



نسبت و تناسب

کارت ۱
پودمان ۱

* نسبت عدد حقیقی x به عدد حقیقی y ($y \neq 0$) را با کسر

نشان می‌دهند. اگر بین دو کسر تساوی برقرار باشد، به $\frac{x}{y}$

آن تناسب می‌گویند. در حالت کلی دو نسبت $\frac{m}{n}$ و $\frac{x}{y}$

($n, y \neq 0$) مساوی‌اند، هرگاه برای یک عدد مخالف صفر

مانند K داشته باشیم:

$$\begin{cases} m = nK \\ x = yK \end{cases} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{m}{n} = K$$

مثال: در تساوی‌های زیر، مقدار مجهول‌ها را به دست آورید.

الف) $\frac{3}{5} = \frac{x+1}{15} = \frac{6}{2y-1}$

ب) $\frac{12}{x+y} = \frac{8}{10} = \frac{y+4}{25}$



(پاسخ الف)

$$\frac{3}{5} = \frac{x+1}{15} \text{ طرفین وسطین می کنیم.} \rightarrow 5x + 5 = 45$$

$$\Rightarrow 5x = 40 \Rightarrow x = 8$$

$$\frac{3}{5} = \frac{6}{2y-1} \text{ طرفین وسطین می کنیم.} \rightarrow 6y - 3 = 30$$

$$\Rightarrow 6y = 33 \Rightarrow y = \frac{33}{6} = \frac{11}{2} = 5.5$$

$$\frac{y+4}{25} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5} \text{ طرفین وسطین می کنیم.} \rightarrow 5y + 20 = 100 \text{ (ب)}$$

$$\Rightarrow 5y = 80 \Rightarrow y = 16 \xrightarrow{y=16} \frac{12}{x+16} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

$$\text{طرفین وسطین می کنیم.} \rightarrow 4x + 64 = 60 \Rightarrow 4x = -4$$

$$\Rightarrow x = -1$$



نسبت‌های مستقیم

کارت ۲
پودمان ۱

* به نسبت‌هایی که بین دو کمیت برقرار هستند به طوری که با افزایش یکی، دیگری نیز افزایش می‌یابد و با کاهش یکی، دیگری نیز کاهش می‌یابد، نسبت‌های مستقیم می‌گویند. مانند مدت زمان یک مکالمه تلفنی و هزینه مالی آن که با هم رابطه مستقیم دارند.

مثال: در موارد زیر مشخص کنید کدام رابطه‌ها نسبت مستقیم دارند؟

(الف) مسافت طی شده و زمان سپری شده برای اتومبیلی که با سرعت ثابت در حال حرکت است.

(ب) وزن میوه و قیمت کل آن

(پ) تعداد تماشاچیان در سینما و درآمد حاصل از فروش بلیط

(ت) اختلاف سنی پدر و فرزند با گذشت زمان



پاسخ)

الف) هرچه زمان بیش‌تری سپری شود، مسافت بیش‌تری نیز طی می‌شود، پس رابطه مستقیم دارند.

ب) هرچه وزن بیش‌تر شود، قیمت کل میوه نیز بیش‌تر می‌شود، پس رابطه مستقیم دارند.

پ) هرچه تعداد تماشاچیان سینما بیش‌تر شود، درآمد حاصل از فروش بلیط نیز بیش‌تر می‌شود، پس رابطه مستقیم دارند.

پ) با گذشت زمان، اختلاف سنی بین پدر و فرزند همواره ثابت است و تغییری نمی‌کند. پس رابطه مستقیم ندارند.



ضریب تبدیل واحد

کارت ۳
پودمان ۱

* اگر هر واحد A برابر K واحد B باشد، آن گاه $\frac{1}{K}$ را ضریب

تبدیل واحد B به واحد A و K را ضریب تبدیل واحد A به واحد B می گویند. به طور مثال هر متر برابر ۱۰۰ سانتی متر

است. پس $\frac{1}{۱۰۰}$ ضریب تبدیل سانتی متر به متر و ۱۰۰

ضریب تبدیل متر به سانتی متر است.

مثال: الف) ضریب تبدیل میلی متر به سانتی متر را به دست آورید.

ب) ضریب تبدیل کیلومتر به متر را به دست آورید.

