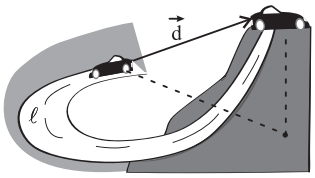
صفحه‌های ۲ تا ۱۰ کتاب درسی

درسنامه شناخت حرکت

مسافت، جابه‌جایی، تندی و سرعت متوسط و لحظه‌ای

در بخش شناخت حرکت به مفاهیم اصلی حرکت پرداخته می‌شود و اغلب سؤال‌های این بخش بررسی کیفی کمیت‌های مربوط به حرکت مانند مکان، جابه‌جایی، مسافت طی شده، سرعت و شتاب است. تحلیل نمودارها نقشی کلیدی در تسلط بر این مبحث دارد، ابتدا به مفاهیم و روابط اصلی حرکت می‌پردازیم.

مسافت (ℓ): طول مسیری است که متحرک طی می‌کند.



جابه‌جایی ($\vec{d}$): برداری است که مکان آغازین متحرک را به مکان پایانی آن وصل می‌کند.

Δt: مدت زمانی که طول می‌کشد تا متحرک از مکان آغازین به مکان پایانی برسد.

تندی متوسط (s_{av}): $s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}$ و **سرعت متوسط (v_{av}):** $\vec{v}_{av}=\frac{\vec{d}}{\Delta t}$

در SI، ℓ و d برحسب متر و s_{av} و v_{av} برحسب m/s است.

◇ چند نکته:

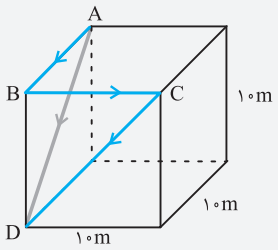
۱. مسافت و تندی متوسط کمیت‌های عددی‌اند اما جابه‌جایی و سرعت متوسط برداری‌اند.

۲. جابه‌جایی و سرعت متوسط به مسیر حرکت بستگی ندارند و منحصراً به نقطهٔ آغاز و پایان حرکت وابسته‌اند.

۳. فقط در حرکت روی خط راست ممکن است که اندازهٔ جابه‌جایی برابر مسافت باشد. آن هم به شرطی که متحرک تغییر جهت ندهد. به‌طور کلی $\ell \geq |d|$ و $s_{av} \geq |v_{av}|$

تیپ ۱: حل مسئله به روش هندسی

مثال: گلوله‌ای مسیر ABCD (از A تا D) را طی می‌کند. اگر این جابه‌جایی ۵s طول بکشد، تندی متوسط و سرعت متوسط را به‌دست آورید.



حل: گلوله دو ضلع AB و BC و قطر CD را طی می‌کند. بنابراین مسافت طی شده به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\ell = AB+BC+CD = ۱۰+۱۰+۱۰\sqrt{۲} = ۱۰(۲+\sqrt{۲})m$$

$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t} \Rightarrow s_{av}=\frac{۱۰(۲+\sqrt{۲})}{۵}=۲(۲+\sqrt{۲})\frac{m}{s}$$

بردار $\overrightarrow{AD}$، (قطر مربع) جابه‌جایی متحرک است بنابراین داریم:

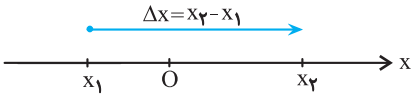
$$v_{av}=\frac{d}{\Delta t}=\frac{AD}{\Delta t}=\frac{۱۰\sqrt{۲}}{۵}=۲\sqrt{۲}m/s$$

تیپ ۲: حل مسئله به کمک محور مکان در حرکت بر خط راست

محور مکان: وقتی یک متحرک بر خط راست در حرکت باشد، برای تحلیل حرکت، کافی است، محوری منطبق بر این خط در نظر بگیریم که دارای مبدأ (O)، جهت و یکای مناسب باشد. در این صورت مکان متحرک در هر لحظه با یک عدد حقیقی قابل نمایش و بیان است.

۱. در حرکت برخط راست، تمام کمیت‌های برداری مانند جابه‌جایی، سرعت و شتاب، الزاماً یا در سوی محور مکان (سوی مثبت) یا در خلاف جهت آن (سوی منفی) هستند که با علامت + و − مشخص می‌شوند. بنابراین برای تعیین جهت کمیت‌ها، کافی است، جهت آن‌ها را با جهت محور مکان مقایسه کنیم.

۲. بردار مکان: برداری که مبدأ مکان (O) را به محل جسم وصل می‌کند. بنابراین اگر جسم در مکان مثبت باشد بردار مکان آن مثبت و اگر در مکان منفی باشد، بردار مکان آن منفی است.



سرعت متوسط در بازهٔ زمانی $t_۱$ تا $t_۲$:

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{x_۲-x_۱}{t_۲-t_۱}$$

مثال: شخصی روی محور x در $t_۱=۰$ از مکان $\vec{d}_۱=(-۲m)\vec{i}$ به راه افتاده و در $t_۲=۶s$ به مکان $\vec{d}_۲=(۵m)\vec{i}$ و سپس در $t_۳=۱۰s$ به مکان $\vec{d}_۳=(۱m)\vec{i}$ می‌رود. (شخص در بازه‌های زمانی $t_۱$ تا $t_۲$ و همچنین $t_۲$ تا $t_۳$ تغییر جهت و یا توقف ندارد.)

الف) مسیر حرکت شخص را رسم کنید.

ب) شخص چند متر در سوی مثبت و چند متر در سوی منفی محور در حرکت است؟

پ) جهت سرعت چند بار و در چه لحظه‌هایی تغییر می‌کند.

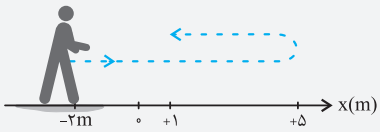
ت) بردار مکان چند بار تغییر جهت داده است؟

ث) تندی متوسط و سرعت متوسط در کل حرکت چقدر است؟ سرعت متوسط را برحسب بردار یکهٔ محور x ($\vec{i}$) بیان کنید.

ج) در چه صورت اندازهٔ سرعت متوسط شخص با تندی متوسط او برابر است؟

حل:

الف) مسیر حرکت شخص مطابق شکل است:



ب) شخص ۷ متر (از $-۲m$ به $+۵m$) در سوی مثبت و ۴ متر (از $+۵m$ به $+۱m$) در سوی منفی محور حرکت کرده است.

پ) جهت سرعت یک بار و در لحظهٔ $t_۲ = ۶s$ تغییر کرده است.

