پاسخ تشریحی: فرهاد حامی

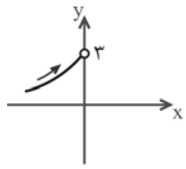
پاسخ فصل دوم

راهبرد حل تیپ (۱)

به قسمت «حد و نمودار» و «حد چپ و راست» در درس توجه کنید.

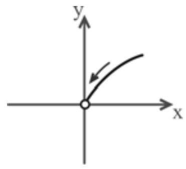
۱۳۰۱– گزینه‌ی «۴»

با توجه به نمودار:



$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=3$$

و



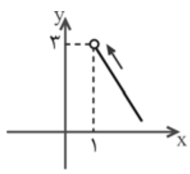
$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=0$$

پس:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)+\lim_{x\to 0^+} f(x)=3+0=3$$

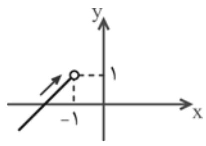
۱۳۰۲– گزینه‌ی «۳»

با توجه به نمودار:



$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=3$$

و



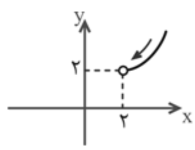
$$\lim_{x\to (-1)^-} f(x)=1$$

پس:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)-\lim_{x\to (-1)^-} f(x)=3-1=2$$

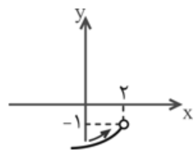
۱۳۰۳– گزینه‌ی «۴»

با توجه به نمودار:



$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=2$$

و



$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=-1$$

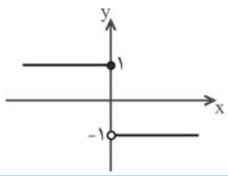
و $f(2)=3$، پس:

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)+\lim_{x\to 2^-} f(x)+f(2)=2-1+3=4$$

۱۳۰۴– گزینه‌ی «۲»

با رسم نمودار تابع می‌بینیم که

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=1$$



راهبرد حل تیپ (۲)

وقتی از حد تابع f در نقطه‌ی $x=a$ صحبت می‌کنیم فرض بر این است که تابع در همسایگی چپ یا راست (یا هر دو) نقطه‌ی a تعریف شده باشد.

تذکر: حد راست تابع در $x=a$ زمانی قابل محاسبه است کـه تـابع در بازه‌ی $(a\,,\,x)$ تعریف شده باشد و حد چپ تابع در $x=a$ زمانی قابـل محاسبه است که تابع در بازه‌ی $(x\,,\,a)$ تعریف شده باشد.

۱۳۰۵– گزینه‌ی «۱»

اگر تابعی در نقطه‌ی a حد داشته باشد، آنگاه حداقل در یک همسایگی چپ یا راست نقطه‌ی a کران‌دار است.

۱۳۰۶– گزینه‌ی «؟»

ابتدا دامنه‌ی تابع $f(x)=\dfrac{2\sin^2 x}{x^3\sin\frac{1}{2x}}$ را می‌یابیم:

$$D_f=R-\left\{x : x^3\sin\frac{1}{2x}=0\right\}$$

پس باید معادله‌ی $x^3\sin\frac{1}{2x}=0$ را حل کنیم:

$$x^3\sin\frac{1}{2x}=0\Rightarrow\begin{cases}x=0 & \text{غ‌ق‌ق}\\ \sin\frac{1}{2x}=0\Rightarrow\frac{1}{2x}=k\pi\end{cases}$$

پس $x=\dfrac{1}{2k\pi}$، لذا:

$$D_f=R-\left\{x : x=\frac{1}{2k\pi}\,,\,k\in Z\right\}$$

یعنی تابع در نقاط

$$\frac{-1}{2\pi},\frac{-1}{4\pi},\frac{-1}{6\pi},\ldots,0,\ldots,\frac{1}{6\pi},\frac{1}{4\pi},\frac{1}{2\pi}$$

تعریف نمی‌شود، بنابراین مـی‌بینـیم کـه هرچـه بـه سـمت صـفر نزدیـک می‌شویم، تابع در بی‌شمار نقطه تعریف نمـی‌شـود. پـس هـیچ همسـایگی محذوف عدد صفر یافت نمی‌شود، که این شرط لازم موجود بودن حد تابع در $x=0$ است.

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{x^3\sin\frac{1}{2x}}$$ معنی ندارد

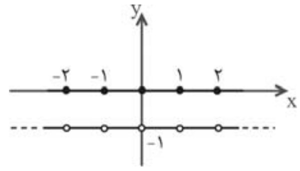
۱۳۰۷– گزینه‌ی «۱»

از آنجایی که تابع f در همسایگی صفر همواره مثبت است، پس:

$$\lim_{x\to ۰}\frac{|f(x)|}{f(x)}=\lim_{x\to ۰}\frac{f(x)}{f(x)}=۱$$

۱۳۰۸– گزینه‌ی «۳»

راه حل اول: از روش ترسیم استفاده می‌کنیم:



با توجه به نمودار در هر نقطه‌ای صحیح یا غیر صحیح تابع دارای حد ۱− است، پس:

$$\lim_{x\to ۰^+} f(x)+\lim_{x\to (\frac{۱}{۲})^-} f(x)=-۱+(-۱)=-۲$$

راه حل دوم: دقت می‌کنیم که در میل کردن $x\to x_۰$، x عدد صحیح نخواهد بود، چه $x_۰$ عددی صحیح باشد چه غیرصحیح، پس:

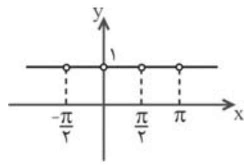
$$\lim_{x\to ۰^+} f(x)=-۱ \qquad (x\in R-Z)$$

$$\lim_{x\to \frac{۱}{۲}^-} f(x)=-۱ \qquad (x\in R-Z)$$

پس مجموع آن‌ها ۲− خواهد بود.

۱۳۰۹– گزینه‌ی «۱»

از آنجایی که $x\neq \frac{k\pi}{۲}$ ، $\tan x.\cot x=۱$ ، پس نمودار تابع به‌صورت زیر خواهد بود:



$$y=۱ \ ,\ x\neq\frac{k\pi}{۲}$$

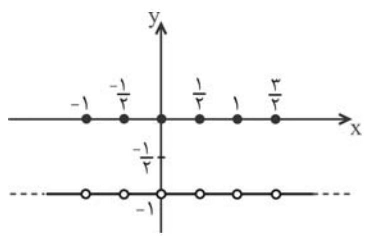
این تابع در هر نقطه‌ی دلخواهی حد دارد و حد آن ۱ است.

۱۳۱۰– گزینه‌ی «۲»

می‌دانیم:

$$y=[۲x]+[-۲x]=\begin{cases} ۰ & , \ x=\frac{k}{۲} \\ -۱ & , \ x\neq\frac{k}{۲}\end{cases} \qquad (k\in Z)$$

بنابراین با رسم نمودار تابع، دیده می‌شود که در هر نقطه‌ی دلخواهی حد تابع ۱− است. توجه کنید که حد تابع در یک نقطه به مقدار آن در آن نقطه ارتباطی ندارد.