پ) ۳۵۰ متر چند سانتی متر است؟

ت) ۸۰ سانتی متر چند متر است؟

ث) $\frac{۳}{۵}$ متر چند سانتی متر است؟



ضریب تبدیل واحد

کارت ۳
پودمان ۱

پاسخ

(الف) هر سانتی متر برابر ۱۰ میلی متر است، پس ضریب تبدیل

میلی متر به سانتی متر برابر $\frac{1}{10}$ است.

(ب) هر کیلومتر ۱۰۰۰ متر است، پس ضریب تبدیل کیلومتر به

متر برابر ۱۰۰۰ است.

(پ) سانتی متر $350 \times 100 = 35000$

(ت) متر $80 \times \frac{1}{100} = 0/8$

(ث) سانتی متر $\frac{3}{5} \times 100 = 60$



کمیت‌های هم‌جنس و غیر هم‌جنس

کارت ۴
پودمان ۱

* نسبت‌هایی که رابطه بین دو کمیت مانند دو طول، دو وزن، دو مساحت و یا دو حجم را بیان می‌کنند، نسبت‌های بین دو کمیت هم‌جنس می‌گویند و نسبت به‌دست آمده واحد ندارد. اما نسبت‌هایی که رابطه بین دو کمیت غیرهم‌جنس مانند مسافت طی شده در زمان سپری شده یا مصرف بنزین در مسافت طی شده را بیان می‌کنند دو کمیت غیرهم‌جنس می‌گویند و نسبت بین آن‌ها دارای واحد است.

مثال: الف) یک واحد برای مسافت طی شده در زمان سپری شده برای اتومبیل بیان کنید.

ب) یک واحد برای مصرف بنزین در مسافت طی شده بیان کنید.

پ) اگر هر گونی سیب‌زمینی ۵ کیلوگرم باشد و به قیمت ۲۰ هزار تومان به فروش برسد، نسبت قیمت سیب‌زمینی به وزن آن برابر هزار تومان به کیلوگرم است.



کمیت‌های هم‌جنس و غیر هم‌جنس

کارت ۴
پودمان ۱

پاسخ)

الف) در جاده مسافت طی شده در زمان سپری شده را با کیلومتر بر ساعت بیان می‌کنند.

ب) مصرف بنزین را با لیتر بر کیلومتر بیان می‌کنند.

پ) به ازای ۱ کیلوگرم سیب‌زمینی

$$\frac{5}{20} = \frac{1}{x} \Rightarrow x = 4$$

هر کیلو سیب‌زمینی ۴ هزار تومان است. پس:

قیمت سیب‌زمینی به وزن آن برابر ۴ هزار تومان به یک کیلوگرم است.



نرخ

کارت ۵
پودمان ۱

* نسبت بین دو کمیت متناسب با واحدهای مختلف را نرخ می‌نامند. مانند نرخ مسافت طی شده به مصرف بنزین، نرخ رشد جمعیت در سال، نرخ کالا به وزن آن، نرخ دلار به پوند و نرخ دلار به تومان

مثال ۱: اگر قیمت یک بسته پنیر ۳ کیلوگرمی ۴۲ هزار تومان باشد:

(الف) نرخ قیمت پنیر به وزن آن چقدر است؟

(ب) نرخ وزن پنیر به قیمت آن چقدر است؟

مثال ۲: اگر نرخ مسافت طی شده به مصرف بنزین ۱۲ کیلومتر در لیتر باشد، با ۲۰ لیتر بنزین چه مسافتی طی می‌شود؟

مثال ۳: ماشین A با طی ۱۰۰ کیلومتر ۹ لیتر و ماشین B با طی ۸۰ کیلومتر ۸ لیتر بنزین مصرف می‌کند. کدام ماشین کم مصرف تر است؟



پاسخ (۱) الف) هر کیلوگرم ۱۴ هزار تومان است. $\frac{۴۲}{۳} = ۱۴$

ب) $\frac{۳}{۴۲} = \frac{۱}{۱۴}$

با هر هزار تومان $\frac{۱}{۱۴}$ کیلوگرم پنیر می‌توان خرید.

پاسخ (۲)

نرخ مسافت طی شده به مصرف بنزین برابر ۱۲ کیلومتر در لیتر است. پس با هر لیتر ۱۲ کیلومتر می‌توان طی کرد. در نتیجه:
کیلومتر طی می‌شود $۱۲ \times ۲۰ = ۲۴۰$

پاسخ (۳)

$$(۱۱/۱ \simeq) \frac{۱۰۰}{۹} > \frac{۸۰}{۸} (= ۱۰)$$

بنابراین ماشین A کم‌مصرف‌تر است. چون نرخ مسافت به مصرف بنزین آن کم‌تر است.