ت) تعداد تغییر جهت بردار مکان برابر تعداد دفعات عبور از مبدأ مکان است، که فقط یک بار رخ داده است.

ث) مسافت طی شده ۱۱ متر است $(\ell = ۷ + ۴ = ۱۱m)$ و برای محاسبهٔ تندی متوسط خواهیم داشت:

$$s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} = \frac{۱۱}{۱۰} = ۱/۱\ m/s$$

$$\Delta x = x_۳ - x_۱ = ۱ - (-۲) = ۳m$$

جابه‌جایی ۳ متر است و برای سرعت متوسط داریم:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{۳}{۱۰} m/s \Rightarrow \vec{v}_{av} = \frac{۳}{۱۰}\vec{i}\,(\frac{m}{s})$$

ج) در صورتی که شخص در طی حرکت، تغییر جهت ندهد. (برنگردد)

اهمیت نمودارها در امتحان و کنکور

در چند سال اخیر، طرح سوال بر پایهٔ نمودار هم در امتحان نهایی و هم کنکور سراسری افزایش یافته است. اهمیت نمودار به این خاطر است که حجم زیادی از اطلاعات را می‌توان در یک نمودار جای داد و یا از آن استخراج کرد.

۳ نکتهٔ کلی در خواندن نمودار:

۱) توجه به کمیت‌های ذکر شده بر روی محورها

۲) توجه به یکای ذکر شده بر روی محورهای افقی و عمودی

۳) توجه به خواستهٔ سؤال که در کدام بازهٔ معین، کمیت یا تغییر یک کمیت یا کیفیتی را از ما می‌پرسد.

تیپ ۳: بررسی کیفی حرکت به کمک نمودار مکان - زمان

۱) نموداری می‌تواند نشان دهندهٔ نمودار مکان - زمان حرکت یک متحرک باشد که از لحاظ ریاضی اولاً تابع باشد، ثانیاً پیوسته باشد.

مثال: کدام شکل نمی‌تواند نمودار مکان - زمان یک متحرک باشد؟ چرا؟ (مشابه نهایی تجربی ـ شهریور ۹۸)

حل: شکل (۱)، چون امکان ندارد که متحرک در یک لحظهٔ معین (مثلاً $t_۱$) در دو مکان مختلف $x_۱$ و $x_۲$ باشد. به عبارتی شکل (۱) تابع نیست.

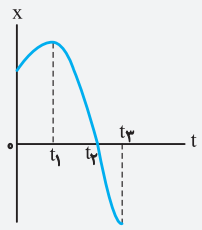
۲) مکان (x) یا تغییر مکان (Δx) را باید روی محور x (محور قائم) جستجو کرد.

۳) جهت کمیت‌های برداری مانند جهت حرکت، سرعت، جابه‌جایی، شتاب و ... بر اساس جهت محور x تعیین می‌شود. یا همسو با جهت مثبت محور x هستند (مثبت) و یا در خلاف جهت محور x هستند (منفی).

۴) در فیزیک زمان منفی تعریف نمی‌شود بنابراین صفحه سمت چپ نمودار، باید خالی باشد.

۵) دور یا نزدیک شدن نمودار به محور افقی (محور زمان) به مفهوم دور یا نزدیک شدن متحرک به مبدأ مکان (نقطهٔ O) است.

مثال: شکل روبه‌رو نمودار مکان - زمان حرکت یک متحرک که در راستای محور x حرکت می‌کند را نشان می‌دهد. (نهایی تجربی ـ خرداد ۱۴۰۰)



الف) در کدام لحظه متحرک بیشترین فاصله از مبدأ مختصات را دارد؟

ب) جابه‌جایی کل متحرک در جهت محور x است یا خلاف جهت محور x؟

پ) جهت حرکت متحرک چند بار تغییر کرده است؟

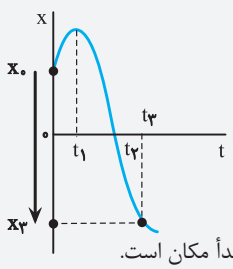
ت) در کدام بازهٔ زمانی متحرک در حال نزدیک شدن به مبدأ است؟

ث) در کدام لحظه متحرک از مبدأ عبور می‌کند؟

حل:

الف) در لحظهٔ $t_۱$

ب) خلاف جهت محور x



متحرک در $t = ۰$ در مکان $x_۰$ و در لحظهٔ پایانی در مکان $x_۳$ قرار دارد. بنابراین جابه‌جایی کل از $x_۰$ به $x_۳$ در خلاف جهت محور x و منفی است.

پ) متحرک یک بار در لحظهٔ $t_۱$ تغییر جهت می‌دهد. (نقطهٔ اکسترمم منحنی)

ت) دربازهٔ زمانی $t_۱$ تا $t_۲$

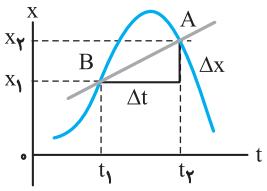
ث) متحرک در لحظهٔ $t_۲$ از مبدأ عبور می‌کند.

محل برخورد نمودار مکان - زمان با محور زمان (به شرطی که نمودار در بالا و پایین آن تداوم داشته باشد) لحظهٔ عبور از مبدأ مکان است.

تعریف سرعت متوسط به کمک نمودار مکان - زمان

شیب خطی که دو نقطه از نمودار مکان - زمان را به هم وصل می‌کند برابر سرعت متوسط (v_{av}) متحرک در بازهٔ زمانی متناظر با این دو نقطه است.

$$v_{av} = \text{شیب خط} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$



تندی و سرعت لحظه‌ای

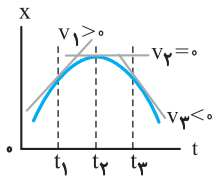
تندی لحظه‌ای: تندی متحرک در هر لحظه را گوییم، کیلومتر شمار خودرو، تندی لحظه‌ای را نشان می‌دهد.

سرعت لحظه‌ای: بردار سرعت متحرک در هر لحظه است.

◇ چند نکته

۱. سرعت لحظه‌ای کمیتی برداری اما تندی لحظه‌ای کمیتی نرده‌ای است.
۲. تندی لحظه‌ای با بزرگی سرعت در هر لحظه مساوی است.
۳. بردار سرعت در هر لحظه مماس بر مسیر حرکت است.
۴. در یک بازهٔ زمانی معین، بزرگی سرعت متوسط لزوماً با تندی متوسط برابر نیست.

