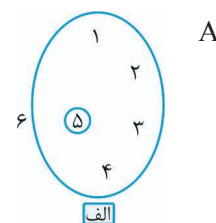
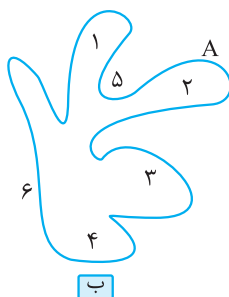
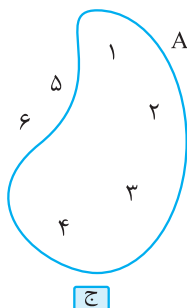


۷- با توجه به نمودار ون زیر، X چه مقدارهایی نمی‌تواند باشد؟

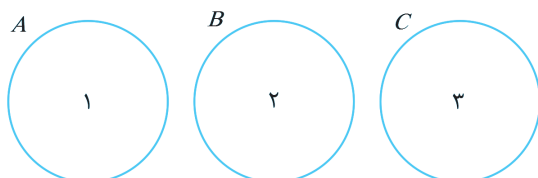
۸- آیا دو شکل زیر یک واقعیت را نشان می‌دهند؟



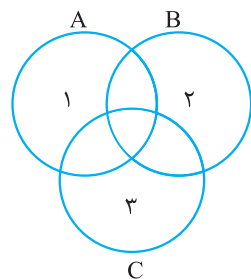
۹- کدام یک از نمودارهای زیر نمودار ون مجموعه $A = \{1, 2, 3, 4\}$ می‌تواند باشد.



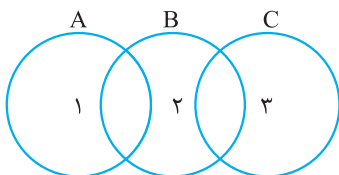
۱۰- رایان برای سه مجموعه $A = \{1\}$ ، $B = \{2\}$ و $C = \{3\}$ نمودار ون زیر را کشیده است.



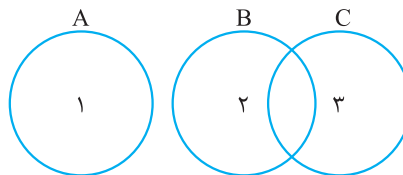
شایان می‌گوید او اگر نمودار را به صورت زیر می‌کشید هم درست بود.



پایان ادعا می‌کند که برای این سه مجموعه هر نمودار سه تایی دیگری بکشند درست است. مثلاً:



یا



برای ادعای پایان مثال نقض بیابید.

درس دوم: مجموعه‌های برابر و نمایش مجموعه‌ها

گام اول: آن‌چه خوانده‌اید

- دو مجموعه A و B با هم برابرند هرگاه هر عضو از A ، عضوی از B باشد و هر عضو از B عضوی از A باشد.
- برای اینکه بگوییم A و B مساوی نیستند کافی است در یکی عضوی بیابیم که در دیگری نیست.
- اگر تمامی اعضای مجموعه A عضو مجموعه B هم باشند، آن‌گاه می‌گوییم A زیرمجموعه B است و می‌نویسیم $A \subseteq B$.
- وقتی می‌گوییم A زیرمجموعه B نیست که عضوی در A بیابیم که در B نباشد و می‌نویسیم $A \not\subseteq B$.
- با توجه به تعاریف بالا، برای هر مجموعه دلخواه داریم:
 $\emptyset \subseteq A$ و $A \subseteq A$
- برای دو مجموعه A و B ، اگر $A \subseteq B$ و $B \subseteq A$ آنگاه $A = B$.
- چهارمین روش نمایش مجموعه‌ها استفاده از نمادهای ریاضی است که به آن «نمایش مجموعه به زبان ریاضی» هم گفته می‌شود. در این روش علاوه بر نماد آکولاد از یک خط عمودی برای دو بخش کردن فضای بین دو آکولاد استفاده می‌کنیم.
 {بخش دوم | بخش اول}
- در بخش اول اعضای مجموعه را با متغیر یا عبارت جبری می‌نویسیم و در بخش دوم شرایط و محدودیت‌های متغیرها را بیان می‌کنیم.

گام دوم: یادگیری عمیق‌تر

زبان ریاضی

یکی دیگر از روش‌های نمایش مجموعه، استفاده از نمادهای ریاضی یا به اصطلاح «زبان ریاضی» است.

مجموعه $A = \{x^2 \mid x \in \mathbb{N}, x < 10\}$ را که به زبان ریاضی نوشته شده است می‌توان به صورت زیر توصیف کرد:

مجموعه A : مربع اعداد طبیعی یک رقمی.

مجموعه A را اینگونه می‌خوانیم: اعضای A ، توان دوم x هایی هستند به طوری که آن x ها طبیعی هستند و از ۱۰ کوچک‌تر هستند. یعنی اعداد طبیعی از ۱ تا ۹. حال که توانستیم x های مورد نظرمان را پیدا کنیم، می‌توانیم اعضای A را هم مشخص کنیم. برای به دست آوردن اعضای A باید x ها را به توان ۲ برسانیم.

بنابراین A عبارت است از:

$$A = \{x^2 \mid x \in \mathbb{N}, x < 10\} = \{1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2, 7^2, 8^2, 9^2\} = \{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81\}$$

بنابراین مجموعه A یک مجموعه ۹ عضوی خواهد بود.

مثال

دو مجموعه $A = \{5x \mid x \in \mathbb{N}\}$ و $B = \{x + 5 \mid x \in \mathbb{N}\}$ را با نوشتن اعضاء مقایسه می‌کنیم.

$$A = \{5 \times 1, 5 \times 2, 5 \times 3, 5 \times 4, 5 \times 5, \dots\} = \{5, 10, 15, 20, 25, \dots\}$$

پاسخ:

$$B = \{1 + 5, 2 + 5, 3 + 5, 4 + 5, 5 + 5, \dots\} = \{6, 7, 8, 9, 10, \dots\}$$

در توصیف مجموعه A می‌توانیم بگوییم که اعداد ساخته شده، مضارب ۵ هستند. به عبارتی دیگر فاصله هر دو عدد متوالی در این مجموعه ۵ واحد است.