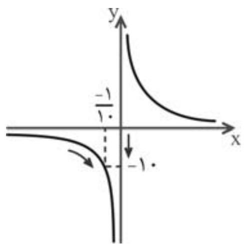


پس:

$$\lim_{x\to a}([۲x]+[-۲x])=-۱$$

۱۳۱۱– گزینه‌ی «۳»

راه حل اول: از روش ترسیم استفاده می‌کنیم:



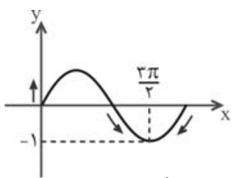
نمودار تابع $y=\frac{۱}{x}$ در زیر رسم شده است، در نقطه‌ی $x=\frac{-۱}{۱۰}$ وقتی x از سمت چپ $\frac{-۱}{۱۰}$ به $\frac{-۱}{۱۰}$ میل می‌کند، تابع با مقادیر بیش‌تر از (-۱۰) به (-۱۰) نزدیک می‌شود، لذا:

$$\lim_{x\to(\frac{-۱}{۱۰})^-}\left[\frac{۱}{x}\right]=[(-۱۰)^+]=-۱۰$$

راه حل دوم: وقتی $x\to\left(\frac{-۱}{۱۰}\right)^-$ ، یعنی $x<\frac{-۱}{۱۰}$ پس $\frac{۱}{x}>-۱۰$ ، لذا:

$$\left[\frac{۱}{x}\right]=-۱۰$$

۱۳۱۲– گزینه‌ی «۲»

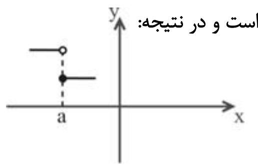


با توجه به نمودار تابع $y=\sin x$ در همسایگی نقطه‌ی $x=\frac{۳\pi}{۲}$ ، تابع با مقادیر بیش‌تر از (-۱) به (-۱) نزدیک می‌شود، لذا:

$$\lim_{x\to\frac{۳\pi}{۲}}\left[\frac{۱}{\sin x}\right]=\left[\frac{۱}{(-۱)^+}\right]=[-۱/...]=-۲$$

۱۳۱۳– گزینه‌ی «۴»

راه حل اول: با توجه به نمودار تابع با ضابطه‌ی $y=[f(x)]$ ، اگر تابع در نقطه‌ی a حد نداشته باشد، آنگاه قدر مطلق اختلاف حد چپ و راست در این نقطه ۱ است، از آنجایی که تابع $y=x^۲$ به ازای x های منفی، نزولی است پس حد چپ از حد راست بزرگ‌تر است و در نتیجه:



$$\lim_{x\to a^+} f(x)-\lim_{x\to a^-} f(x)=-۱$$

راه حل دوم: اگر a عددی منفی باشد، به‌طوری که $a^۲\in N$ ، در این صورت تابع $f(x)=[x^۲]$ در $x=a$ حد ندارد (چرا؟) و داریم:

$$x\to a^+ \Rightarrow x^۲\to(a^۲)^-$$

$$x\to a^- \Rightarrow x^۲\to(a^۲)^+$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to a^+} f(x)-\lim_{x\to a^-} f(x)=[(a^۲)^-]-[(a^۲)^+]$$

$$=(a^۲-۱)-a^۲=-۱$$

۱۳۱۴– گزینه‌ی «۳»

در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\sqrt{x-۱}$ ، دامنه‌ی تابع بازه‌ی $D_f=[۱,+\infty)$ است، پس حد راست در $x=۱$ وجود دارد:

$$\lim_{x\to ۱^+}\sqrt{x-۱}=\sqrt{۱-۱}=۰$$

در تابع با ضابطه‌ی $g(x)=\sqrt{۳-x}$، دامنه‌ی تابع بازه‌ی $D_g=(-\infty\,,۳]$ است، پس حد چپ در $x=۱$ وجود دارد و از حد راست در $x=۳$ نمی‌توان صحبت کرد، لذا:

$$\lim_{x\to ۳}\sqrt{۳-x}=\lim_{x\to ۳^-}\sqrt{۳-x}=۰$$

۱۳۱۵– گزینه‌ی «۳»

ابتدا دامنه‌ی تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\dfrac{x}{[x]}$ را می‌یابیم:

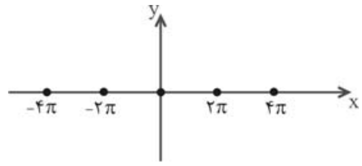
$$[x]=۰\Rightarrow ۰\le x<۱\Rightarrow D_f=(-\infty,۰)\cup[۱,+\infty)$$

با توجه به دامنه‌ی تابع فقط همسایگی چپ $x=۰$ وجود دارد، لذا:

$$\lim_{x\to ۰}\frac{x}{[x]}=\lim_{x\to ۰^-}\frac{x}{[x]}=\frac{۰}{-۱}=۰$$

۱۳۱۶– گزینه‌ی «؟»

ابتدا دامنه‌ی تعریف تابع را می‌یابیم، باید $\cos x-۱\ge ۰$ باشد و از آنجا $\cos x\ge ۱$، بنابراین $\cos x=۱$ و در نتیجه $x=۲k\pi$، مقدار تابع در این نقاط برابر صفر است. با توجه به نمودار تابع دیده می‌شود که تابع در هیچ همسایگی از صفر تعریف نشده پس صحبت از حد تابع در $x=۰$ معنی ندارد.



و هیچ گزینه‌ای درست نیست، البته بنظر می‌آید منظور طراح گزینه‌ی (۴) است.

راهبرد حل تیپ (۳)

برای اثبات عدم وجود حد به وسیله دنباله، درتوابعی که حد چپ و راست نابرابر دارند، باید دو دنباله را به گونه ای انتخاب کنیم که یکی همواره با مقادیر کمتر از نقطه به آن میل کند (دنباله صعودی اکید باشد) و دیگری همواره با مقادیر بیشتر از نقطه به آن میل کند (دنباله نزولی اکید باشد).

در دنباله ی $\{a_n\}$ که همگرا به L است، برای تشخیص این که با مقادیر بیشتر به L میل می‌کند یا کمتر، کافی است علامت عبارت a_n-L را در بی‌نهایت تعیین کنیم:

$$(a_n-L)\begin{cases}>۰ & \text{(یعنی با مقادیر بیش‌تر از } L \text{ نزدیک می‌شود)}\\ <۰ & \text{(یعنی با مقادیر کم‌تر از } L \text{ نزدیک می‌شود)}\end{cases}$$

۱۳۱۷– گزینه‌ی «۲»

$$\lim_{n\to\infty}\frac{۲n+۱}{n+۲}=۲$$

برای این‌که ببینیم دنباله‌ی $\{a_n\}$ با مقادیر کم‌تر از ۲ به ۲ نزدیک می‌شود یا بیشتر، کافیست $a_n-۲$ را تشکیل دهیم:

$$(a_n-۲)=\left(\frac{۲n+۱}{n+۲}-۲\right)=\frac{-۳}{n+۲}$$

از آنجایی که به ازای هر n طبیعی، $\dfrac{-۳}{n+۲}$ مقداری منفی است پس $a_n-۲<۰$ و درنتیجه $a_n<۲$، بنابراین دنباله‌ی $\{a_n\}$ با مقادیر کم‌تر از ۲ به ۲ میل می‌کند.

پس:

$$\lim_{n\to+\infty}f(a_n)=\lim_{a_n\to ۲^-}f(a_n)=\lim_{x\to ۲^-}f(x)$$

لذا:

$$\lim_{x\to ۲^-}f(x)=\lim_{x\to ۲^-}(x+۱)[x]=(۲+۱)[۲^-]=۳$$

۱۳۱۸– گزینه‌ی «۲»

$$\lim_{n\to\infty}\frac{۴n+۱}{۲n+۱}=۲$$

برای این‌که ببینیم دنباله‌ی $\{a_n\}$ با مقادیر کم‌تر از ۲ به ۲ نزدیک می‌شود یا بیشتر، کافیست $a_n-۲$ را تشکیل دهیم:

$$(a_n-۲)=\left(\frac{۴n+۱}{۲n+۱}-۲\right)=\frac{-۱}{۲n+۱}$$

از آنجایی که به ازای هر n طبیعی، $\dfrac{-۱}{۲n+۱}$ مقداری منفی است پس $a_n-۲<۰$ و درنتیجه $a_n<۲$، بنابراین دنباله‌ی $\{a_n\}$ با مقادیر کم‌تر از ۲ به ۲ نزدیک می‌شود.