تیپ ۴: بررسی کیفی تغییرات سرعت و تعیین نوع حرکت به کمک نمودار مکان - زمان



۱. سرعت لحظه‌ای: شیب خط مماس بر نمودار $x-t$ در هر لحظه برابر سرعت لحظه‌ای متحرک است.

۲. سرعت صفر: اگر خط مماس بر نمودار $x-t$ افقی باشد، شیب خط و در نتیجه سرعت لحظه‌ای صفر است.

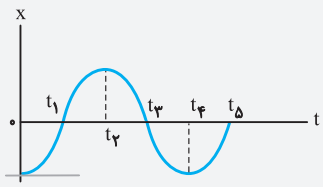
تذکر: در ماکزیمم و مینیمم نمودار $v = ۰$ است.

۳. جهت و علامت سرعت لحظه‌ای: اگر شیب مماس مثبت باشد، سرعت مثبت (در سوی محور x) و اگر منفی باشد، سرعت منفی (در خلاف جهت محور x) است.

۴. مقایسهٔ بزرگی سرعت لحظه‌ای (تندی لحظه‌ای): کافی است قدرمطلق شیب خط مماس را در لحظات مورد سؤال مقایسه کنیم.

۵. تعیین نوع حرکت: اگر بزرگی سرعت (تندی) در یک بازهٔ زمانی در حال افزایش باشد، حرکت تندشونده است (قدرمطلق شیب مماس با گذشت زمان در حال افزایش است.) و اگر قدرمطلق شیب مماس (تندی) با گذشت زمان در حال کاهش باشد، حرکت کندشونده است.

مثال: نمودار مکان - زمان متحرکی که روی محور x حرکت می‌کند، مطابق شکل است.



الف) درچه لحظه‌هایی سرعت متحرک صفر است. در کدام یک از این لحظات، جهت سرعت تغییر می‌کند؟
ب) از $t_۱$ تا $t_۲$، جهت سرعت مثبت است یا منفی؟
پ) از $t_۲$ تا $t_۳$، حرکت تندشونده است یا کندشونده؟
ت) از $t_۳$ تا $t_۴$، علامت سرعت و نوع حرکت چگونه است؟

حل:

الف) در $t = ۰$، $t_۲$ و $t_۴$ سرعت صفر است (مماس افقی است) اما جهت سرعت فقط در $t_۲$ و $t_۴$ تغییر می‌کند. (چون نمودار در طرفین این لحظه‌ها تداوم دارد و هم‌چنین شیب خط مماس در طرفین این لحظات تغییر علامت می‌دهد.)
ب) مثبت است. چون شیب خط مماس بر نمودار مکان - زمان در تمام لحظات این بازه مثبت است.
پ) تندشونده است چون قدرمطلق شیب خط مماس از لحظهٔ $t_۲$ تا $t_۳$ در حال افزایش است.
ت) از $t_۳$ تا $t_۴$ سرعت منفی و نوع حرکت کندشونده است. (قدر مطلق شیب خط مماس بر نمودار از $t_۳$ تا $t_۴$ در حال کاهش است.)

پیمانهٔ ۱

۱۰ سؤال

مسافت، جابه‌جایی، تندی و سرعت متوسط و لحظه‌ای | صفحه‌های ۲ تا ۱۰ کتاب درسی

مرجع

۱. **کدام جمله درست و کدام نادرست است و جملات ناقص را کامل کنید.**

الف) مسافت طی شده، همواره بزرگتر یا مساوی جابه‌جایی جسم است.

ب) برداری که مبدأ محور را به مکان جسم در هر لحظه وصل می‌کند، بردار ..... نامیده می‌شود.

پ) در حرکت بر روی خط راست و بدون تغییر جهت، مسافت با ..... برابر است.

ت) سرعت متوسط کمیتی برداری است که هم‌جهت با بردار ..... است.

ث) پاره‌خط جهت‌داری که مکان آغازین حرکت را به مکان پایانی حرکت وصل می‌کند ..... نامیده می‌شود.

صفحه‌های ۲ تا ۱۰، مرتبط با متن درس
الف) شیراز ـ عدالت ۱ ـ دی ۹۹
ب) نهایی تجربی ـ شهریور ۱۴۰۰
پ) نهایی ریاضی ـ خرداد ۹۹
ت) نهایی ریاضی ـ دی ۹۷
ث) نهایی تجربی ـ شهریور ۱۴۰۰

مرجع

ج) در صورتی اندازهٔ سرعت متوسط متحرک با تندی متوسط آن برابر است که جابه‌جایی و مسافت طی شده با هم (مساوی ـ نامساوی) باشند.

چ) تندی متوسط، کمیت ..... است.

ح) تندی لحظه‌ای و بزرگی سرعت لحظه‌ای همواره برابرند.

خ) تندی متوسط و سرعت متوسط همواره برابرند.

د) شیب خط واصل بین دو نقطه در نمودار مکان - زمان یک متحرک بیانگر سرعت لحظه‌ای آن است.

ذ) بردار سرعت همواره بر مسیر حرکت (مماس - عمود) است.

ر) شیب خط مماس بر نمودار مکان - زمان معرف سرعت (لحظه‌ای - متوسط) است.

ز) در حرکت روی محور x اگر x مکان جسم و v سرعت جسم باشد در صورتی که $xv < 0$ باشد متحرک الزاماً (به مبدأ نزدیک می‌شود- از مبدأ دور می‌شود.)

ج) اردیبل سما ـ دی ۹۹
چ) نهایی تجربی ـ شهریور ۱۴۰۰
د) مشهد ـ کانون علم دی ۹۹
ذ) نهایی ریاضی ـ دی ۱۴۰۰
ر) نهایی ریاضی ـ خرداد ۹۹

---

۲. متحرکی در مدت زمان ۸s از مکان $\vec{d}_1 = (-4m)\vec{i}$ به مکان $\vec{d}_2 = (4m)\vec{i}$ می‌رسد.

الف) جهت حرکت این متحرک را تعیین کنید.

ب) بزرگی سرعت متوسط متحرک در مدت زمان ۸s چند متر برثانیه است؟

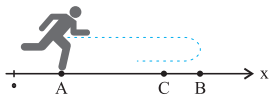
پ) مسافت طی شده متحرک چند متر است؟

ت) بردار مکان را تعریف کنید.

صفحهٔ ۵، مرتبط با تمرین ۱-۱
نهایی تجربی خرداد ۱۴۰۰

---

۳. مطابق شکل زیر، متحرکی در لحظهٔ $t_0 = 0$ از نقطهٔ A حرکت خود را روی محور x شروع کرده و مطابق مسیر نشان داده شده در لحظات $t_1 = 2s$ و $t_2 = 4s$ به‌ترتیب در نقاط B و C قرار می‌گیرد.



درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را بررسی کنید.

الف) در ۲ ثانیهٔ اول حرکت بردار مکان متحرک یک بار تغییر جهت می‌دهد.

ب) در ۲ ثانیهٔ اول حرکت بردار مکان متحرک ابتدا در جهت محور x و سپس در خلاف محور x است.

پ) در ۲ ثانیهٔ اول حرکت اندازهٔ بردار مکان ابتدا افزایش یافته و سپس کاهش می‌یابد.

ت) بردار جابه‌جایی این متحرک در بازهٔ زمانی $t_0 = 0$ تا $t_2 = 4s$ در جهت محور x است.

صفحهٔ ۵ مکمل و مرتبط با تمرین ۱-۱
ب) ساری ـ فرزانگان ـ دی ۹۹

---

۴. متحرکی در لحظات $t_1 = 2s$، $t_2 = 4s$ و $t_3 = 10s$ به ترتیب در مکان‌های $+4m$، $-8m$ و $+12m$ قرار دارد.

اگر متحرک در هر یک از بازه‌های (t_1 تا t_2) و (t_2 تا t_3) تغییر جهت نداده باشد:

الف) مسیر حرکت متحرک را روی محور x ها با رسم شکل نمایش دهید.

ب) تندی متوسط را در بازهٔ زمانی t_1 تا t_3 به‌دست آورید.

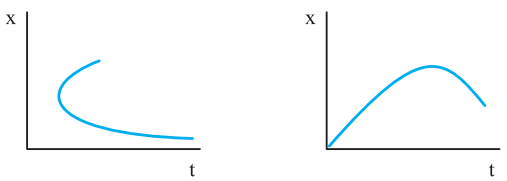
پ) سرعت متوسط را در بازهٔ زمانی t_2 تا t_3 حساب کنید.

صفحهٔ ۵، مکمل و مرتبط با مثال ۱-۲

---

۵. الف) ماهواره‌ای در مداری دایره‌ای به شعاع r، با تندی ثابت به دور کرهٔ زمین می‌چرخد. اگر زمان یک دور چرخش ماهواره به دور زمین T باشد، در مدت $\frac{T}{6}$، تندی متوسط ماهواره چند برابر بزرگی سرعت متوسط آن است؟

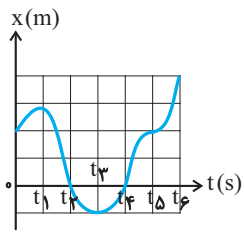
ب) توضیح دهید کدام‌یک از نمودارهای مکان - زمان شکل زیر، می‌تواند نشان دهندهٔ نمودار $x-t$ یک متحرک باشد.



الف) صفحهٔ ۲، مکمل و مشابه با پرسش ۱-۱
ب) صفحهٔ ۲۳، مکمل و مشابه تمرین ۸
ب) نهایی تجربی ـ شهریور ۱۴۰۰

---

۶. با توجه به نمودار مکان - زمان شکل رو به رو، به پرسش‌های زیر پاسخ دهید:



الف) متحرک در کدام لحظه‌ها از مبدأ مکان عبور کرده است؟

ب) جهت حرکت در کدام لحظه‌ها تغییر کرده است؟

پ) دو بازهٔ زمانی بنویسیدکه متحرک در حال دور شدن از مبدأ می‌باشد.

صفحهٔ ۶، مرتبط با مثال ۱-۳
نهایی ریاضی ـ دی ۹۹

مرجع

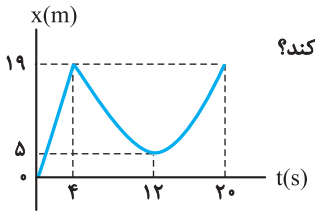
۷. شکل روبه‌رو نمودار مکان - زمان دوچرخه‌سواری را نشان می‌دهد که روی مسیری مستقیم در حال حرکت است.

الف) بیشترین فاصلهٔ دوچرخه سوار از مبدأ چند متر است؟

ب) در کدام بازهٔ زمانی دوچرخه سوار در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند؟

پ) مسافت طی شده توسط دوچرخه سوار در بازهٔ زمانی $t_0 = 0s$ تا $t_2 = 20s$ چند متر است؟

ت) اندازه سرعت متوسط دوچرخه‌سوار در بازهٔ زمانی $t_1 = 4s$ تا $t_2 = 20s$ را به‌دست آورید.



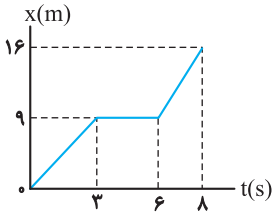
صفحهٔ ۶، مکمل و مرتبط با مثال ۱-۳
نهایی تجربی ـ دی ۹۷

۸. شکل روبه‌رو نمودار مکان - زمان حرکت یک متحرک که در راستای محور x حرکت می‌کند را نشان می‌دهد.

الف) در کدام لحظه متحرک بیشترین فاصله از مبدأ مختصات را دارد؟

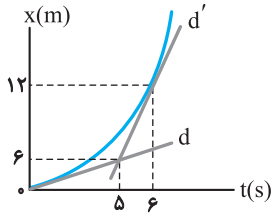
ب) سرعت متوسط متحرک در بازهٔ زمانی ۶s تا ۸s چند متر بر ثانیه است؟

پ) مسافت طی شده در بازهٔ زمانی صفر تا ۸s چند متر است؟



صفحهٔ ۲۳، مرتبط با تمرین ۶
نهایی تجربی ـ شهریور ۹۹

۹. در نمودار مکان - زمان شکل مقابل، d و d′ خط‌های مماس بر نمودار در لحظات $t = 0$ و $t = 6s$ می‌باشند، سرعت اولیه و سرعت در لحظهٔ $t = 6s$ را به دست آورید.