روش رسم شکل در حل مسائل

کارت ۶
پودمان ۱

* برای حل مسائل می‌توان از رسم شکل استفاده کرد. به

مثال‌های زیر دقت کنید:

مثال ۱: نسبت ارزش هر یورو به دلار برابر ۳ به ۵ است. ۶۰ یورو

چند دلار است؟

مثال ۲: اگر ۵۲ هزار تومان معادل ۴ دلار باشد، نسبت ارزش هر

هزار تومان به دلار چقدر است؟



روش رسم شکل
در حل مسائل

کارت ۶
پودمان ۱

پاسخ ۱) اگر در برابر هر ۳ واحد یورو ۵ واحد دلار داشته باشیم، شکل زیر را می‌توان رسم کرد:

یورو

دلار

پس در مقابل ۳ واحد ۲۰ یورویی ۵ واحد ۲۰ دلاری خواهیم داشت:

یورو

دلار $\Rightarrow 5 \times 20 = 100$ دلار

پاسخ ۲) ۵۲ هزار تومان معادل ۴ دلار است. پس به ازای هر سیزده هزار تومان یک دلار داریم:

تومان

دلار

یعنی هر هزار تومان $\frac{1}{13}$ دلار است.



روش رسم نمودار در حل مسائل

کارت ۲
پودمان ۱

* در حل مسائل می‌توان از رسم نمودار هندسی روی محورهای

مختصات استفاده کرد. به مثال‌های زیر دقت کنید:

مثال ۱: برای تهیه مقداری شربت به ازای هر ۲ لیوان شربت

غلیظ، ۵ لیوان آب اضافه می‌کنیم. برای تهیه ۲۱ لیوان

شربت، چند لیوان شربت غلیظ و چند لیوان آب نیاز است؟

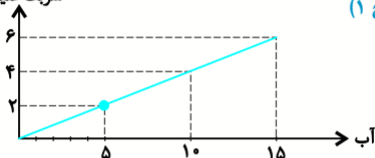
مثال ۲: قیمت ۳ واحد از یک کالا ۲۰ هزار تومان است. با ۴۰

هزار تومان چند واحد از این کالا می‌توان خرید؟



شربت غلیظ

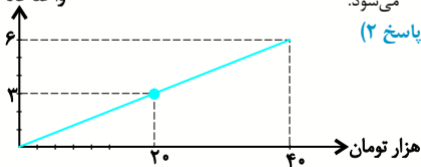
پاسخ (۱)



مطابق شکل به ازای ۶ لیوان شربت غلیظ ۱۵ لیوان آب استفاده می‌شود که در مجموع $(۱۵ + ۶ = ۲۱)$ لیوان شربت تهیه می‌شود.

واحد کالا

پاسخ (۲)



مطابق شکل به ازای ۴۰ هزار تومان ۶ واحد کالا می‌توان خرید.



روش جبری در حل مسائل

کارت ۸
پودمان ۱

* به کمک روش‌های جبری و تبدیل مسئله به یک مسئله جبری می‌توان مسائل را حل کرد. به مثال‌های زیر دقت کنید:

مثال ۱: در فروش اینترنتی بلیط یک بازی فوتبال در هر ۳۰ دقیقه ۲۰۰ بلیط فروخته می‌شود. پس از چند ساعت ۴۰ هزار بلیط فروخته می‌شود؟

مثال ۲: برای خرید ۵ دفتر و ۱۰ خودکار، ۵۰ هزار تومان پرداخت کرده‌ایم. با ۴۰ هزار تومان دیگر ۴ دفتر و چند خودکار می‌توان خرید کرد؟



روش جبری در حل مسائل

کارت ۸
پودمان ۱

پاسخ ۱) فرض کنیم در X دقیقه ۴۰ هزار بلیط فروخته شود،

پس:

$$\frac{۳۰}{۲۰۰} = \frac{X}{۴۰۰۰۰} \Rightarrow X = \frac{۴۰۰۰۰ \times ۳۰}{۲۰۰} = ۶۰۰۰ \text{ دقیقه}$$

هر ۶۰ دقیقه یک ساعت است، پس ۶۰۰۰ دقیقه ۱۰۰ ساعت می‌شود.