پس:

$$\lim_{n\to\infty}f(a_n)=\lim_{a_n\to ۲^-}f(a_n)=\lim_{x\to ۲^-}f(x)$$

لذا:

$$\lim_{x\to ۲^-}f(x)=\lim_{x\to ۲^-}(b+[۲x])=b+[۲(۲^-)]$$

$$=b+[۴^-]=b+۳=۱\Rightarrow b=-۲$$

۱۳۱۹– گزینه‌ی «۲»

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n+۱}{n}=۱$$

از آن‌جایی‌که $a_n=۱+\dfrac{۱}{n}$، پس a_n با مقادیر بیش‌تر از ۱ به ۱ نزدیک می‌شود، لذا:

$$\lim_{n\to\infty}f(a_n)=\lim_{a_n\to ۱^+}f(a_n)=\lim_{x\to ۱^+}f(x)$$

لذا:

$$\lim_{x\to ۱^+}f(x)=\lim_{x\to ۱^+}\frac{۲x+[-x]}{x^۲-۱}=\lim_{x\to ۱^+}\frac{۲x+[-(۱^+)]}{x^۲-۱}$$

$$=\lim_{x\to ۱^+}\frac{۲x-۲}{x^۲-۱}=\lim_{x\to ۱^+}\frac{۲(x-۱)}{(x-۱)(x+۱)}=\lim_{x\to ۱^+}\frac{۲}{x+۱}=۱$$

۱۳۲۰– گزینه‌ی «۲»

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{۴n-۳}{n+۲}=۴$$

باید ببینیم که a_n با مقادیر کمتر از ۴ به ۴ نزدیک می‌شود یا بیشتر، بنابراین کافی است علامت $(a_n-۴)$ را بیابیم:

$$(a_n-۴)=\left(\frac{۴n-۳}{n+۲}-۴\right)=\frac{-۱۱}{n+۲}$$

بنابراین a_n با مقادیر کمتر از ۴ به ۴ نزدیک می‌شود. اما:

$$\lim_{n\to\infty}f(a_n)=\lim_{a_n\to ۴^-}f(a_n)=\lim_{x\to ۴^-}f(x)$$

لذا:

$$\lim_{x\to ۴^-}\frac{[x]-۳}{x-۴}=\frac{۳-۳}{۴^--۴}=\frac{\text{صفر مطلق}}{\text{صفر حدی}}=۰$$

پس دنباله‌ی $f(a_n)$ همگرا به صفر است.

۱۳۲۱- گزینه‌ی «۱»

دامنه‌ی تابع داده شده را به‌دست می‌آوریم:

$$1-x^2 \ge 0 \Rightarrow x^2 \le 1 \Rightarrow -1 \le x \le 1$$

از آنجایی که $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)=0$، پس باید دنباله‌ای را در نظر بگیریم که با مقادیر کمتر از ۱ به ۱ همگرا باشد یا با مقادیر بیشتر از (-1) به (-1) همگرا باشد، با توجه به گزینه‌ها سه گزینه‌ی (۱)، (۲) و (۳)، همگرا به (۱) و گزینه‌ی (۴) همگرا به $\frac{1}{2}$ است، پس سه گزینه‌ی (۱)، (۲) و (۳) را باید بررسی کنیم.

در گزینه‌ی (۱):

$$a_n=\frac{n^2-1}{n^2+1}=\frac{n^2+1-2}{n^2+1}=1-\frac{2}{n^2+1}$$

این دنباله با مقادیر کمتر از ۱ به ۱ همگرا می‌شود و جواب است.

۱۳۲۲- گزینه‌ی «۴»

$$a_n=\begin{cases}\frac{1}{2n} & , \text{زوج } n\\[2mm] \frac{-1}{2n} & , \text{فرد } n\end{cases}$$

بنابراین:

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n)=\lim_{n\to\infty}\left|\left[\frac{a_n}{2}\right]\right|$$

$$\text{زوج } n: \lim_{n\to\infty}\left|\left[\frac{\frac{1}{2n}}{2}\right]\right|=\left|[0^+]\right|=0$$

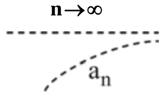
$$\text{فرد } n: \lim_{n\to\infty}\left|\left[\frac{\frac{-1}{2n}}{2}\right]\right|=\left|[0^-]\right|=|-1|=1$$

بنابراین دنباله‌ی $\{f(a_n)\}$ همگرا نیست.

۱۳۲۳- گزینه‌ی «۱»

دنباله‌ی $\{a_n\}$ باید به ۳ همگرا باشد و با مقادیر کم‌تر از ۳ به ۳ میل کند. پس دنباله ی $\{a_n\}$ یک دنباله‌ی صعودی است.

$$\lim_{n\to\infty} a_n=3$$



۱۳۲۴- گزینه‌ی «۱»

در دنباله‌ی $a_n=1-\frac{1}{n^2}$، $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=1$ است، از آن‌جایی‌که $a_n<1$ است، پس $a_n\to 1^-$، بنابراین:

$$\lim_{n\to\infty} f\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\lim_{a_n\to 1^-} f(a_n)=\lim_{x\to 1^-} f(x)$$

پس:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\left(x+\frac{|x-1|}{x-1}\right)=\lim_{x\to 1^-}\left(x-\frac{x-1}{x-1}\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}(x-1)=0$$

لذا دنباله‌ی $\left\{f\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\right\}$ همگرا به صفر است.

۱۳۲۵- گزینه‌ی «۳»

از آنجایی که $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\pi$، پس:

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n)=\lim_{a_n\to\pi} f(a_n)=\lim_{x\to\pi} f(x)$$

$$=\lim_{x\to\pi}\frac{1-\cos x}{1+\cos 2x}=\frac{1-(-1)}{1+1}=1$$

۱۳۲۶- گزینه‌ی «۲»

$$a_n=\sqrt{n}-\sqrt{n+1}=\frac{n-(n+1)}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=\frac{-1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$$

دنباله‌ی $\{a_n\}$ به ازای هر مقدار n منفی است و همگرا به صفر است، پس:

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n)=\lim_{a_n\to 0^-} f(a_n)=\lim_{x\to 0^-} f(x)$$

وقتی $x\to 0^-$ آنگاه $1-x\to 1^+$، لذا:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 1^+} f(1-x)=\lim_{x\to 1^+} x=1$$

۱۳۲۷- گزینه‌ی «۲»

ابتدا نقطه‌ی همگرایی دنباله‌ی $\{a_n\}$ را می‌یابیم، بنابراین باید $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ را محاسبه کنیم، در این دنباله‌ی هندسی $a_1=\frac{1}{2}$ و $q=\frac{1}{2}$، پس:

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\frac{a_1}{1-q}\overset{a=\frac{1}{2},\, q=\frac{1}{2}}{=\!=\!=\!=}\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1$$

اما دنباله‌ی $\{a_n\}$، دنباله‌ای صعودی است، پس با مقادیر کمتر از ۱ بـه ۱ میل می‌کند، لذا:

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n)=\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}(2x-1)=1$$

۱۳۲۸- گزینه‌ی «۳»

به ازای هر دنبالـه‌ی $a_n\neq 1$ همگـرا بـه ۱، دنبالـه‌ی $f(a_n)$ همگراست، پس $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ وجود دارد، پس باید داشته باشیم:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{[x]-k}{[-x]-4}=\frac{1-k}{-2-4}=\frac{k-1}{6}$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{[x]-k}{[-x]-4}=\frac{0-k}{-1-4}=\frac{k}{5}$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^-} f(x)\Rightarrow\frac{k-1}{6}=\frac{k}{5}\Rightarrow 5k-5=6k$$

$$\Rightarrow k=-5$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^-} f(x)=\frac{k}{5}=-1$$

۱۳۲۹– گزینه‌ی «۱»

دنباله‌ی $\{a_n\}$ باید همگرا به صفر باشد، پس در گزینه‌ها، گزینه‌ی (۳) و (۴) حذف خواهند شد، زیرا:

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n}+\sqrt{n+۱})=\infty$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+۲}{n+۱}\right)=۱$$

از طرفی، باید دنباله‌ی $\{a_n\}$ با مقادیر کم‌تر از صفر به صفر نزدیک شود، یعنی دنباله‌ی $\{a_n\}$ باید صعودی باشد. اما دنباله‌ی $\left\{\frac{۱}{n}\right\}$ نزولی است و دنباله‌ی $\left\{\frac{-۱}{n}\right\}$ صعودی است، پس گزینه‌ی (۱) صحیح است.