صفحهٔ ۱۰، مکمل و مرتبط با تمرین ۱-۳

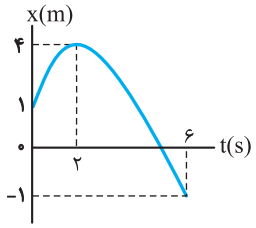
۱۰. نمودار مکان - زمان حرکت مورچه‌ای بر روی محور x، همانند شکل روبه‌رو است. با توجه به این نمودار به سؤالات زیر پاسخ دهید:

الف) در چه لحظه‌ای مورچه بیشترین فاصله از مبدأ مختصات را دارد؟

ب) در کدام بازهٔ زمانی سرعت مورچه هم‌جهت با محور x است؟

پ) سرعت متوسط مورچه از لحظهٔ $t_0 = 0s$ تا لحظهٔ $t = 6s$ چقدر است؟

ت) در چه لحظه‌ای جهت حرکت متحرک تغییر کرده است؟



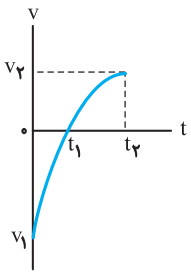
صفحهٔ ۱۰، مکمل و مرتبط با پرسش ۱-۵
نهایی تجربی ـ دی ۱۴۰۰

صفحه‌های ۱۰ تا ۱۳ کتاب درسی

درسنامه شتاب متوسط و لحظه‌ای

قبل از پرداختن به شتاب، نمودار سرعت - زمان را که یک نمودار کلیدی در بررسی حرکت و حل بسیاری از مسائل است بررسی می‌کنیم.

◇ نکات کاربردی نمودار سرعت - زمان



۱. هر نقطه از نمودار، سرعت در یک لحظهٔ معین را نشان می‌دهد.

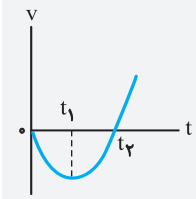
۲. علامت و جهت سرعت: بخشی از نمودار که زیر محور افقی (محور زمان) قرار دارد، سرعت منفی است. (از صفر تا t_1 در شکل مقابل) و بخش بالای محور افقی (محور زمان)، سرعت مثبت است (t_1 تا t_2).

۳. تند و کندشوندگی، سرعت صفر: در نقطهٔ برخورد منحنی با محور افقی، سرعت صفر است، در هر بازهٔ زمانی، اگر نمودار از محور t دور شود (چه به طرف بالا و چه به طرف پایین) بزرگی سرعت(تندی) متحرک در حال افزایش و حرکت تندشونده است. اما اگر به محور افقی نزدیک شود سرعت به صفر نزدیک می‌شود و حرکت کندشونده است.

۴. تغییر جهت متحرک: در لحظهٔ عبور نمودار از محور زمان، متحرک تغییر جهت می‌دهد. (جهت سرعت تغییر می‌کند.)

تیپ ۱: بررسی کیفی تغییرات سرعت و تعیین نوع حرکت به کمک نمودار سرعت - زمان

مثال: شکل مقابل نمودار v − t متحرکی که روی محور x در حرکت است را نشان می‌دهد.



الف) حرکت متحرک در چه بازهٔ زمانی در خلاف جهت محور مکان است؟

ب) متحرک در چه لحظاتی ساکن است؟

پ) متحرک در چه لحظه‌ای تغییر جهت می‌دهد؟

ت) نوع حرکت متحرک در بازهٔ زمانی صفر تا t_1 چگونه است؟

حل:

الف) در بازهٔ صفر تا t_2 متحرک در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند، چون سرعت منفی است.

ب) متحرک در $t=0$ و t_2 ساکن است (سرعت صفر است.)

پ) متحرک فقط در t_2، (لحظهٔ عبور از محور زمان) تغییر جهت می‌دهد.

ت) از صفر تا t_1، منحنی از محور افقی دور می‌شود (قدرمطلق سرعت در حال افزایش است) بنابراین حرکت تندشونده است.

شتاب متوسط و لحظه‌ای

حرکت شتاب‌دار: اگر سرعت متحرک (حداقل یکی از ۳ ویژگی امتداد یا بزرگی یا جهت) تغییر کند، حرکت شتاب‌دار است.

شتاب متوسط: آهنگ تغییر سرعت در یک بازهٔ زمانی است:

$$\vec{a}_{av}=\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

تذکر: $\vec{a}_{av}$ کمیتی برداری است و همواره هم‌جهت با تغییر سرعت $(\Delta\vec{v})$ است. در حرکت روی خط راست (بر محور x) داریم:

$$a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{v_2-v_1}{t_2-t_1}$$

تیپ ۲: محاسبهٔ شتاب متوسط از روی تعریف آن

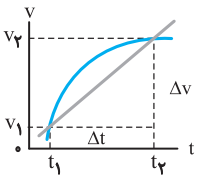
مثال: خودرویی از حال سکون در امتداد محور x شروع به حرکت می‌کند. پس از ۹s، سرعت خودرو به $18\,m/s$ در خلاف جهت محور x می‌رسد. شتاب متوسط خودرو در این بازهٔ زمانی چقدر است؟

حل: با استفاده از رابطهٔ شتاب متوسط، a_{av} را می‌یابیم. دقت کنید، چون سرعت خودرو در خلاف جهت محور x به $18\,m/s$ رسیده است، در این لحظه $v<0$ است.

$$a_{av}=\frac{v_2-v_1}{t_2-t_1}\xrightarrow[t_1=0,t_2=9s]{v_1=0,v_2=-18m/s}a_{av}=\frac{-18-0}{9-0}=-2\,m/s^2$$

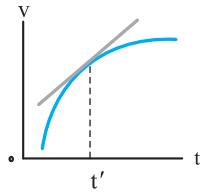
تعیین شتاب متوسط و لحظه‌ای به کمک نمودار سرعت - زمان

۱- شتاب متوسط: شیب خط قاطع در نمودار سرعت - زمان برابر شتاب متوسط متحرک در دو لحظهٔ قطع نمودار است.



$$a_{av}=\text{شیب خط}=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{v_2-v_1}{t_2-t_1}$$

۲- شتاب لحظه‌ای: شیب خط مماس بر نمودار سرعت - زمان در هر لحظه برابر شتاب متحرک در آن لحظه (شتاب لحظه‌ای) است.



◇ چند نکته در بررسی کیفی شتاب به کمک نمودار سرعت - زمان

۱. علامت و جهت شتاب متوسط در یک بازهٔ زمانی با علامت شیب خط قاطع بر نمودار سرعت - زمان یکسان است.

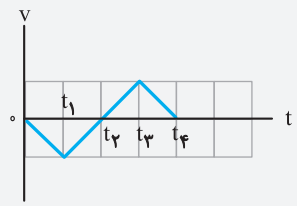
۲. علامت و جهت شتاب در هر لحظه با علامت شیب خط مماس بر نمودار سرعت - زمان در آن لحظه یکسان است.

۳. تغییرات شتاب معادل تغییرات شیب خط مماس بر نمودار سرعت - زمان در یک بازهٔ زمانی است.