در توصیف مجموعه B می‌توانیم بگوییم که اعداد ساخته شده، اعداد طبیعی متوالی بزرگ‌تر از ۵ هستند.

در مجموعه A ضرب عدد ۵ در x ، باعث شده تا فاصله اعداد طبیعی ۵ برابر شود. در حالیکه در مجموعه B جمع عدد ۵ با x تغییری در فاصله بین اعداد ایجاد نمی‌کند. بلکه تمام اعداد طبیعی را ۵ واحد بزرگ‌تر کرده است.

مثال

مجموعه $A = \{3, 8, 13, 18, \dots\}$ را به زبان ریاضی بنویسید.

پاسخ:

مشاهده می‌شود که فاصله بین اعداد متوالی مجموعه A ، پنج واحد است. بنابراین ابتدا باید اعداد طبیعی را ۵ برابر کرده،

$$\{5 \times 1, 5 \times 2, 5 \times 3, 5 \times 4, \dots\} = \{5, 10, 15, 20, \dots\} = \{5x \mid x \in \mathbb{N}\}$$

یعنی:

$$\{5 - 2, 10 - 2, 15 - 2, 20 - 2, \dots\} = \{3, 8, 13, 18, \dots\}$$

و سپس ۲ واحد از آن‌ها کم کنیم. یعنی:

$$A = \{5x - 2 \mid x \in \mathbb{N}\}$$

بنابراین خواهیم داشت:

نکاتی درباره‌ی زیرمجموعه

اگر A زیرمجموعه B باشد می‌توان از نماد $A \subset B$ هم استفاده کرد. نماد « $\subset$ » و « $\subseteq$ » کاملاً یک معنی را می‌دهند.

اگر $A \subset B$ و $A \neq B$ باشد، از نماد $A \subsetneq B$ می‌توان استفاده کرد.

اگر A یک مجموعه باشد، به زیرمجموعه‌هایی از A که بین هر دو تای آن‌ها رابطه زیرمجموعه ($\subseteq$) برقرار باشد، یک

«زنجیر» می‌گویند.

برای مثال، اگر $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ، سه زیرمجموعه زیر، یک زنجیر سه‌تایی از زیرمجموعه‌های A ساخته‌اند.

$$\{1\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 3\}$$

$$\{1, 3\} \subseteq \{1, 3, 4\}, \{1\} \subseteq \{1, 3, 4\}, \{1\} \subseteq \{1, 3\}$$

● فرض کنید $A = \{2, 5, 8\}$ ، مجموعه A هشت زیرمجموعه زیر را دارد.

$$\{\}, \{2\}, \{5\}, \{8\}, \{2, 5\}, \{2, 8\}, \{5, 8\}, \{2, 5, 8\}$$

مجموعه $B = \{2, 5, 8, 4\}$ یک عضو از مجموعه A بیشتر دارد. زیرمجموعه‌های مجموعه B را می‌توان از روی زیرمجموعه‌های A نوشت:

$$\begin{array}{cccccccc} \{\} & \{2\} & \{5\} & \{8\} & \{2, 5\} & \{2, 8\} & \{5, 8\} & \{2, 5, 8\} \\ \{4\} & \{2, 4\} & \{5, 4\} & \{8, 4\} & \{2, 5, 4\} & \{2, 8, 4\} & \{5, 8, 4\} & \{2, 5, 8, 4\} \end{array}$$

مجموعه B شانزده زیرمجموعه دارد که هشت‌تای آن‌ها همان زیرمجموعه‌های A هستند و هشت‌تای دیگر همان زیرمجموعه‌های A هستند که عضو ۴ به آن‌ها اضافه شده است.

نکته: تعداد زیرمجموعه‌هایی از B که ۴ را ندارند، برابر است با تعداد زیرمجموعه‌هایی از B که ۴ را دارند.

نکته: با اضافه شدن یک عضو به یک مجموعه، می‌توان نتیجه گرفت که تعداد زیرمجموعه‌ها دو برابر می‌شود.

به مجموعه‌ای که تعداد اعضای آن یک عدد حسابی است، مجموعه متناهی می‌گوییم.

$$A = \{\}$$

$$B = \{1, 2, 3, \dots, 100\}$$

چون تعداد اعضای A و B ، اعداد حسابی است، پس A و B متناهی هستند.

به مجموعه‌ای که متناهی نباشد، نامتناهی می‌گوییم. مانند $\mathbb{N}$ و $\mathbb{Z}$.

تمرین‌های پیمانه‌ای

۱- مجموعه‌های برابر را مشخص کنید:

$$A = \{1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, \dots\}$$

$$B = \{1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

$$C = \{1, -2, 3, -4, \dots\}$$

$$D = \{1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots\}$$

$$E = \{2-1, 1-3, 4-1, 1-5, 6-1, 1-7, \dots\}$$

$$F = \left\{ \frac{1-3}{2}, \frac{3-1}{2}, \frac{1-5}{2}, \frac{5-1}{2}, \frac{1-7}{2}, \frac{7-1}{2}, \dots \right\}$$

-۲

(الف) همه زیرمجموعه‌های یک عضوی $\{3, 6, 1, 4\}$ را بنویسید.

(ب) همه زیرمجموعه‌های دو عضوی از مجموعه $\{3, 6, 1, 4\}$ را بنویسید.

(ج) همه زیرمجموعه‌های دو عضوی از مجموعه $\{3, 6, 1, 4, 5\}$ را بنویسید.

۳- زیرمجموعه‌ای مانند B از مجموعه $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ بنویسید که $\{2, 3, 5\} \subseteq B$ و همچنین $\{2, 3, 4\} \not\subseteq B$.

۴- درستی گزاره‌های زیر را بررسی کنید.

