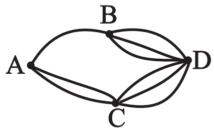
درس اول: شمارش

۱) فردی می‌خواهد از تهران به اصفهان برود و برای این کار قصد دارد از قم عبور کند. اگر از تهران به قم ۳ جاده وجود داشته باشد و این فرد به ۱۲ طریق بتواند از تهران به اصفهان برود، چند جاده از قم به اصفهان وجود دارد؟ (تمام جاده‌ها یک‌طرفه هستند.)

۱) ۲ ۲) ۴
۳) ۶ ۴) ۹

%۷۷
آبان۱۳۹۸

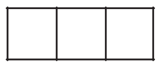
۲) مطابق شکل زیر بین ۴ شهر A، B، C و D چند جاده وجود دارد. در این صورت به چند طریق می‌توانیم از شهر A به شهر D سفر کنیم به طوری که حتماً از شهر C عبور کنیم و از شهر B عبور نکنیم؟



۱) ۳ ۲) ۶
۳) ۹ ۴) ۲

%۳۸
شهریور۱۳۹۸

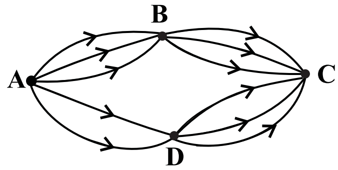
۳) می‌خواهیم مربع‌های شکل زیر را با سه رنگ آبی، قرمز و زرد رنگ‌آمیزی کنیم، به‌طوری‌که از هر سه رنگ حتماً استفاده شود. به چند طریق می‌توان این کار را انجام داد؟



۱) ۶ ۲) ۲۷
۳) ۱۸ ۴) ۱۲

%۶۲
آبان۱۳۹۸

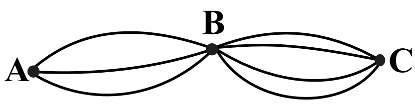
۴) با توجه به شکل زیر، به چند راه مختلف می‌توان از نقطهٔ A به نقطهٔ C رسید؟ (فلش روی هر مسیر جهت حرکت در آن مسیر را نشان می‌دهد.)



۱) ۱۵
۲) ۱۱
۳) ۲۰
۴) ۲۴

%۴۴
دی۱۳۹۹

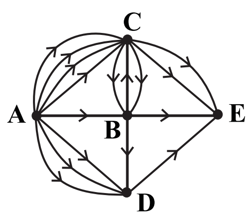
۵) با توجه به نقشهٔ راه‌ها به چند طریق می‌توان از شهر A به شهر C رفت و دوباره به شهر A برگشت به طوری که کل مسیر رفت با کل مسیر برگشت متفاوت باشد؟ (همهٔ راه‌ها دو طرفه‌اند و از جاده‌ای که عبور می‌کنیم برنمی‌گردیم.)



۱) ۳۰
۲) ۲۴
۳) ۷۲
۴) ۱۳۲

%۲۷
آبان۱۳۹۹

۶) از شهر A به چند طریق می‌توان به شهر E سفر کرد، به‌طوری‌که هرگز از شهر B عبور نکنیم؟ (جاده‌ها یک‌طرفه هستند.)



۱) ۱۱
۲) ۱۲
۳) ۱۴
۴) ۱۸

%۴۹
آبان۱۴۰۰

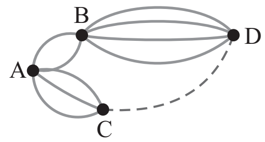
۷) در شکل زیر چند جاده بین شهر D و شهر C وجود داشته باشد تا تعداد راه‌های ممکن برای سفر از شهر A به شهر D برابر ۱۷ باشد؟ (در هر سفر دقیقاً دو جاده طی می‌کند.)

۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

۴) ۴



%۳۹
شهریور۱۳۹۸

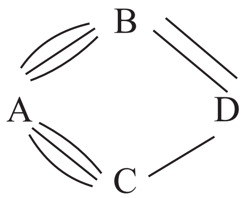
۸) مطابق شکل، بین ۴ شهر A، B، C و D تعدادی جاده وجود دارد. به چند طریق می‌توانیم از شهر C به شهر B بدون عبور از شهر D و بدون آنکه از شهری دو بار عبور کنیم، سفر کنیم؟

۱) ۲

۲) ۳

۳) ۶

۴) ۹



%۲۸
مرداد۱۳۹۸

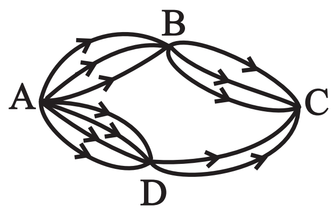
۹) با توجه به شکل زیر به چند طریق می‌توان از شهر A به شهر C سفر کرد؟ (مسیرها یک‌طرفه هستند.)