۴. مساحت زیر نمودار سرعت - زمان با جابجایی متحرک برابر است (در سطح‌های بالای محور زمان، جابجایی مثبت و در پایین آن منفی است.)

تیپ ۳: بررسی کیفی تغییرات شتاب و تعیین نوع حرکت به کمک نمودار سرعت - زمان

مثال: شکل زیر نمودار سرعت ـ زمان متحرکی را نشان می‌دهد که در امتداد محور x حرکت می‌کند. با توجه به آن درستی یا نادرستی هر یک از جمله‌های زیر را با واژهٔ «درست» یا «نادرست» مشخص کنید. (نهایی ریاضی خرداد ۱۴۰۰)



الف) در بازهٔ زمانی t_1 تا t_2، متحرک در جهت محور x حرکت می‌کند.

ب) در بازهٔ زمانی صفر تا t_3، متحرک در لحظهٔ t_2 تغییر جهت می‌دهد.

پ) سرعت متوسط متحرک، در کل زمان حرکت، صفر است.

ت) در بازهٔ زمانی t_3 تا t_4، بردار شتاب در خلاف جهت محور x است.

حل:

الف) نادرست ب) درست پ) درست ت) درست

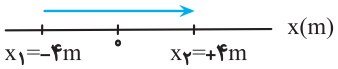
پاسخ‌های تشریحی

فصل ۱ حرکت بر خط راست

۱. الف) درست ب) مکان پ) بزرگی جابه‌جایی
ت) جابه‌جایی ث) بردار جابه‌جایی ج) مساوی
چ) نرده‌ای ح) درست خ) نادرست
د) نادرست ذ) مماس ر) لحظه‌ای
ز) به مبدأ نزدیک می‌شود.

---

۲. الف) در جهت مثبت محور x



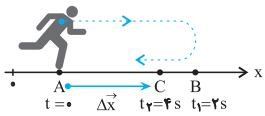
ب) $v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow v_{av}=\frac{۴-(-۴)}{۸}\Rightarrow v_{av}=۱\frac{m}{s}$

پ) اگر متحرک روی خط راست حرکت کند و در این ۸ ثانیه تغییر جهت نداده باشد، مسافت ۸ متر است؛ اما اگر حرکت متحرک روی خط راست نباشد و یا در بین راه تغییر جهت‌هایی داده باشد، نمی‌توان مسافت را تعیین کرد.

ت) برداری که مبدأ محور مکان را به مکان جسم در هر لحظه وصل کند، بردار مکان نام دارد.

---

۳. الف) نادرست است. شخص در تمام مدت در مکان‌های مثبت محور قرار دارد. بنابراین بردار مکان او همواره در جهت محور x است و تغییر جهت ندارد.



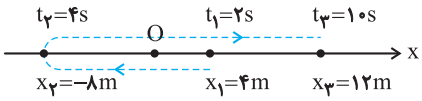
ب) نادرست است. طبق استدلال قسمت (الف)

پ) نادرست است. در ۲ ثانیهٔ اول شخص همواره در جهت مثبت از A تا B در حرکت است. بنابراین اندازهٔ بردار مکان همواره در حال افزایش است.

ت) درست است. جابه‌جایی شخص در این مدت بردار $\overrightarrow{AC}$ است که در جهت محور x است.

---

۴. الف) مسیر حرکت متحرک به‌صورت زیر است:



متحرک ابتدا ۱۲ متر به طرف چپ (در خلاف جهت محور x) و سپس ۲۰ متر به طرف راست (در جهت محور x) حرکت کرده است.

ب) برای یافتن تندی متوسط، باید کل مسافت طی شده و زمان کل را بیابیم. کل مسافت طی شده برابر مجموع مسافت‌ها در دو مرحله است و داریم: $\ell=۱۲+۲۰=۳۲\,m$

از طرف دیگر، بازهٔ زمانی Δt برابر است با:

$\Delta t=t_۳-t_۱=۱۰-۲=۸\,s$

بنابراین داریم: $s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}=\frac{۳۲}{۸}=۴\,m/s$

پ) سرعت متوسط در بازهٔ زمانی $t_۲$ تا $t_۳$ به‌صورت زیر حساب می‌شود:

$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{x_۳-x_۲}{t_۳-t_۲}\xrightarrow[t_۳=۱۰s\ ,\ t_۲=۴s]{x_۳=۱۲m\ ,\ x_۲=-۸m}$

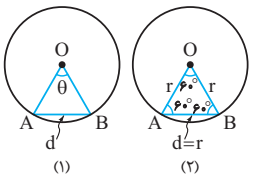
$v_{av}=\frac{۱۲-(-۸)}{۱۰-۴}=\frac{۲۰}{۶}=\frac{۱۰}{۳}\,m/s$

---

۵. الف) نسبت تندی متوسط s_{av} به سرعت متوسط v_{av} به‌صورت زیر است (Δt ثابت و برابر $\frac{T}{۶}$ است):

$\frac{s_{av}}{v_{av}}=\frac{\frac{\ell}{\Delta t}}{\frac{d}{\Delta t}}\xrightarrow{\text{ثابت }\Delta t}\frac{s_{av}}{v_{av}}=\frac{\ell}{d}$

حال باید ℓ و d را به‌دست آوریم. برای این کار شکل مسئله را رسم می‌کنیم. مطابق شکل ℓ برابر کمان $\overset{\frown}{AB}$ و d برابر وتر AB است (شکل ۱).



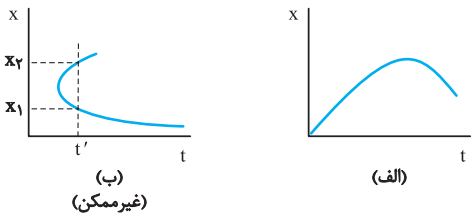
مطابق شکل (۲) مثلث حاصل، متساوی‌الاضلاع است و $d=AB=r$ و کمان $\overset{\frown}{AB}$ برابر $\frac{۱}{۶}$ محیط دایره است:

$\ell=\overset{\frown}{AB}=\frac{۲\pi r}{۶}=\frac{\pi r}{۳}$

در نهایت داریم: $\frac{s_{av}}{v_{av}}=\frac{\ell}{d}=\frac{\frac{\pi r}{۳}}{r}=\frac{\pi}{۳}$

تذکر: اگر شعاع دایره‌ای r باشد، آنگاه طول کمان مقابل به زاویهٔ مرکزی θ برابر $\ell=r\theta$ است. (مشروط بر آن‌که θ برحسب رادیان باشد)

ب) شکل الف



توضیح: زیرا متحرک در هر لحظه صرفاً در یک مکان می‌تواند باشد.