پاسخ ۲) قیمت دفتر را با X و قیمت خودکار را با Y نشان

می‌دهیم.

$$۵X + ۱۰Y = ۵۰۰۰۰ \xrightarrow{\div ۵} X + ۲Y = ۱۰۰۰۰$$

بنابراین قیمت یک دفتر و ۲ خودکار ۱۰ هزار تومان است.

$$\xrightarrow{\times ۴} ۴X + ۸Y = ۴۰۰۰۰$$

یعنی با ۴۰ هزار تومان ۴ دفتر و ۸ خودکار می‌توان خرید.



رابطهٔ جمعی

کارت ۹
پودمان ۱

* رابطهٔ بین دو کمیت که نسبت مستقیم دارند و با اضافه شدن K واحد به یکی به دیگری نیز K واحد اضافه می‌شود، مانند رابطهٔ بین سن پدر و فرزند که با اضافه شدن یک سال به سن فرزند، یک سال هم به سن پدر اضافه می‌شود، رابطهٔ جمعی می‌گویند.

تذکره: اگر بین دو کمیت A و B رابطهٔ $A = kB$ برقرار باشد، می‌گوییم بین A و B رابطهٔ ضربی برقرار است.

مثال ۱: وقتی آریا به دنیا آمد، پدرش ۲۸ سال داشت. اکنون مجموع سن آریا و پدرش ۴۶ سال است. سن آریا و پدرش اکنون چند سال است؟

مثال ۲: علی و احمد با سرعت برابر در یک مسیر دایره‌ای دوچرخه‌سواری می‌کنند. وقتی علی ۵ دور زده احمد ۸ دور زده است. اگر احمد دور ۱۷ را به پایان برساند علی دور چندم را به پایان رسانده است؟



پاسخ (۱)

$$۴۶ - ۲۸ = ۱۸$$

یعنی ۹ سال گذشته است و آریا ۹ سال دارد. $۱۸ \div ۲ = ۹$

$$۲۸ + ۹ = ۳۷ \text{ سن پدر آریا}$$

پاسخ (۲) چون سرعت هر دو نفر برابر است، پس همواره

$$(۳ = ۸ - ۵) \text{ دور احمد جلوتر از علی است. در نتیجه:}$$

$$۱۷ - ۳ = ۱۴$$

علی ۱۴ دور زده است.



نسبت‌های معکوس

کارت ۱۰
پودمان ۱

* در دو کمیت متناسب اگر با افزایش یکی، کمیت دیگر کاهش یابد و با کاهش یکی، کمیت دیگر افزایش یابد، این دو کمیت متناسب رابطه معکوس دارند. اگر a و b مقادیر متناظر دو کمیت متناسب با رابطه معکوس باشند، مقدار $K = a \times b$ ثابت است و اگر c و d دو مقدار متناظر دیگر از همین دو کمیت باشند، آن‌گاه:

$$K = a \times b = c \times d$$

مثال ۱: کار نقاشی یک ساختمان را ۲ کارگر در ۶ روز می‌توانند تمام کنند. اگر تعداد کارگرها ۳ نفر شود، این کار چند روز تمام می‌شود؟

مثال ۲: محمود هر شب ۴ صفحه از کتابی را مطالعه می‌کند. اگر به همین ترتیب ادامه دهد، کتاب در ۱۵ شب تمام می‌شود. اگر پس از شب پنجم هر شب ۵ صفحه بخواند، کتاب بعد از چند شب تمام می‌شود؟



$$K = 2 \times 6 = 12 \quad \text{پاسخ (۱)}$$

فرض کنیم سه کارگر کار را در X روز تمام می‌کنند. در نتیجه:

$$12 = 3 \times X \Rightarrow X = 4$$

کار ۴ روز تمام می‌شود.

$$K = 4 \times 15 = 60 \quad \text{پاسخ (۲)}$$

$$K = 4 \times 5 + 5 \times X$$

X تعداد شب‌هایی که ۵ صفحه خوانده است.

$$\Rightarrow 60 = 20 + 5X$$

$$\Rightarrow 5X = 40 \Rightarrow X = 8$$

در کل ۱۳ شب طول می‌کشد. $8 + 5 = 13$