۱۳۳۰– گزینه‌ی «۳»

دنباله‌ی $\{a_n\}$ باید به گونه‌ای انتخاب شود که همگرا به صفر بوده ولی $\{f(a_n)\}$ واگرا باشد. گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینه‌ی (۱): $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(\frac{-۱}{n}\right)=\lim\limits_{x\to ۰^-} f(x)=۵ \Rightarrow$ همگراست

گزینه‌ی (۲): $\lim\limits_{n\to\infty} f(\sqrt{n+۴}-\sqrt{n})=\lim\limits_{x\to ۰^+} f(x)=-۱ \Rightarrow$ همگراست

گزینه‌ی (۴): $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(\frac{۱}{\sqrt{n}}\right)=\lim\limits_{x\to ۰^+} f(x)=-۱ \Rightarrow$ همگراست

اما درگزینه‌ی (۳) خواهیم داشت:

برای اعداد زوج طبیعی: $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(\frac{۱}{n}\right)=\lim\limits_{x\to ۰^+} f(x)=-۱$

برای اعداد فرد طبیعی: $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(\frac{-۱}{n}\right)=\lim\limits_{x\to ۰^-} f(x)=۵$

بنابراین دنباله‌ی $\{f(a_a)\}$ واگراست.

۱۳۳۱– گزینه‌ی «۱»

راه حل اول:

$$f\left(\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{n}\right)=\left[\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{n}+\frac{۱}{۳}\right]+\left[۳\left(\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{n}\right)\right]=\left[\frac{۲}{۳}-\frac{۱}{n}\right]+\left[۱-\frac{۳}{n}\right]$$

بنابراین:

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\left[\frac{۲}{۳}-\frac{۱}{n}\right]+\left[۱-\frac{۳}{n}\right]\right)=۰+۰=۰$$

راه حل دوم:

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{n}\right)=\lim_{x\to\frac{۱}{۳}^-} f(x)$$

بنابراین:

$$\lim_{x\to\frac{۱}{۳}^-} f(x)=\lim_{x\to\frac{۱}{۳}^-}\left(\left[x+\frac{۱}{۳}\right]+[۳x]\right)=\lim_{\varepsilon\to ۰^+}\left(\left[\frac{۲}{۳}-\varepsilon\right]+[۱-\varepsilon]\right)=۰+۰=۰$$

۱۳۳۲– گزینه‌ی «۳»

اگر $x>۰$ باشد، آنگاه $x>\sin x$ است. بنابراین با توجه به این که $\frac{۱}{n}>۰$ است داریم: $\frac{۱}{n}>\sin\frac{۱}{n}\Rightarrow \sin(\frac{۱}{n})-\frac{۱}{n}<۰\Rightarrow a_n<۰$

با توجه به این که دنباله‌ی a_n همگرا به صفر است و از مقادیر کم‌تر به عدد صفر نزدیک می‌شود. داریم:

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n)=\lim_{x\to ۰^-} f(x)=\lim_{x\to ۰^-}\left([x]+\frac{|x|}{x}\right)$$

$$=\lim_{x\to ۰^-}\left([x]+\frac{-x}{x}\right)=-۱-۱=-۲$$

۱۳۳۳– گزینه‌ی «۱»

$$a_n=-۱+\frac{۲}{n+۱}\Rightarrow a_n>-۱$$

بنابر تعریف دنباله‌ای حد، اگر به ازای هر دنباله $\{a_n\}$ به a همگرا و $a_n>a$، دنباله $\{f(a_n)\}$ به l همگرا شود آنگاه $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=l$

$$\lim_{n\to+\infty} f(a_n)=\lim_{x\to(-۱)^+} f(x)$$

با توجه به این که تابع زوج است داریم:

$$\lim_{x\to a^-} f(x)=\lim_{x\to(-a)^+} f(x)$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} f(a_n)=\lim_{x\to(-۱)^+} f(x)=\lim_{x\to ۱^-} f(x)=۲$$

۱۳۳۴– گزینه‌ی «۴»

باید دو دنباله به گونه‌ای انتخاب شوند که یکی همواره اعداد گویا بدهد و دیگری همواره اعداد گنگ و هر دو همگرا به عدد $\sqrt{۲}$ باشند. دنباله‌ی $\left\{\sqrt{۲}+\frac{۱}{n}\right\}$ همگرا به عدد $\sqrt{۲}$ است و همواره عددی گنگ می‌دهد.

بنابراین دنباله‌ی $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$ باید همواره عددی گویا بدهد و همگرا به $\sqrt{۲}$ نیز باشد. دنباله‌ی a_n نمی‌تواند $\left[\frac{\sqrt{۲}}{n}\right]$ باشد زیرا در آن صورت:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left[\frac{\sqrt{۲}}{n}\right]}{n}=۰$$

که همگرا به $\sqrt{۲}$ نخواهد بود. همچنین نمی‌تواند $\frac{۱}{\sqrt{۲}+\frac{۱}{n}}$ باشد زیرا همگرا به صفر خواهد شد:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{۱}{\left(\sqrt{۲}+\frac{۱}{n}\right)n}=۰$$

به همین ترتیب برای گزینه‌ی (۳) دنباله همگرا به $\sqrt{۲}$ خواهد بود ولی همواره عددی گنگ می‌دهد.

اما در گزینه‌ی (۴) داریم:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{[\sqrt{۲}n]}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{۲}n-P}{n}=\sqrt{۲}$$

و همواره عددی گویا می‌دهد.

۱۳۳۵- گزینه‌ی «۳»

با بررسی گزینه‌ها به جواب می‌رسیم که در گزینه‌ی (۳) خواهیم داشت:

$$f(a_n)=\sin ۲n\pi-\cos ۲n\pi=۰-۱=-۱$$

$$f(b_n)=\sin(۲n\pi-\frac{\pi}{۲})-\cos(۲n\pi-\frac{\pi}{۲})=-۱+۰=-۱$$

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n)=\lim_{n\to\infty} f(b_n)=-۱$$

راهبرد حل تیپ (۴)

به بخش «محاسبه‌ی حد توابع و قضایای حد» در درس توجه کنید.

توجه: تابع‌های دو ضابطه‌ای به شکل $f(x)=\begin{cases} h(x) & , \ x>a \\ g(x) & , \ x<a \end{cases}$ زمانی در $x=a$ حد دارند که در a حد چپ و راست آن‌ها موجود و برابر باشد، یعنی $\lim_{x\to a^+} h(x)=\lim_{x\to a^-} g(x)$.