- (الف) تهی زیرمجموعه هر مجموعه‌ای است.
(ب) هر مجموعه‌ای زیرمجموعه خودش است.
(ج) هر مجموعه‌ای حداقل دو زیرمجموعه دارد.
(د) اگر به مجموعه‌ای سه عضو اضافه کنیم، تعداد زیرمجموعه‌ها شش برابر می‌شود.
(ه) تعداد زیرمجموعه‌های هر مجموعه‌ای، زوج است.

۵- مجموعه $A = \{4, 6, 9, 13, 18\}$ را در نظر بگیرید. در هر مورد بررسی کنید که زیرمجموعه‌های داده شده زنجیر هستند یا نه.

- (الف) $\{9\}$, $\{6, 9\}$, $\{13, 9, 18\}$, $\{13, 9, 6, 18\}$
(ب) $\{18\}$, $\{9, 18\}$, $\{6, 13, 9, 18\}$, $\{6, 9, 18\}$

۶- در هر مورد بررسی کنید زنجیر با خاصیت داده شده وجود دارد یا خیر.

- (الف) زنجیر شامل دو زیرمجموعه یک عضوی متمایز.
(ب) زنجیر شامل دو زیرمجموعه دو عضوی متمایز.

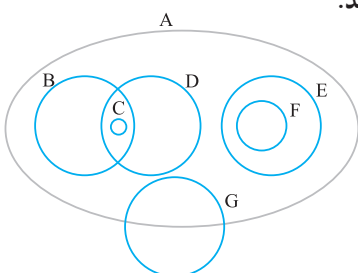
۷- فرض کنید $X = \{4, 6, 8, 10, 3\}$. سه زیرمجموعه از X مثال بزنید که به همراه دو زیرمجموعه $\{6\}$ و $\{10, 3, 6\}$ تشکیل یک زنجیر پنج تایی دهند.

۸- فرض کنید $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. دو زیرمجموعه $\{7\}$ و $\{4, 6, 2, 7\}$ از مجموعه A را در نظر بگیرید. حداکثر چند زیرمجموعه متفاوت دیگر از A به همراه این دو زیرمجموعه تشکیل یک زنجیر می‌دهند؟

۹- فرض کنید $A = \{1, 2, 3, 4, \dots, 26\}$. تعداد زیرمجموعه‌هایی از A که ۲۶ را دارند بیشتر است یا تعداد زیرمجموعه‌هایی از A که ۲۶ را ندارند؟

۱۰- تعداد زیرمجموعه‌های $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. چند برابر تعداد زیرمجموعه‌های $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ است؟

۱۱- در نمودار ون زیر هیچ ناحیه‌ای تهی نیست. درستی عبارت‌های داده شده را بررسی کنید.



- (الف) $B \subset A$ (ب) $E \subset F$
(ج) $C \subset D$ (د) $G \subset A$
(ه) $F \not\subset A$ (و) $G \not\subset B$

(ز) تنها زیرمجموعه دو مجموعه از مجموعه‌های نامگذاری شده در نمودار است.

(ح) تنها زیرمجموعه چهار مجموعه از مجموعه‌های نامگذاری شده در نمودار است.

۱۲- A و B دو زیرمجموعه از اعداد طبیعی چهاررقمی هستند. مجموعه A شامل اعدادی است که حاصل ضرب ارقامشان برابر ۲۵ باشد و مجموعه B شامل اعدادی است که حاصل ضرب ارقامشان برابر ۲۷ باشد. نسبت تعداد عضوهای مجموعه A به تعداد عضوهای مجموعه B را به دست آورید.

۱۳- فرض کنید A مجموعه اعداد دو رقمی باشد. اگر B زیرمجموعه‌ای از A باشد که عضوهای آن به صورت $7k$ باشد و $k \in A$ ، آنگاه B چند عضو دارد؟ حاصل جمع اعضای B چیست؟

۱۴- اعضای مجموعه‌های زیر را بنویسید.

الف) $\{x \mid x \in \mathbb{Z}, x^2 + 1 = 0\}$

ب) $\{x \mid x \in \mathbb{Z}, 5x + 2 = 5 - 2x\}$

ج) $\{x \mid x \in \mathbb{Z}, x(x-1) + 1 = x^2 - x + 1\}$

۱۵- اعضای مجموعه‌های زیر را مشخص کنید.

الف) $\{x \mid x \in \mathbb{N}\}$

ب) $\{x \mid x - 5 \in \mathbb{N}\}$

ج) $\{x \mid x - 5 \in \mathbb{N}, \frac{x}{2} \in \mathbb{N}\}$

د) $\{x + 4 \mid x - 5 \in \mathbb{N}, \frac{x}{2} \in \mathbb{N}\}$

۱۶- مجموعه‌های مساوی از ستون چپ و راست را به هم وصل کنید.

$\{2x - 1 \mid x \in \mathbb{Z}\} \bullet$

$\bullet \{-6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \dots\}$

$\{x^2 + 1 \mid x \in \mathbb{N}\} \bullet$

$\bullet \{\dots, -5, -3, -1, 1, 3, 5, \dots\}$

$\{3x^2 - 2 \mid x \in \mathbb{Z}\} \bullet$

$\bullet \{-2, 1, 10, 25, 46, \dots\}$

$\{2x \mid x + 4 \in \mathbb{N}\} \bullet$

$\bullet \{2, 5, 10, 17, 26, \dots\}$

$\{x \mid 2x \in \mathbb{N}, x \geq 4\} \bullet$

$\bullet \left\{4, \frac{9}{2}, 5, \frac{11}{2}, \dots\right\}$

۱۷- در هر دایره عدد صحیح مناسب قرار دهید.