نکته: یک رابطه یا یک نمودار هنگامی می‌تواند معرف مکان یک متحرک برحسب زمان باشد که از لحاظ ریاضی اولاً تابع و ثانیاً پیوسته باشد.

---

۶. الف) متحرک در $t_۲$ و $t_۴$ از مبدأ مکان عبور می‌کند.

ب) جهت حرکت در $t_۱$ و $t_۳$ تغییر می‌کند.

پ) متحرک در بازه‌های زمانی (صفر تا $t_۱$) و ($t_۲$ تا $t_۳$) و ($t_۴$ تا $t_۶$) در حال دور شدن از مبدأ است.

---

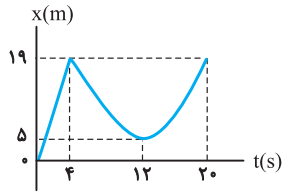
۷. الف) بیشترین فاصله از مبدأ ۱۹ متر است.

ب) از $t=۴s$ تا $t=۱۲s$ دوچرخه سوار در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند.

پ) $\ell=۱۹+۲(۱۹-۵)=۱۹+۲۸=۴۷m$

ت) سرعت متوسط از $t_1 = 4s$ تا $t_2 = 20s$ صفر است:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{19-19}{\Delta t} = 0$$

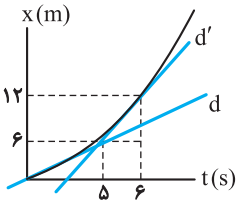


۸. الف) در لحظهٔ $t = 8s$ متحرک بیشترین فاصله را از مبدأ مختصات دارد.

ب) $v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \Rightarrow v_{av} = \frac{16-9}{8-6} = 3/5 m/s$

پ) $\ell = 16m$

۹. سرعت اولیه برابر شیب خط مماس بر نمودار $x-t$ در $t = 0$ است، مطابق شکل داریم:



$$d \text{ شیب خط } = v_0 = \frac{6}{5} m/s$$

و سرعت در لحظهٔ $t = 6s$ برابر شیب خط مماس در این لحظه است:

$$v_{t=6s} = d' \text{ شیب خط } = \frac{6}{1} = 6 m/s$$

۱۰. الف) در لحظهٔ $t = 2s$

ب) در بازهٔ زمانی صفر تا ۲s

پ) سرعت متوسط برابر است:

$$v_{av} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \xrightarrow[x_1=1m, t_1=0]{x_2=-1m, t_2=6s} v_{av} = \frac{-1-1}{6-0} = -\frac{1}{3}$$

ت) در لحظهٔ $t = 2s$

۱۱. الف) نادرست — ب) جابه‌جایی

پ) کاهش — ت) غرب

ث) درست — ج) نادرست

چ) درست — ح) شتاب لحظه‌ای

خ) درست — د) سرعت

ذ) مسیر حرکت — ر) شتاب لحظه‌ای

ز) عوض نمی‌شود. — س) هم‌جهت

ش) مکان — ص) تغییر سرعت

۱۲. در هر سه حالت، حرکت شتاب‌دار است.

۱۳. با استفاده از رابطهٔ شتاب متوسط، a_{av} را می‌یابیم. دقت کنید، چون سرعت خودرو در جهت محور X به $24\frac{m}{s}$ رسیده است، در این لحظه $v > 0$ است.

$$a_{av} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} \Rightarrow a_{av} = \frac{24-0}{12-0} = 2\frac{m}{s^2}$$

۱۴. الف) مساحت زیر نمودار سرعت- زمان برابر جابه‌جایی متحرک است. بنابراین داریم:

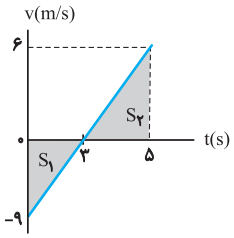
$$\Delta x = S \Rightarrow \Delta x = \frac{10 \times 15}{2} = 75m$$

ب) شتاب متوسط از رابطهٔ $a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ به دست می‌آید. بنابراین داریم:

$$a_{av} = \frac{v - v_0}{t} \xrightarrow{v=0,\ v_0=10m/s,\ t=10s} a_{av} = \frac{0-10}{10} = -1m/s^2$$

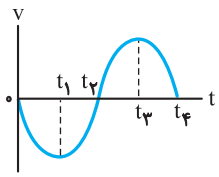
۱۵. الف) در بازهٔ زمانی صفر تا ۳s حرکت کندشونده است، زیرا تندی متحرک در این بازه در حال کاهش است.

ب) مسافت طی شده برابر مجموع قدرمطلق مساحت‌های زیر نمودار سرعت زمان است.



$$L = |S_1| + S_2$$
$$\Rightarrow L = |\frac{-9 \times 3}{2}| + \frac{6 \times 2}{2}$$
$$= 13/5 + 6 = 19/5m$$
$$\Rightarrow L = 19/5m$$

۱۶. الف) بازهٔ زمانی $t = 0$ تا t_1 و بازهٔ زمانی t_3 تا t_4 شتاب برابر شیب خط مماس بر نمودار $v-t$ است. در بازه‌های ذکر شده، شیب خط مماس منفی است.



ب) کندشونده است، چون در این بازهٔ زمانی اندازهٔ سرعت در حال کاهش است.

۱۷. الف) از t_1 تا t_2، شتاب منفی و حرکت کندشونده است.

ب) (از صفر تا t_1) و (t_3 تا t_4) شتاب مثبت است.

پ) در t_3، شتاب صفر است و سرعت بیشینه منفی است.

ت) از صفر تا t_2 متحرک در جهت مثبت محور x در حرکت است.

۱۸. الف) جابه‌جایی

ب) از صفر تا t_1 شتاب در جهت مثبت است. (چون شیب خط مماس مثبت است.)

پ) از t_2 تا t_3، حرکت تندشونده است (چون بزرگی سرعت در حال افزایش است.)

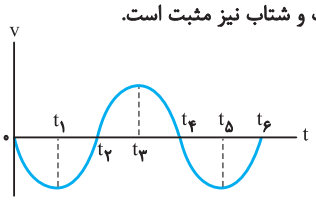
ت) در t_2 متحرک تغییر جهت می‌دهد.

۱۹. الف) متحرک در t_2 و t_4 تغییر جهت داده است.

ب) در بازه‌های (۰ تا t_1) و (t_3 تا t_4) و (t_5 تا t_6) شتاب منفی است.

پ) از t_2 تا t_3 سرعت مثبت و شتاب نیز مثبت است.