۱۳۳۶- گزینه‌ی «۲»

فرض کنید $\lim_{x\to ۱} f(x)=A$ باشد، آنگاه:

$$\lim_{x\to ۱}\frac{۲f(x)-۱}{f(x)+۱}=۵\Rightarrow\frac{۲A-۱}{A+۱}=۵\Rightarrow ۲A-۱=۵A+۵$$

$$\Rightarrow ۳A=-۶\Rightarrow A=-۲\Rightarrow \lim_{x\to ۱} f(x)=-۲$$

۱۳۳۷- گزینه‌ی «۳»

$$\lim_{x\to ۰}\frac{e^x-e^{-x}}{۲}=\frac{۱-۱}{۲}=۰$$

۱۳۳۸- گزینه‌ی «۲»

$$\lim_{x\to ۱^+} f(x)=\lim_{x\to ۱^+}(x^۲+۲a)=۱+۲a$$

$$\lim_{x\to ۱^-} f(x)=\lim_{x\to ۱^-}(ax-۱)=a-۱$$

پس:

$$\lim_{x\to ۱^+} f(x)-\lim_{x\to ۱^-} f(x)=-۱$$

$$(۱+۲a)-(a-۱)=-۱\Rightarrow a=-۳$$

۱۳۳۹- گزینه‌ی «۳»

برای آن‌که تابع f در نقطه‌ی $x=-۱$ حد داشته باشد باید:

$$\lim_{x\to(-۱)^+} f(x)=\lim_{x\to(-۱)^-} f(x)$$

پس:

$$\lim_{x\to(-۱)^+} f(x)=\lim_{x\to(-۱)^+}(x+a)^۲=(a-۱)^۲$$

$$\lim_{x\to(-۱)^-} f(x)=\lim_{x\to(-۱)^-}(۲x+۱)=-۱$$

لذا باید: $(a-۱)^۲=-۱$

از آن‌جایی‌که معادله‌ی بالا جواب حقیقی برای a ندارد، پس مجموعه مقادیر a، تهی است.

۱۳۴۰- گزینه‌ی «۲»

اگر $-۱<x<۰$ باشد، $x^۳>x$ است، بنابراین با فرض $x^۳-x=t$، وقتی $x\to ۰^-$، $t\to ۰^+$ لذا:

$$\lim_{x\to ۰^-} f(x^۳-x)=\lim_{t\to ۰^+} f(t)$$

بنابراین برای محاسبه‌ی حد باید از ضابطه‌ی بالا استفاده کنیم:

$$\lim_{t\to ۰^+} f(t)=\lim_{x\to ۰^-}\sqrt{۱-x}=۱$$

راهبرد حل تیپ (۵)

الف- در محاسبات حد توابع شامل جزء صحیح به نکات زیر توجه کنید:

(۱) $\lim_{\varepsilon\to ۰^+}[\varepsilon]=۰$ و $\lim_{\varepsilon\to ۰^+}[-\varepsilon]=-۱$

(۲) $[۰^+]=۰$ و $[۰^-]=-۱$ (تعریف غیر رسمی)

(۳) $[(۰^-)^n]=[۰^-]=-۱$ (n عددی فرد و مثبت)

(۴) $[n(۰^-)]=[۰^-]=-۱$ (n عددی مثبت)

ب- در محاسبه‌ی حد توابع شامل جزء صحیح دقت کنید که:

$$\frac{\text{صفر مطلق}}{\text{عدد غیر صفر}}=۰ \quad \text{و} \quad \frac{\text{صفر مطلق}}{\text{صفر حدی}}=۰$$

۱۳۴۱- گزینه‌ی «۴»

راه حل اول: انتقال به نقطه‌ی صفر:

$$\lim_{x\to(-۲)^+} ۲[x]=\lim_{\varepsilon\to ۰^+} ۲[-۲+\varepsilon]=\lim_{\varepsilon\to ۰^+}(۲(-۲)+۲[\varepsilon])=-۴+۰=-۴$$

$$\lim_{x\to(-۲)^-} ۲[x]=\lim_{\varepsilon\to ۰^+} ۲[-۲-\varepsilon]=\lim_{\varepsilon\to ۰^+}(۲(-۲)+۲[-\varepsilon])=-۴+۲(-۱)=-۶$$

راه حل دوم:

$$\lim_{x\to(-۲)^+} ۲[x]=۲[(-۲)^+]=۲(-۲)=-۴$$

$$\lim_{x\to(-۲)^-} ۲[x]=۲[(-۲)^-]=۲(-۳)=-۶$$

پس حد راست ۲ واحد از حد چپ بیش‌تر است.

راه حل سوم: با عددگذاری داریم:

$$\lim_{x\to(-۲)^+} ۲[x]=۲[-۱/۹۹]=۲(-۲)=-۴$$

$$\lim_{x\to(-۲)^-} ۲[x]=۲[-۲/۰۱]=۲(-۳)=-۶$$

۱۳۴۲- گزینه‌ی «۳»

راه حل اول: وقتی $x\to ۰^-$، یعنی $x=۰-\varepsilon$ وقتی $\varepsilon\to ۰^+$، بنابراین:

$$\lim_{x\to ۰^-} f(x)=\lim_{\varepsilon\to ۰^+}((-\varepsilon)^۲-[-\varepsilon])=۰-(-۱)=۱$$

راه حل دوم: به روش غیر رسمی خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to ۰^-} f(x)=\lim_{x\to ۰^-}(x^۲-[x])=۰-[۰^-]=۰-(-۱)=۱$$

۱۳۴۳- گزینه‌ی «۲»

وقتی $x\to ۱^-$ به جای x، در تابع قرار می‌دهیم ۱^-:

$$\lim_{x\to ۱^-}(۱-x+[x]-[۲x])=(۱-۱+[۱^-]-[۲(۱^-)])$$

$$=(۱-۱+۰-۱)=-۱$$

۱۳۴۴- گزینه‌ی «۱»

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}(x+a)[x]=(2+a)[2^+]=2(2+a)$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}(x+a)[x]=(2+a)[2^-]=a+2$$

اما:

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)-\lim_{x\to 2^-} f(x)=3$$

$$\Rightarrow 2(2+a)-(2+a)=3\Rightarrow a+2=3\Rightarrow a=1$$

۱۳۴۵- گزینه‌ی «۴»

به‌طور غیر رسمی وقتی $x\to 0^+$ به جای x، در تابع قرار می‌دهیم 0^+، به طریق مشابه وقتی $x\to 0^-$ به جای x، در تابع قرار می‌دهیم 0^-.

حد راست: $\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}([x]+\operatorname{sgn} x)$

$$=[0^+]+\operatorname{sgn}(0^+)=0+1=1$$

حد چپ: $\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}([x]+\operatorname{sgn} x)$

$$=[0^-]+\operatorname{sgn}(0^-)=-1-1=-2$$

حاصلضرب حد چپ و راست $=(1)(-2)=-2$

۱۳۴۶- گزینه‌ی «۲»

باید:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^+} f(x)$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}(a[x]+[x+1])$$

$$=a[1^-]+[1^-+1]=0+1=1$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}(a[x]+[x+1])$$

$$=a[1^+]+[1^++1]=a+2$$

$$a+2=1\to a=-1$$

۱۳۴۷- گزینه‌ی «۳»

به‌طور غیر رسمی وقتی $x\to 1^+$ به جای x، در تابع قرار می‌دهیم 1^+، به طریق مشابه وقتی $x\to 1^-$ به جای x، در تابع قرار می‌دهیم 1^-.

$$\lim_{x\to 1^+}[x]([x]-1)=[1^+]([1^+]-1)=1(1-1)=0$$

$$\lim_{x\to 1^-}[x]([x]-1)=[1^-]([1^-]-1)=0(0-1)=0$$

پس تابع در $x=1$ حد دارد.

۱۳۴۸- گزینه‌ی «۲»

$$\lim_{x\to 1^-}(x+1)\left[\frac{1}{x+1}\right]=2\times\left[\frac{1}{2}\right]=2\times 0=0$$

۱۳۴۹- گزینه‌ی «۲»

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{[5x^2]}{x+5}=\frac{[0^+]}{0+5}=\frac{\text{صفر مطلق}}{\text{عدد}}=0$$

۱۳۵۰- گزینه‌ی «۲»

$$\lim_{x\to(-1)^+}\frac{[x]+1}{x^2-1}=\frac{[(-1)^+]+1}{((-1)^+)^2-1}=\frac{-1+1}{1^--1}=\frac{\text{صفر مطلق}}{\text{صفر حدی}}=0$$

راهبرد حل تیپ (۶)

اگر $\lim_{x\to a} f(x)=0$ و تابع g در یک همسایگی محذوف a کران‌دار باشد، آن‌گاه $\lim_{x\to a} f(x)g(x)=0$ است.