الف) $\{3x - 1 \mid x \in \mathbb{Z}, x \geq -2\} = \{-7, -4, \bigcirc, \bigcirc, \bigcirc, \dots\}$

ب) $\{2x + \bigcirc \mid x \in \mathbb{Z}, x \geq 4\} = \{-5, \bigcirc, -1, 1, \bigcirc, \bigcirc, \dots\}$

ج) $\{\bigcirc x + 2 \mid x \in \mathbb{Z}, \bigcirc \leq x \leq \bigcirc\} = \{8, \bigcirc, 14, 17, \bigcirc, \bigcirc, \dots, 1397\}$

د) $\{\bigcirc x + \bigcirc \mid x \in \mathbb{Z}, 1 \leq x \leq \bigcirc\} = \{\bigcirc, 11, 15, \bigcirc, \bigcirc, \dots, 1399\}$

۱۸- در هر قسمت نشان دهید که $B \subseteq A$.

الف) $A = \{3x \mid x \in \mathbb{N}\}$

$B = \{6x \mid x \in \mathbb{N}\}$

ب) $A = \{3x + 1 \mid x \in \mathbb{N}\}$

$B = \{6x + 1 \mid x \in \mathbb{N}\}$

۱۹- مجموعه‌های برابر را از ستون چپ و راست به هم وصل کنید.

$\left\{\frac{x+5}{3} \mid x \in \mathbb{N}\right\} \bullet$

$\bullet \left\{x \mid \frac{x+5}{3} \in \mathbb{N}\right\}$

$$\begin{aligned} & \bullet \left\{ x \mid \frac{x-3}{5} \in \mathbb{N} \right\} \\ & \bullet \{ 3x-5 \mid x \in \mathbb{N} \} \\ & \bullet \{ x \mid 5x+3 \in \mathbb{N} \} \\ & \bullet \left\{ \frac{x-3}{5} \mid x \in \mathbb{N} \right\} \\ & \bullet \{ x \mid 3x-5 \in \mathbb{N} \} \end{aligned}$$

۲۰- درستی عبارتهای زیر را بررسی کنید.

- (الف) مجموعه اعداد اول دو رقمی متناهی است.
(ب) مجموعه تمام اعداد بین صفر و یک نامتناهی است.
(ج) هر زیرمجموعه از یک مجموعه متناهی، متناهی است.
(د) هر زیرمجموعه از یک مجموعه نامتناهی، نامتناهی است.
(ه) اشتراک دو مجموعه متناهی، حتماً متناهی است.
(و) اجتماع دو مجموعه نامتناهی، نامتناهی است.
(ز) اگر A و B نامتناهی باشند، $A-B$ متناهی است.

درس سوم: اجتماع، اشتراک و تفاضل مجموعه‌ها

گام اول: آنچه خوانده‌اید

- اشتراک دو مجموعه، مجموعه‌ای است شامل همهٔ عضوهای که هم در A هستند و هم در B که با نماد $A \cap B$ نشان می‌دهیم.
 $A \cap B = \{x \mid x \in A, x \in B\}$
- اجتماع دو مجموعه، مجموعه‌ای است شامل همهٔ عضوهای که حداقل در یکی از دو مجموعه A و B باشند که با نماد $A \cup B$ نشان می‌دهیم.
 $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ یا } x \in B\}$
- تفاضل مجموعه‌ها: مجموعهٔ « A منهای B » مجموعه‌ای است شامل همهٔ عضوهای A که در B نیستند و آن را با نماد $A - B$ نمایش می‌دهیم.
 $A - B = \{x \mid x \in A, x \notin B\}$
- تعداد اعضای مجموعهٔ A را با نماد $n(A)$ نشان می‌دهیم.

گام دوم: یادگیری عمیق‌تر

اشتراک و اجتماع بین چند مجموعه

- اشتراک چند مجموعه، مجموعه‌ای است شامل تمامی عضوهای مشترک در همهٔ آن‌ها.
- اجتماع چند مجموعه، مجموعه‌ای است شامل تمامی عضوهای که حداقل در یکی از مجموعه‌ها باشد. به‌عنوان مثال اگر $A = \{1, 2, 3\}$ ، $B = \{2, 3, 4\}$ و $C = \{3, 4, 5\}$ ، آن‌گاه:

$$A \cap B \cap C = \{3\} \quad A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

● تفاضل دو مجموعه: همان‌طور که در کتاب، در تعریف تفاضل دو مجموعه گفته شده است $A - B$ مجموعه‌ای است شامل عضوهایی از A که عضو B نیستند. به عبارت ساده‌تر، $A - B$ یعنی مجموعه به جا مانده از حذف اعضای نفوذی از مجموعه A . یعنی عضوهایی که از مجموعه B به داخل مجموعه A نفوذ پیدا کرده‌اند، از مجموعه A حذف می‌شوند.

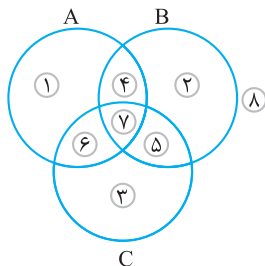
تفاضل بین دو مجموعه

مثال

اگر $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ و $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$ باشد، آن‌گاه $A - B$ را به دست آورید.
پاسخ: در این مثال، عضوهای ۳، ۴ و ۵ به علت اینکه در مجموعه B نیز عضو هستند، نفوذی محسوب شده و از A حذف می‌شوند.
 $A - B = \{1, 2\}$

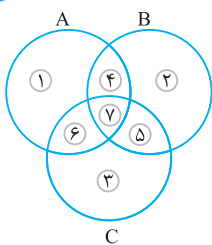
نمودار ون برای سه مجموعه

● نمودار ون سه مجموعه در حالت کلی به صورت زیر است. تمام حالات ممکن برای سه مجموعه A و B و C را در زیر بررسی می‌کنیم.