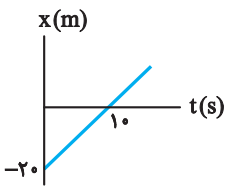
ت) در تمام بازه‌های زمانی که متحرک تغییر جهت نداده باشد. مانند بازهٔ (t_2 تا t_3)



۲۰. الف) کاهش ب) B
پ) برابر با ت) تندشونده

۲۱. الف) با سرعت ثابت ب) درست

۲۲. الف) معادلهٔ حرکت با سرعت ثابت از رابطهٔ $x = vt + x_0$ به دست می‌آید، طبق اطلاعات مسئله $x_0 = -20m$ است و برای سرعت داریم:



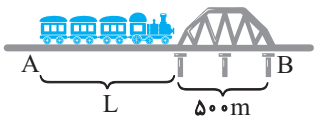
$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta t = 30s]{\Delta x = 40-(-20) = 60m} v = \frac{60}{30} = 2m/s \Rightarrow x = 2t - 20$$

t(s)	۰	۱۰
x(m)	-۲۰	۰

ب) فاصله از مبدأ یعنی $|x|$ بنابراین داریم:

$$|x| = 10 \Rightarrow |2t-20| = 10 \Rightarrow \begin{cases} 2t-20 = 10 \Rightarrow t = 15s \\ 2t-20 = -10 \Rightarrow t = 5s \end{cases}$$

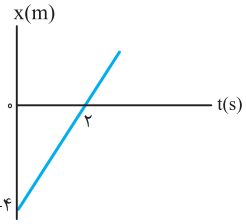
۲۳. برای این‌که قطار به طور کامل از پل عبور کند باید انتهای قطار (نقطهٔ A) از انتهای پل (نقطهٔ B) بگذرد بنابراین جابجایی قطار برابر مجموع طول پل و طول قطار است. بنابراین داریم:



$$\Delta x = vt \xrightarrow[t=30s]{\Delta x = 500+L,\ v=25m/s} 500 + L = 25 \times 30$$

$$\Rightarrow 500 + L = 750 \Rightarrow L = 250m$$

۲۴. برای تعیین معادلهٔ حرکت کافی است x_0 و v را یافته در تابع $x = vt + x_0$ قرار دهیم. $x_0 = -4m$ از روی نمودار داریم:

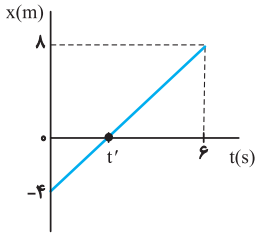


$$v = v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

$$v_{av} = \frac{4}{2} = 2m/s$$

$$x = 2t - 4$$

۲۵. الف) متحرک در مدت ۶ ثانیه، بدون تغییر جهت از مکان $x_0 = -4m$ به مکان $x = +8m$ (یعنی ۱۲ متر) جابه‌جا شده است. بنابراین:



$$L = 12m$$

ب) معادلهٔ حرکت عبارت است از:

$$x = vt + x_0 \xrightarrow[v=\frac{12}{6}=2m/s]{x_0=-4m} x = 2t - 4$$

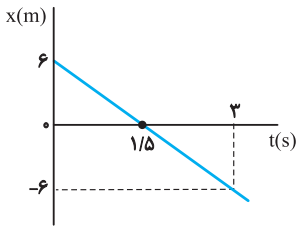
پ) لحظهٔ t' که $x = 0$ است. بنابراین داریم:

$$x = 2t - 4 \xrightarrow{x=0} 2t' - 4 = 0 \Rightarrow t' = 2s$$

۲۶. الف) در لحظهٔ عبور از مبدأ باید $x = 0$ باشد.

$$x = -4t + 6 \xrightarrow{x=0} -4t + 6 = 0 \Rightarrow t = \frac{6}{4} = 1/5s$$

ب) خیر چون معادلهٔ داده شده مربوط به حرکت با سرعت ثابت است $(v = -4m/s)$، بنابراین جهت حرکت همواره ثابت (در خلاف جهت محور x) است.



پ)

t	۰	۱/۵	۳
x	۶	۰	-۶

۲۷. با توجه به رابطهٔ حرکت با سرعت ثابت، مدت زمان حرکت هر یک از هواپیماها را می‌یابیم:

$$\Delta x = v\Delta t \Rightarrow \begin{cases} 900 = 400\Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{9}{4}h \\ 900 = 600\Delta t' \Rightarrow \Delta t' = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}h \end{cases}$$

حال اختلاف مدت زمان دو هواپیما برابر است با:

$$\Delta t - \Delta t' = \frac{9}{4} - \frac{3}{2} = \frac{3}{4}h \xrightarrow{1h=60min} 45min$$

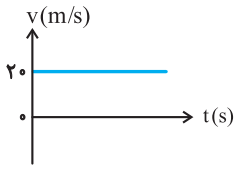
پس هواپیمای سریع‌تر ۴۵ دقیقه زودتر به مقصد می‌رسد.

۲۸. الف) ابتدا مکان جسم را در لحظهٔ $t_1 = 1s$ و $t_2 = 3s$ می‌یابیم:

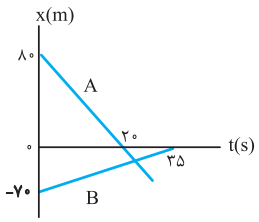
$$x = 20t + 10 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 1s \Rightarrow x_1 = (20\times1)+10 = 30m \\ t_2 = 3s \Rightarrow x_2 = (20\times3)+10 = 70m \end{cases}$$

$$\Rightarrow \Delta x = x_2 - x_1 = 70 - 30 = 40m$$

ب) چون سرعت متحرک ثابت است، نمودار آن به‌صورت خطی راستی موازی با محور زمان رسم می‌شود. دقت کنید، با توجه به معادلهٔ حرکت سرعت برابر $v = 20m/s$ است.



۲۹. الف) معادلهٔ متحرک A:



$$x_{0A} = 80m$$

$$\Rightarrow x_A = -4t + 80$$

$$v_A = \frac{\Delta x_A}{\Delta t_A} = -\frac{80}{20} = -4m/s$$

معادلهٔ متحرک B:

$$x_{0B} = -70m$$

$$v_B = \frac{70}{35} = 2m/s \Rightarrow x_B = 2t - 70$$

ب) در لحظهٔ به هم رسیدن $x_A = x_B$ است و داریم:

$$x_A = x_B \Rightarrow -4t + 80 = 2t - 70 \Rightarrow 6t = 150 \Rightarrow t = 25s$$