۱۳۵۱- گزینه‌ی «۳»

بررسی گزینه‌ی (۱):

$$\frac{1}{x}-1<\left[\frac{1}{x}\right]<\frac{1}{x}\xrightarrow[\text{(منفی است x)}]{\times x}1<x\left[\frac{1}{x}\right]<1-x$$

$$\lim_{x\to 0^-} x\left[\frac{1}{x}\right]=1$$

طبق قضیه‌ی فشردگی حد چپ در صفر موجود است.

بررسی گزینه‌ی (۲):

$$\frac{1}{x}-1<\left[\frac{1}{x}\right]<\frac{1}{x}\xrightarrow[\text{(مثبت است x)}]{\times x}1-x<x\left[\frac{1}{x}\right]<1$$

$$\lim_{x\to 0^+} x\left[\frac{1}{x}\right]=1$$

طبق قضیه‌ی فشردگی حد راست در صفر موجود است.

بررسی گزینه‌ی (۳):

$$\lim_{x\to-\infty} x\left[\frac{1}{x}\right]=-\infty\times(-1)=+\infty$$

بررسی گزینه‌ی (۴):

$$\lim_{x\to+\infty} x\left[\frac{1}{x}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left[\frac{1}{x}\right]}{\frac{1}{x}}=\frac{\text{صفر مطلق}}{\text{صفر حدی}}=0$$

۱۳۵۲- گزینه‌ی «۲»

می‌دانیم $\lim_{x\to 0} x\left[\frac{1}{x}\right]=1$، پس حد چپ و راست آن در $x=0$ نیز برابر ۱ است، در نتیجه:

$$\lim_{x\to 0^+}|x|\left[\frac{1}{x}\right]=\lim_{x\to 0^+}x\left[\frac{1}{x}\right]=1$$

$$\lim_{x\to 0^-}|x|\left[\frac{1}{x}\right]=\lim_{x\to 0^-}(-x)\left[\frac{1}{x}\right]=-\lim_{x\to 0^-}x\left[\frac{1}{x}\right]=-1$$

بنابراین تابع در $x=0$ حد ندارد.

۱۳۵۳- گزینه‌ی «۱»

$$\lim_{x\to 0}(f(x)+1)\sin\frac{\pi}{x^2}=0\times\text{تابع کران‌دار}=0$$

دقت کنید که تابع $\sin\frac{\pi}{x^2}$ در $x=0$ حد ندارد ولی در همسایگی محذوف صفر تعریف می‌شود و تابعی کران‌دار در بازه‌ی $[-1, 1]$ است.

۱۳۵۴– گزینه‌ی «۲»

از آن‌جایی‌که f با دامنه‌ی R است، پس در هر همسایگی دلخواهی تعریف می‌شود و از طرفی $|f| \le ۲$، پس f تابعی کران‌دار است، اما تابع f در هیچ نقطه‌ای حد ندارد، بنابراین تابع $(x^۲-۱)f(x)$ زمانی حد خواهد داشت که $x^۲-۱=۰$ باشد، یعنی در دو نقطه‌ی $x=۱$ و $x=-۱$ تابع حد دارد.

۱۳۵۵– گزینه‌ی «۴»

دو تابع f و g در $x=۱$ حد ندارند، پس گزینه‌های ۲ و ۳ نادرست هستند، بنابراین گزینه‌های (۱) و (۴) را بررسی می‌کنیم.

$$(۴)\ (f+g)(x)=\begin{cases}۲x^۲+۲ & , x\le ۱\\ x+۳ & , x>۱\end{cases}$$

$$\lim_{x\to ۱^+}(f+g)(x)=\lim_{x\to ۱^+}(x+۳)=۴$$

$$\lim_{x\to ۱^-}(f+g)(x)=\lim_{x\to ۱^-}(۲x^۲+۲)=۴$$

پس تابع $f+g$ در $x=۱$ حد دارد.

$$(۱)\ (f.g)(x)=\begin{cases}x^۲(x^۲+۲) & , \quad x\le ۱\\ ۲(x+۱) & , \quad x>۱\end{cases}$$

$$\lim_{x\to ۱^-}(f.g)(x)=\lim_{x\to ۱^-}x^۲(x^۲+۲)=۳$$

$$\lim_{x\to ۱^+}(f.g)(x)=\lim_{x\to ۱^+}۲(x+۱)=۴$$

پس تابع $f.g$ در $x=۱$ حد ندارد.

۱۳۵۶– گزینه‌ی «۳»

دو تابع $f(x)=\begin{cases}-۱ & , x>۰\\ ۱ & , x<۰\end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases}۱ & , x>۰\\ -۱ & , x<۰\end{cases}$ در $x=۰$ حد ندارند ولی مجموع آنها در $x=۰$ حد دارد، بنابراین گزینه‌ی ۱ حذف می‌شود، از طرفی:

$$(f-g)(x)=\begin{cases}-۱-۱ & , x>۰\\ ۱-(-۱) & , x<۰\end{cases}=\begin{cases}-۲ & , x>۰\\ ۲ & , x<۰\end{cases}$$

تابع تفاضل در صفر حد ندارد و گزینه‌ی ۲ نیز حذف می‌شود.

از طرفی اگر $f(x)=\begin{cases}۳ & , x>۰\\ ۵ & , x<۰\end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases}-۱ & , x>۰\\ -۳ & , x<۰\end{cases}$،

آن‌گاه $f+g$ در $x=۰$ حد دارد ولی:

$$f.g(x)=\begin{cases}-۳ & , x>۰\\ -۱۵ & , x<۰\end{cases}$$

که در $x=۰$ حد ندارد و گزینه‌ی (۴) نیز حذف می‌شود، بنابراین گزینه‌ی ۳ صحیح است.

۱۳۵۷– گزینه‌ی «۴»

$$\lim_{x\to ۶^+}\left(\left[\frac{x}{۲}\right]+\left[\frac{x}{۳}\right]\right)=\left(\left[\frac{۶^+}{۲}\right]+\left[\frac{۶^+}{۳}\right]\right)$$

$$=[۳^+]+[۲^+]=۳+۲=۵$$

$$\lim_{x\to ۶^-}\left(\left[\frac{x}{۲}\right]+\left[\frac{x}{۳}\right]\right)=\left(\left[\frac{۶^-}{۲}\right]+\left[\frac{۶^-}{۳}\right]\right)$$

$$=[۳^-]+[۲^-]=۲+۱=۳$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to ۶^+}f(x)+\lim_{x\to ۶^-}f(x)=۵+۳=۸$$

۱۳۵۸– گزینه‌ی «۴»

$$f(x)=[x]+۴+[-x]=۴+[x]+[-x]$$

اما می‌دانیم:

$$[x]+[-x]=\begin{cases}-۱ & , \quad x\notin Z\\ ۰ & , \quad x\in Z\end{cases}$$

$$\lim_{x\to ۳}f(x)=\lim_{x\to ۳}(۴+[x]+[-x])=۴-۱=۳$$

$$\lim_{x\to ۳^-}f(x)=\lim_{x\to ۳^+}f(x)=۳$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to ۳}f(x)=۳$$

۱۳۵۹– گزینه‌ی «۳»

$$\lim_{x\to \sqrt{۲}^+}(x^۲+۱)[x^۲-۲]=(۲+۱)[۲^+-۲]=۳[۰^+]=۳\times ۰=۰$$

$$\lim_{x\to \sqrt{۲}^-}(x^۲+۱)[x^۲-۲]=(۲+۱)[۲^--۲]$$

$$=۳[۰^-]=۳\times(-۱)=-۳$$

پس مجموع حد چپ و راست -۳ است.