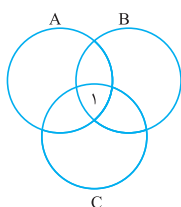


- اعداد داخل دایره‌های کوچک، نشان‌دهنده شماره ناحیه مربوطه هستند.
- ناحیه ۱: عضوهایی که فقط در A هستند. $(A - (B \cup C))$
 - ناحیه ۲: عضوهایی که فقط در B هستند. $(B - (A \cup C))$
 - ناحیه ۳: عضوهایی که فقط در C هستند. $(C - (A \cup B))$
 - ناحیه ۴: عضوهایی که در A و B هستند ولی در C نیستند. $((A \cap B) - C)$
 - ناحیه ۵: عضوهایی که در B و C هستند ولی در A نیستند. $((B \cap C) - A)$
 - ناحیه ۶: عضوهایی که در A و C هستند ولی در B نیستند. $((A \cap C) - B)$
 - ناحیه ۷: عضوهایی که هم در A هستند و هم در B و هم در C . $(A \cap B \cap C)$
 - ناحیه ۸: عضوهایی که نه در A هستند نه در B و نه در C .

مثال

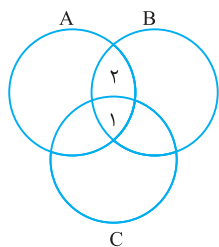


اعضای سه مجموعه $A = \{1, 2, 7, 8\}$ و $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 9\}$ و $C = \{1, 4, 6, 7, 9\}$ را در نمودار ون زیر قرار دهید.

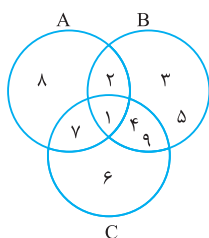


پاسخ: چون ۱ عضو هر سه مجموعه است، پس در ناحیه شماره ۷ قرار می‌گیرد.

چون ۲ فقط در دو مجموعه A و B قرار دارد، پس در ناحیه ۴ نوشته می‌شود.

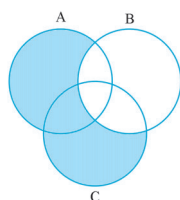


با همین روش می‌توان تک تک نواحی را کامل کرد. بنابراین:

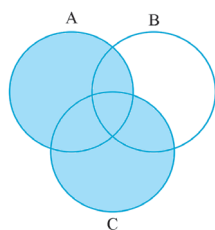


مثال

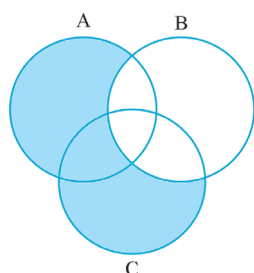
سه مجموعه $A = \{1, 2, 4, 5\}$ ، $B = \{2, 3, 4, 6\}$ و $C = \{4, 5, 6, 7\}$ را داریم. می‌خواهیم مجموعه‌ای که قسمت رنگ‌شده در نمودار زیر مشخص می‌کند را بنویسیم.



پاسخ: این مجموعه عبارت است از $(A \cup C) - B$. زیرا $A \cup C$ برابر است با:



و در نتیجه $(A \cup C) - B$ برابر است با:



$$A \cup C = \{1, 2, 4, 5, 6, 7\}$$

بنابراین داریم:

$$(A \cup C) - B = \{1, 5, 7\}$$

و در نتیجه:

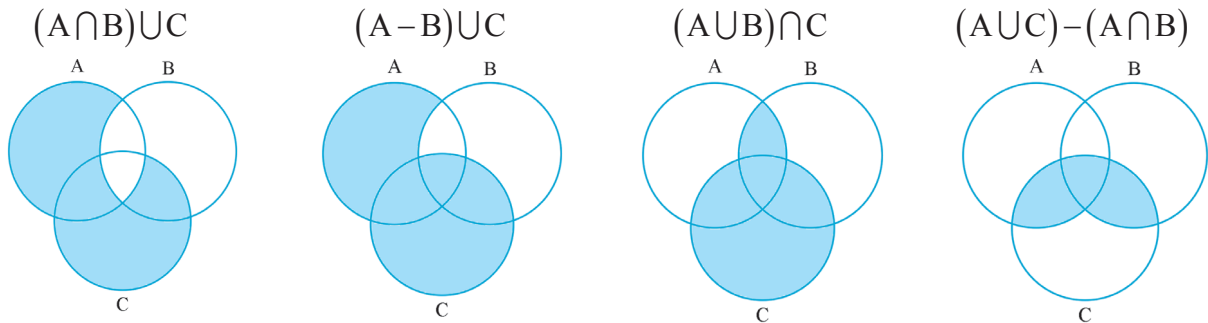
نماد مجموعه‌های معروف

برای مجموعه‌هایی خاص مانند اعداد طبیعی، حسابی، صحیح، گویا و حقیقی که در فصل‌های بعدی به طور مفصل راجع به آن‌ها حرف خواهیم زد، به ترتیب از نمادهای $\mathbb{N}$ ، $\mathbb{Z}$ ، $\mathbb{Q}$ ، $\mathbb{R}$ استفاده می‌کنیم و می‌دانیم

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{W} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$$

تمرین‌های پیمانه‌ای

۱- نمودار ون مربوط به هر مجموعه را به مجموعه‌اش وصل کنید.



۲- اگر $A = \{3, 9, a\}$ و $B = \{8, 2, 3, b, e\}$ و $A \cup B = \{8, 2, 3, 9, 5, 1, c\}$ ، آن‌گاه مقدار $a + b + c$ را به دست آورید.

۳- برای سه مجموعه $A = \{2, 4, 6, 8, 9\}$ ، $B = \{1, 4, 5, 6, 8\}$ و $C = \{1, 2, 3, 4, 7\}$ تعداد اعضای مجموعه‌های خواسته شده را بنویسید.

الف) $n(A \cup B) =$

ب) $n(B - C) =$

ج) $n(A \cap B \cap C) =$

د) $n((A \cup B) - (A \cap C)) =$

۴- در هر قسمت، مجموعه A را تعیین کنید به طوری که مجموع اعضای A برابر ۱۸ باشد.

الف) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ $B = \{2, 3, 4, 5\}$

ب) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $A \cap B = \{2, 4\}$

ج) $A - B = \{1, 5\}$ $B = \{2, 3, 4, 6\}$

۵- اجتماع دو مجموعه A و B ، ۲۵ عضو دارد. به مجموعه A ، ۲۳ عضو جدید اضافه کرده‌ایم. به اشتراک آن‌ها ۱۵ عضو اضافه شده است. اجتماع مجموعه B و مجموعه جدید حاصل از A چند عضو دارد؟

۶- حاصل عبارت‌های زیر را به زبان ریاضی نمایش دهید.

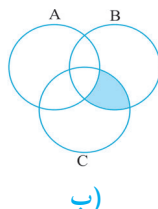
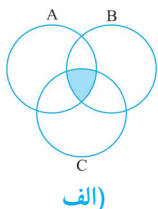
الف) $\{2x - 1 \mid x \in \mathbb{N}\} \cup \{2x \mid x \in \mathbb{N}\}$

ب) $\{3x + 1 \mid x \in \mathbb{N}\} \cap \{6x + 1 \mid x \in \mathbb{N}\}$

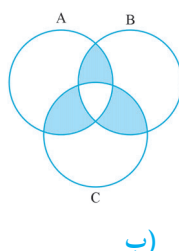
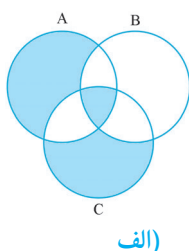
ج) $\{5x \mid x \in \mathbb{N}\} \cap \{4x \mid x \in \mathbb{N}\}$

د) $\{6x - 5 \mid x \in \mathbb{N}\} \cup \{6x - 2 \mid x \in \mathbb{N}\}$

۷- فرض کنید A مجموعه تمام اعداد طبیعی زوج، B مجموعه تمام اعداد طبیعی مضرب ۳ و C مجموعه تمام اعداد طبیعی مضرب پنج باشد. در هر نمودار اعضای مجموعه مشخص شده را توصیف کنید.



۸- سه مجموعه $A = \{1, 7, 8, 9, 10, 12\}$ ، $B = \{4, 5, 7, 8, 9, 10, 11\}$ و $C = \{9, 10, 11, 12, 13\}$ را در نظر بگیرید. در هر مورد اعضای مجموعه‌ای که نمودار ون مشخص می‌کند را بنویسید.



۹- تعدادی دانش‌آموز نمودارهای زیر را کشیده‌اند.

«علی»	«ابراهیم»	«فرهاد»	«مانی»
«مریم»	«ندا»	«زهرا»	«مژده»

در هر مورد کدام نمودارها می‌تواند نمودار ون مجموعه‌های داده شده باشد.

(الف) $A = \{1, 2, 4, 5\}$

$B = \{2, 3, 5, 6\}$

$C = \{4, 5, 6, 7\}$

(ب) $A = \{1, 2, 6\}$

$B = \{2, 3, 4\}$

$C = \{4, 5, 7\}$

(ج) $A = \{1, 2, 6\}$

$B = \{2, 3, 4, 7\}$

$C = \{4, 5, 6, 7\}$

(د) $A = \{1, 2, 3, 5, 6\}$

$B = \{2, 3, 4, 7\}$

$C = \{4, 5, 6, 7\}$

۱۰- در نمودار ون برای هشت مجموعه در حالت کلی چند ناحیه متفاوت وجود دارد؟

۲۵۶ (۴)

۸۰ (۳)

۶۴ (۲)

۱۶ (۱)

درس چهارم: مجموعه‌ها و احتمال

گام اول: آنچه خوانده‌اید

اگر مجموعه شامل همه حالت‌های ممکن را S و مجموعه شامل همه حالت‌های مطلوب را A (پیشامد A) و احتمال رخ دادن پیشامد A را با نماد $P(A)$ نشان دهیم، آنگاه:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

گام دوم: یادگیری عمیق‌تر

مساحت: معیاری برای محاسبه احتمال

بعضی مسائل هستند که برای محاسبه احتمال در آن‌ها نمی‌توان از شمارش تعداد حالات ممکن استفاده کرد و مجبور به استفاده از معیارهای اندازه‌گیری دیگری مانند مساحت هستیم. به مثال زیر توجه کنید.

مثال



در چرخنده مقابل احتمال اینکه عقربه روی ناحیه ۱ بایستد چقدر است؟

پاسخ:

نسبت مساحت ناحیه ۱ به کل دایره، همان نسبت زاویه مرکزی مربوط به ناحیه ۱ به کل دایره (360°) است. بنابراین:

$$P(1) = \frac{90^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{4}$$

تمرین‌های پیمانه‌ای

۱- سکه‌ای را چهار بار پرتاب کرده‌ایم.

(الف) همه حالت‌های ممکن را بنویسید. (ب) احتمال اینکه بار سوم رو آمده باشد چقدر است؟

۲- سکه‌ای را چهار بار پرتاب کرده‌ایم. می‌دانیم بار دوم رو آمده است.

(الف) همه حالت‌های ممکن را بنویسید. (ب) احتمال اینکه دقیقاً دو بار رو آمده باشد چقدر است؟

۳- سکه‌ای را چهار بار پرتاب کرده‌ایم. می‌دانیم حداقل دو بار رو آمده است.

(الف) همه حالت‌های ممکن را بنویسید. (ب) احتمال اینکه دقیقاً سه بار رو آمده باشد چقدر است؟

۴- یک زیرمجموعه به تصادف از مجموعه $A = \{1, 2, 3, \dots, 100\}$ انتخاب می‌کنیم. احتمال اینکه ۱ عضو زیرمجموعه انتخاب شده باشد چقدر است؟

۵- شش گوی با شماره‌های ۱ تا ۶ در یک کیسه قرار دارند. مهرداد ۲ گوی را از این کیسه خارج می‌کند.

(الف) همه حالت‌های ممکن را بنویسید.

(ب) چقدر احتمال دارد مجموع اعداد روی دو گوی ۴ باشد.