۱۳۶۰– گزینه‌ی «۲»

وقتی $x\to \frac{۲}{۳}^-$، به مفهوم $x=\frac{۲}{۳}-\varepsilon$ است که در آن $\varepsilon\to ۰^+$، پس خواهیم داشت:

$$\lim_{\varepsilon\to ۰^+}\frac{\left[\frac{۴}{۳}-\frac{۱}{۲}-۲\varepsilon\right]+[۱-۲+۳\varepsilon]}{\left[\frac{۸}{۳}-۴\varepsilon+\frac{۱}{۳}\right]-\left[\frac{-۱۰}{۳}+۵\varepsilon+۰/۳\right]}$$

$$=\lim_{\varepsilon\to ۰^+}\frac{\left[\frac{۵}{۶}-۲\varepsilon\right]+[-۱+۳\varepsilon]}{[۳-۴\varepsilon]-\left[\underbrace{\frac{-۹۱}{۳۰}}_{<-۳}+۵\varepsilon\right]}=\frac{۰-۱}{۲-(-۴)}=\frac{-۱}{۶}$$

۱۳۶۱– گزینه‌ی «۲»

$$\lim_{x\to ۱^+}\left[\frac{۲x}{x^۲+۱}\right]=\lim_{x\to ۱^+}\left[\frac{۲x}{x\left(x+\frac{۱}{x}\right)}\right]=\lim_{x\to ۱^+}\left[\frac{۲}{x+\frac{۱}{x}}\right]$$

می‌دانیم اگر $x>۰$، آن‌گاه $x+\frac{۱}{x}>۲$، لذا:

$$\lim_{x\to ۱^+}\left[\frac{۲x}{x^۲+۱}\right]=\left[\frac{۲}{۲^+}\right]=[۱^-]=۰$$

۱۳۶۲– گزینه‌ی «۳»

$$\left[\frac{۴x^۲+۳}{x^۲+۱}\right]=\left[\frac{۴(x^۲+۱)-۱}{x^۲+۱}\right]=\left[۴-\frac{۱}{x^۲+۱}\right]$$

$$=۴+\left[\frac{-۱}{x^۲+۱}\right]$$

در هر نقطه‌ی $a\in R$، $x^۲+۱\ge ۱$ و $\frac{۱}{x^۲+۱}\le ۱$ و در نتیجه $-۱\le \frac{-۱}{x^۲+۱}<۰$ است پس $\left[\frac{-۱}{x^۲+۱}\right]=-۱$ و خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to a}\left[\frac{۴x^۲+۳}{x^۲+۱}\right]=۴-۱=۳$$

بنابراین تابع در هر نقطه‌ی دلخواهی دارای حد ۳ است.

۱۳۶۳– گزینه‌ی «۴»

با انتخاب $-x=t$ وقتی $x\to ۳^+$، آنگاه $t\to (-۳)^-$ زیرا:

$$x>۳\to -x<-۳$$

لذا:

$$\lim_{x\to ۳^+} f(-x)=\lim_{t\to(-۳)^-} f(t)$$

در نتیجه:

$$\lim_{x\to ۳^+} f(-x)=\lim_{x\to(-۳)^-} f(x)=\lim_{x\to(-۳)^-}(۳x-۲)=۳(-۳)-۲=-۱۱$$

۱۳۶۴– گزینه‌ی «۴»

می‌دانیم تابع $y=[x]$ در نقاط به طول‌های صحیح حد ندارد. بنابراین برای آن‌که تابع $f(x)=(x^۲+ax+b)[x]$، در بازه‌ی باز $(۱,۴)$ حد داشته باشد باید در هر نقطه‌ی صحیح در این بازه، یعنی ۲ و ۳ حد داشته باشد، این موضوع زمانی ممکن است که $x=۲$ و $x=۳$ ریشه‌های معادله‌ی $x^۲+ax+b=۰$ باشند، لذا:

$$f(x)=(x-۲)(x-۳)[x]=(x^۲-۵x+۶)[x]$$

در نتیجه $a=-۵$ و $b=۶$، بنابراین:

$$(a,b)=(-۵,۶)$$

۱۳۶۵– گزینه‌ی «۲»

$$\lim_{x\to ۰}(۳^x-۱)\left(\frac{۱}{۹^x-۱}\right)=\lim_{x\to ۰}\frac{(۳^x-۱)}{(۳^x-۱)(۳^x+۱)}=\frac{۱}{۲}$$

بنا به قضیه فشردگی داریم $\lim_{x\to ۰}(۳^x-۱)(\cos\frac{۱}{x})=۰$ پس:

$$\lim_{x\to ۰}(۳^x-۱)\left(\frac{۱}{۹^x-۱}-\cos\frac{۱}{x}\right)=\frac{۱}{۲}-۰=\frac{۱}{۲}$$

۱۳۶۶– گزینه‌ی «۳»

$$\lim_{x\to ۲^+}(fof)(x)=\lim_{x\to ۲^+}f(f(x))$$

وقتی x با مقادیر بیش‌تر از ۲ به ۲ نزدیک می‌شود، $f(x)$ با مقادیر کمتر از صفر به صفر نزدیک می‌شود، لذا:

$$x\to ۲^+\Rightarrow f(x)\to ۰^-$$

با جاگذاری در رابطه داریم:

$$\lim_{x\to ۲^+}f(f(x))=\lim_{f(x)\to ۰^-}f(f(x))$$

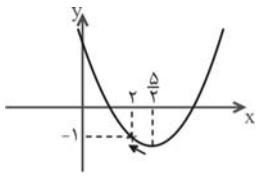
با انتخاب $f(x)=t$ داریم:

$$=\lim_{t\to ۰^-}f(t)=\lim_{x\to ۰^-}f(x)=-۱$$

۱۳۶۷– گزینه‌ی «۴»

با فرض $g(x)=x^۲-۵x+۵$ باید $\lim_{x\to ۲^+}f(g(x))$ را بیابیم.

با توجه به نمودار تابع $y=x^۲-۵x+۵$ وقتی $x\to ۲^+$، $g(x)$ با مقادیر کم‌تر از -۱ به -۱ میل می‌کند، دقت کنید $g(۲)=-۱$، پس:



$$\lim_{x\to ۲^+}f(g(x))=\lim_{g(x)\to(-۱)^-}f(g(x))=\lim_{x\to(-۱)^-}f(x)=-۱$$

۱۳۶۸– گزینه‌ی «۳»

با توجه به اثبات تست قبل، وقتی $x\to ۰^+$، آنگاه $f(x)\to ۱^-$، پس:

$$\lim_{x\to ۰^+}g(f(x))=\lim_{f(x)\to ۱^-}g(f(x))=\lim_{x\to ۱^-}g(x)=\lim_{x\to ۱^-}[x]=۰$$

به طریق مشابه:

$$\lim_{x\to ۰^-}g(f(x))=\lim_{f(x)\to ۱^+}g(f(x))=\lim_{x\to ۱^+}g(x)=\lim_{x\to ۱^+}[x]=۱$$

پس حد چپ و راست در $x=۰$ موجود و نابرابرند.

۱۳۶۹– گزینه‌ی «۲»

از آنجایی که $\lim_{x\to ۰}x\left[\frac{۱}{x}\right]=۱$، پس $\lim_{x\to ۰^-}x^m\left[\frac{۱}{x^m}\right]=۱$، لذا:

$$\lim_{x\to ۰^-}x^{n-m}\times x^m\left[\frac{۱}{x^m}\right]=\lim_{x\to ۰^-}x^{n-m}$$

از آنجایی که $n<m$ است، لذا:

$$\lim_{x\to ۰^-}x^n\left[\frac{۱}{x^m}\right]=\lim_{x\to ۰^-}\frac{۱}{x^{m-n}}$$

اما تفاضل دو عدد فرد، عددی زوج است، بنابراین:

$$\lim_{x\to ۰^-}x^n\left[\frac{۱}{x^m}\right]=\frac{۱}{(۰^-)^{\text{عددی زوج}}}=\frac{۱}{۰^+}=+\infty$$

۱۳۷۰– گزینه‌ی «۴»

از آن‌جایی‌که حد تابع عدد حقیقی شده است و مخرج به ازای $x=۲$، صفر می‌شود، در صورتی‌که عبارت درجه‌ی دوم $x^۲+ax+b$ به ازای $x=۲$، غیرصفر باشد، حد تابع بی‌نهایت خواهد شد. پس عبارت درجه‌ی دوم باید شامل یک عامل $(x-۲)$ باشد. بنابراین عبارت به صورت زیر خواهد بود:

$$\lim_{x\to ۲}(x+k)(x-۲)\left[\frac{۱}{x-۲}\right]=۳$$

اما $\lim_{x\to ۲}(x-۲)\left[\frac{۱}{x-۲}\right]=۱$، پس:

$$\lim_{x\to ۲}(x+k)=۳\Rightarrow ۲+k=۳\Rightarrow k=۱$$

لذا عبارت درجه دوم به صورت زیر است:

$$(x-۲)(x+۱)=x^۲-x-۲$$

لذا $b=-۲$ و $a=-۱$ بنابراین: $(a,b)=(-۱,-۲)$

۱۳۷۱– گزینه‌ی «۲»

ابتدا تابع fog را تشکیل می‌دهیم:

$$fog(x)=f(g(x))=\left[\frac{\sin x}{x}\right]$$

بایـد $\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin x}{x}\right]$ را بررسـی کنـیم، از آنجـایی کـه بـرای هـر $0<|x|<\frac{\pi}{2}$، $\sin x < x$ (بـه دایـره‌ی مثلثـاتی توجـه کنیـد)، لـذا $0<\frac{\sin x}{x}<1$ و در نتیجه:

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin x}{x}\right]=0$$

بنابراین حد چپ و راست در $x=0$ موجود و برابرند.

۱۳۷۲–گزینه‌ی «۱»

با توجه به قضیه‌ی فشردگی، خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to 0} -x^2 = \lim_{x\to 0} x^2 = 0 \Rightarrow \lim_{x\to 0}(f(x)-3)=0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x)=3$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\left[\frac{-1}{f(x)}\right]=\left[\frac{-1}{3}\right]=-1$$

۱۳۷۳–گزینه‌ی «۴»

می‌دانیم:

$$\text{sgn}(x)=\begin{cases}1 & , x>0\\ 0 & , x=0\\ -1 & , x<0\end{cases}$$

اما عبارت درجه‌ی دوم x^2-3x+4 همواره مثبت است زیرا در آن، ضریب x^2 مثبت و $\Delta = 9-16<0$، پس:

$$\text{sgn}(\underbrace{x^2-3x+4}_{>0})=1$$

پس تابع f تابع ثابت $f(x)=1$ است و در هر نقطه‌ی دلخواهی دارای حد ۱ است، توجه کنید که انتقال افقی بر روی حد آن اثری ندارد.

۱۳۷۴–گزینه‌ی «۴»

از آنجایی که $\sin\frac{1}{x-1}$ در $x=1$ حد ندارد ولی کراندار است، لذا بـرای آنکه تابع f در $x=1$ حد داشته باشد، بایـد عامـل x^2-ax بـه ازای $x=1$ صفر شود. لذا:

$$x^2-ax \overset{x=1}{=\!=} 0 \Rightarrow 1-a=0\Rightarrow a=1$$

۱۳۷۵–گزینه‌ی «۲»

با استفاده از اثبات عدم وجود حد به‌وسیله‌ی دنباله‌ها می‌توان ثابت کرد تابع در هیچ نقطه‌ای حد ندارد به عنوان مثال اگر $\alpha\in Q$ (عددی گویا) باشد، آنگاه اگر دو دنباله‌ی a_n و a'_n را بیابیم که هر دو همگرا به α باشند ولی $\lim_{n\to\infty} f(a_n)\neq \lim_{n\to\infty} f(a'_n)$، آنگاه تـابع f در α حـد نـدارد، ایـن دو دنباله را به صورت زیر می‌توانیم در نظر بگیریم:

$$a_n=\alpha+\frac{1}{n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(a_n)=1$$

$$a'_n=\alpha+\frac{\sqrt{2}}{n}\Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(a'_n)=0$$

نکته

بطور کلی تـابع بـا ضـابطه‌ی $f(x)=\begin{cases} g(x) & , x \text{ گویا} \\ h(x) & , x \text{ گنگ}\end{cases}$، زمانی در $x=\alpha$ حد دارد هرگاه:

$$\lim_{x\to\alpha} g(x)=\lim_{x\to\alpha} h(x)$$

اگـر توابـع g و h پیوسـته باشـند، آنگـاه از حـل معادله‌ی $g(x)=h(x)$، می‌توان نقاطی را که تابع f در آنها حد دارد، به‌دست آورد.

۱۳۷۶–گزینه‌ی «۲»

با توجه به نکته‌ی گفته شده باید در $\frac{1}{2}$ ضابطه‌ی بالا و پایین برابر باشند:

$$x+a=3x+1 \xrightarrow{x=\frac{1}{2}} \frac{1}{2}+a=\frac{3}{2}+1\Rightarrow a=2$$

۱۳۷۷–گزینه‌ی «۳»

توابع به شـکل $y=\begin{cases}a & ; x\in Q\\ b & ; x\notin Q\end{cases}$ $(a\neq b)$ در هـیچ نقطـه‌ای حـد ندارند لذا در این سؤال تابع f در تمام نقاط R فاقد حد است ولی f تابعی کراندار است زیرا $|f|\le 2$ پس زمانی که ضریب f یعنی (x^3-4x^2) برابر صفر شود تابع g حد خواهد داشت:

$$x^3-4x^2=0\Rightarrow x^2(x-4)=0\Rightarrow \begin{cases}x=0\\ x=4\end{cases}$$

لذا تابع g در نقاط $x=0$ و $x=4$ حد دارد زیرا در این نقاط تابع g بـه صورت(کراندار × صفر) تبدیل می‌شود که حاصل آن صفر است.

راهبرد حل تیپ (۷)

وقتی نمودار تابع با ضابطه‌ی $y=\frac{f(x)}{g(x)}$ در نقطه‌ی $x=a$ تعریف نشده باشد ولی دارای حد L باشد، آنگاه:

الف- $x=a$ ریشه ی مشترک صورت و مخرج است.

ب- حد تابع در $x=a$ برابر L است.

۱۳۷۸–گزینه‌ی «۲»

با توجه به نمودار $f(0)=0$ است، پس:

$$f(0)=\frac{0+0+b}{0-1}=0\to b=0$$

لذا تابع به صورت $f(x)=\frac{4x^3+ax}{x-1}$ تبدیل می‌شود. اما بـا توجـه بـه نمودار، تابع در $x=1$ تعریف نمی‌شود و در این نقطه حد دارد. چون مخرج کسر به ازای $x=1$ صفر است، باید صورت کسر نیز به ازای $x=1$، صفر شود تا عبارت به صورت مبهم $\frac{0}{0}$ تبدیل شود، چون اگر صـورت بـه ازای $x=1$ صفر نشود حد تابع در این نقطه، ∞ می‌شود، لذا:

$$4x^3+ax|_{x=1}=0 \Rightarrow 4+a=0 \Rightarrow a=-4$$

بنابراین:

$$(a\ ,\ b)=(-4\ ,\ 0)$$