(ج) چقدر احتمال دارد مجموع اعداد روی دو گوی ۵ باشد.

(د) چقدر احتمال دارد حاصل ضرب اعداد روی دو گوی عددی اول باشد.

۶- شش گوی با شماره‌های ۱ تا ۶ در یک کیسه قرار دارند. بهداد یک گوی از کیسه خارج کرده و شماره آن را یادداشت می‌کند.

سپس گوی را به کیسه باز می‌گرداند و یک‌بار دیگر یک گوی از کیسه خارج می‌کند و باز شماره آن را یادداشت می‌کند.

(الف) همه حالت‌های ممکن را بنویسید.

(ب) چقدر احتمال دارد مجموع اعداد روی دو گوی ۴ باشد؟

(ج) چقدر احتمال دارد مجموع اعداد روی دو گوی ۵ باشد؟

(د) چقدر احتمال دارد حاصل ضرب اعداد روی دو گوی عددی اول باشد؟

۷- در نیمه نخست مسابقه فوتبال بین دو تیم «الف» و «ب» سه گل زده شد و تیم «الف» برنده به رختکن رفت. می‌دانیم در نیمه

دوم حداکثر چهار گل زده شده و حداقل نصف گل‌های این نیمه را تیم «ب» به تیم «الف» زده است. احتمال تساوی در این

بازی چقدر است؟

۸- هفت سیب را می‌خواهیم بین پنج نفر به نام‌های احمد، محمود، رضا، شهاب و حسین طوری توزیع کنیم که به هر نفر یا یک

سیب یا دو سیب برسد.

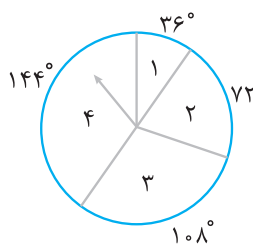
(الف) چقدر احتمال دارد که به احمد، دو سیب برسد؟

(ب) چقدر احتمال دارد که به احمد دو سیب و به محمود یک سیب برسد؟

(ج) چقدر احتمال دارد که هم به احمد و هم به محمود یک سیب برسد؟

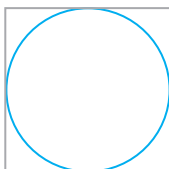
(د) چقدر احتمال دارد که در مجموع به احمد و محمود سه سیب برسد؟

۹- در چرخنده مقابل احتمال این که عقربه روی عدد فرد قرار گیرد چقدر است؟



۱۰- در شکل زیر دایره در مربع محاط شده است. یک تیر به این مربع شلیک می‌کنیم. احتمال اینکه تیر درون دایره برخورد

کرده باشد چقدر است؟





درس اول (معرفی مجموعه)

- ۱ الف) ۲ عضو (ب) ۳ عضو (ج) ۱۳۹۷ عضو (د) ۲ عضو
- ۲ الف) نادرست (ب) درست (ج) درست (د) نادرست (ه) درست (و) نادرست
- ۳ الف) $\{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$ (ب) $\{20, 40, 60, 80, \dots\}$
- ۴ الف) مجموعه معرفی می‌کند. زیرا تکلیف عضویت تمام اعداد طبیعی نسبت به آن مشخص است.
 $A = \{20, 22, 24, 26, 28, 40, 42, 44, 46, 48, 60, 62, 64, 66, 68, 80, 82, 84, 86, 88\}$
 (ب) مجموعه معرفی می‌کند. زیرا تکلیف عضویت هر عدد طبیعی در آن مشخص است.
 $B = \{100, 101, 102, \dots, 199\}$
 (ج) مجموعه معرفی می‌کند.
 $C = \{2, 3, 5, 7\}$
 (د) مجموعه معرفی نمی‌کند. زیرا چهار پاسخ برای این عبارت وجود دارد و نمی‌توان یک پاسخ یکتا برای آن یافت. یعنی تکلیف عضویت هر عدد اول یک رقمی در آن مشخص نیست.
 پاسخ‌های ممکن:
 $\{2, 3, 5\}$ $\{2, 3, 7\}$ $\{2, 5, 7\}$ $\{3, 5, 7\}$
 (ه) مجموعه معرفی می‌کند. دقت کنید که در این عبارت منظور از چهار عدد اول یک رقمی همان تمام اعداد اول یک رقمی است. پس همان مجموعه قسمت «ج» را مشخص می‌کند.
 $D = \{1\}$ (و) مجموعه معرفی می‌کند.
 (ز) مجموعه تهی را معرفی می‌کند. دقت کنید که هیچ عددی وجود ندارد که «کوچک‌ترین عدد گویای مثبت» باشد.
 (ح) مجموعه معرفی می‌کند. عدد ۱ حتماً باید یکی از این سه عدد باشد. زیرا اگر ۱ نباشد، در کمترین مجموع ممکن به $2 + 3 + 4 = 9$ می‌رسیم. به همراه عدد ۱، حتماً باید عدد ۲ هم باشد. زیرا اگر ۲ نباشد، در کمترین مجموع ممکن به $1 + 3 + 4 = 8$ می‌رسیم.
 بنابراین با روشن شدن تکلیف حضور دو عدد ۱ و ۲، تکلیف عدد سوم نیز مشخص می‌شود، $1 + 2 + 4 = 7$. یعنی عدد سوم باید ۴ باشد. بنابراین مجموعه مورد نظر $\{1, 2, 4\}$ است و باقی اعداد نمی‌توانند در این مجموعه باشند.

ط) مجموعه معرفی نمی‌کند. با توجه به توضیحات قسمت قبل، دو پاسخ متفاوت برای این عبارت وجود دارد.
 $\{1, 2, 3, 6\}$ $\{1, 2, 4, 5\}$
 چون برای این عبارت مجموعه یکتایی وجود ندارد، بنابراین این عبارت مجموعه‌ای را معرفی نمی‌کند.

۵ الف) $\frac{1}{5}, \frac{2}{4}, \frac{3}{3}, \frac{4}{2}, \frac{5}{1}$

ب) $\frac{2}{3}$ و $\frac{3}{4}$ تکرار عضو $\frac{1}{2}$ است. $\frac{2}{4}$ و $\frac{3}{6}$ تکرار عضو $\frac{1}{2}$ است. کسرهای ساده شدنی، تکرار کسرهای ساده‌نشده هستند.

ج) اعداد گویای مثبت

۶ الف) درست (ب) درست (ج) درست (د) نادرست
 هـ) نادرست (و) درست (ز) نادرست (ح) نادرست

۷ X نمی‌تواند ۵ باشد. زیرا اگر X برابر ۵ باشد هم ۵ عضو A می‌شود و هم عضو A نمی‌شود. پس $X \neq 5$.
 به‌همین ترتیب X و $7 - X$ نمی‌توانند با هم برابر باشند.

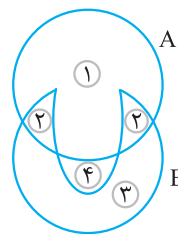
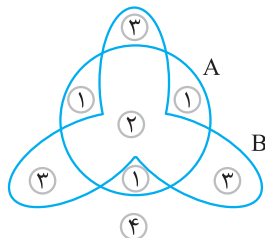
$$X \neq 7 - X \Rightarrow X \neq \frac{7}{2}$$

و همچنین $7 - X$ نمی‌تواند برابر ۵ باشد. پس:

$$7 - X \neq 5 \Rightarrow X \neq 2$$

بنابراین X نمی‌تواند ۵ و $\frac{7}{2}$ و ۲ باشد.

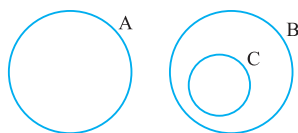
۸ بله یک واقعیت را نشان می‌دهند. هر دو شکل نمودار ون دو مجموعه A و B در حالت کلی هستند.



۹ در نمودار «الف» $5 \in A$ است. بنابراین «الف» نمی‌تواند نمودار ون مجموعه A باشد.

نمودارهای «ب» و «ج» نمودار ون A می‌باشند.

۱۰ نمودارهایی که یک مجموعه به‌طور کامل درون مجموعه‌ای دیگر قرار بگیرد، نمی‌تواند مثال درستی برای سه مجموعه A و B و C باشد. مانند مثال زیر:



زیرا در مثال بالا عدد ۳ هم در مجموعه C قرار می‌گیرد و هم در مجموعه B. و این نادرست است. زیرا عدد ۳ نباید درون مجموعه B قرار بگیرد.

درس دوم (مجموعه‌های برابر و نمایش مجموعه‌ها)

۱

$$A = B$$

$$C = E$$

$$D = F$$

۲

(الف) $\{4\}$ $\{1\}$ $\{6\}$ $\{3\}$

(ب) $\{1,4\}$ $\{6,4\}$ $\{6,1\}$ $\{3,4\}$ $\{3,1\}$ $\{3,6\}$

(ج) $\{4,5\}$ $\{1,5\}$ $\{6,5\}$ $\{3,5\}$

$\{1,4\}$ $\{6,4\}$ $\{6,1\}$ $\{3,4\}$ $\{3,1\}$ $\{3,6\}$

توجه داشته باشید که در پاسخ به این قسمت، از دو قسمت «الف» و «ب» استفاده کرده‌ایم. چگونه؟!!

۳

چون $\{2,3,5\}$ زیرمجموعه B است پس حتماً ۲ و ۳ و ۵ باید در B حضور داشته باشند. از طرفی چون $\{2,3,4\}$ زیرمجموعه B نیست، می‌توان نتیجه گرفت که ۴ نباید در B حضور داشته باشد. پس تکلیف ۲ و ۳ و ۴ و ۵ برای عضویت در B روشن است. می‌ماند ۱، که هم می‌توان ۱ را در B قرار داد و هم می‌توان ۱ را در B قرار نداد. بنابراین پاسخ‌های ممکن برای B عبارت‌اند از:

$$B = \{2,3,5\} \quad \text{یا} \quad B = \{1,2,3,5\}$$

۴

(الف) درست

(ب) درست

(ج) نادرست. تهی تنها یک زیرمجموعه دارد.

(د) نادرست. با اضافه شدن سه عضو، تعداد زیرمجموعه‌ها سه بار دو برابر خواهد شد. یعنی با اضافه شدن سه عضو تعداد زیرمجموعه‌ها هشت برابر خواهد شد.

(ه) نادرست. به پاسخ قسمت «ج» نگاه کنید.

۵

(الف) چون رابطه زیرمجموعه بودن بین دو مجموعه $\{6,9\}$ و $\{13,9,18\}$ وجود ندارد، پس در این حالت مجموعه‌های داده شده زنجیر نیستند.

(ب) مجموعه‌های داده شده زنجیر هستند.

$$\{18\} \subset \{9,18\} \subset \{6,9,18\} \subset \{6,13,9,18\}$$

۶

(الف) واضح است که زیرمجموعه‌های یک عضو متمایز نمی‌توانند زیرمجموعه یکدیگر باشند. بنابراین زنجیر که دو زیرمجموعه یک عضو داشته باشد وجود ندارد.

(ب) زیرمجموعه‌های دو عضو متمایز نمی‌توانند زیرمجموعه یکدیگر باشند. بنابراین زنجیر که دو زیرمجموعه دو عضو داشته باشد وجود ندارد.

در کل دو مجموعه‌ای که تعداد اعضای برابر دارند نمی‌توانند زیرمجموعه یکدیگر باشند، مگر اینکه با هم برابر باشند.

۷

یکی از پاسخ‌های ممکن به این صورت است.

$$\{6,10\}, \{6,3,10,8\}, \{6,4,10,3,8\}$$

$$\{6\} \subset \{6,10\} \subset \{10,6,3\} \subset \{6,3,10,8\} \subset \{6,4,10,3,8\}$$