۱) ۱۲

۲) ۱۴

۳) ۱۷

۴) ۲۰



%۴۰
فروردین۱۳۹۹

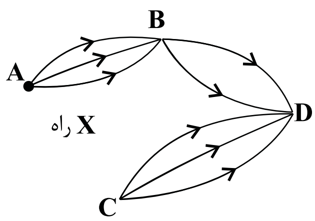
۱۰) برای رفتن از شهر A به شهر D به شرط آن‌که از B یا C عبور کنیم، دقیقاً ۱۸ راه متمایز وجود دارد. اگر X راه به‌صورت مستقیم از A به C وجود داشته باشد، مقدار X کدام است؟

۱) ۶

۲) ۵

۳) ۴

۴) ۳

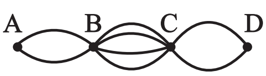


%۲۹
تیر۱۳۹۹

۱۱) بین ۴ شهر A، B، C و D مطابق شکل زیر راه‌های ارتباطی وجود دارد. به چند طریق می‌توانیم از شهر A به شهر D سفر کنیم به طوری که از هر شهر دقیقاً یک‌بار عبور کنیم؟

۱) ۶   ۲) ۱۶

۳) ۲۴   ۴) ۸



%۴۰
مهر۱۳۹۷

۱۲) حاصل عبارت $A=\frac{(n-۱)!(n-۴)!}{(n-۲)!(n-۳)!}$ بعد از ساده شدن کدام است؟

۱) $\frac{n-۱}{n-۳}$ ۲) $\frac{n}{n-۲}$

۳) $\frac{n}{n-۳}$ ۴) $\frac{n-۱}{n-۲}$

%۷۱
مهر۱۴۰۱

۱۳) مقدار n از رابطهٔ $\frac{(n-1)!}{4}=\frac{(n-2)!}{2}$ کدام است؟

%۴۵ — دی ۱۴۰۱

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

۱۴) مقدار k در عبارت $3=\frac{(k-1)!(k+1)!}{k!(k-2)!}$ کدام است؟

%۴۴ — شهریور ۱۳۹۷

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

۱۵) کدام تساوی نادرست است؟

%۷۳ — مرداد ۱۴۰۰

۱) $0!=1$ ۲) $\frac{6!}{3!}=120$ ۳) $2\times 3!=720$ ۴) $(2+3)!=120$

۱۶) حاصل عبارت $\frac{(3!)!}{(2!)3!}$ کدام است؟

%۶۳ — مرداد ۱۴۰۰

۱) ۶۰ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۶ ۴) ۱

۱۷) اگر $4=\frac{(x+2)!}{(x+1)!}$ باشد، آنگاه حاصل $4x$ کدام است؟

%۴۲ — فروردین ۱۴۰۱

۱) ۴ ۲) ۸ ۳) ۱۲ ۴) ۱۶

۱۸) کدام تساوی نادرست است؟

%۳۳ — دی ۱۳۹۹

۱) $\frac{6!}{2!}=3!$ ۲) $4!\times 2!=3!\times 7+3!$ ۳) $5!+2!=20\times 3!+2$ ۴) $9\times 8\times 7!=9!$

۱۹) با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ چند عدد ۵ رقمی و بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟

%۳۵ — آذر ۱۳۹۸

۱) ۴۸۰ ۲) ۷۲۰ ۳) ۴۰۰ ۴) ۸۱۰

۲۰) با ارقام ۰,۱,۳,۵,۷,۸ چند عدد ۴ رقمی مضرب ۵ می‌توان ساخت؟ (تکرار ارقام مجاز است.)

%۴۳ — تیر ۱۴۰۰

۱) ۳۶۰ ۲) ۴۸۰ ۳) ۵۲۰ ۴) ۶۸۰

۲۱) چند عدد سه رقمی بخش‌پذیر بر ۵ با استفاده از رقم‌های ۹,۷,۵,۳,۱ وجود دارد؟

۱) ۱۸
۲) ۴۰
۳) ۶۰
۴) ۲۵

%۴۷
اردیبهشت ۱۴۰۰

۲۲) روی یک میز غذا ۴ نوع سوپ، ۳ نوع پلو و ۵ نوع خورشت وجود دارد. به چند طریق می‌توان یک وعدهٔ غذایی شامل یک نوع سوپ، یک نوع پلو و یک نوع خورشت انتخاب کرد؟

۱) ۱۲
۲) ۶۰
۳) ۳۰
۴) ۷۲

%۴۶
اسفند ۱۳۹۹

۲۳) با ارقام ۶، ۵، ۴، ۳، ۲، ۱ و ۰ چند عدد چهاررقمی زوج کم‌تر از ۵۱۰۰ می‌توان نوشت؟ (تکرار ارقام مجاز است.)

۱) ۶۸۹
۲) ۸۱۲
۳) ۳۶۵
۴) ۶۶۰

%۵۱
دی ۱۳۹۹

۲۴) با ارقام ۰,۱,۲,۳,۴,۵ چند عدد سه رقمی بدون تکرار ارقام و بزرگ‌تر از ۳۰۰ می‌توان نوشت؟

۱) ۴۰
۲) ۶۰
۳) ۷۵
۴) ۴۸

%۳۶
اسفند ۱۳۹۹

۲۵) در یک مسابقهٔ دو، ۶ نفر شرکت کرده‌اند، به چند طریق امکان دارد نفرات اول تا ششم مشخص شوند؟

۱) ۱۰۲۴
۲) ۵۶۰
۳) ۳۶۰
۴) ۷۲۰

%۴۵
دی ۱۳۹۹

۲۶) چند رمز عبور چهار رقمی با ارقام زوج می‌توان ساخت؟

۱) ۴×۵^۳
۲) $۵^۴$
۳) !۵
۴) !۴

%۴۹
دی ۱۳۹۹

۲۷) با ارقام ۵,۴,۳,۲,۱ چند عدد پنج رقمی بزرگتر از ۲۰۰۰۰ بدون ارقام تکراری می‌توان ساخت؟

۱) ۹۶
۲) ۱۲۰
۳) ۴۲
۴) ۶۰

%۳۴
فروردین ۱۴۰۱

۲۸) با ارقام ۱ تا ۹، چند عدد ۵ رقمی بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟

۱) ۱۱۷۲۰
۲) ۱۵۱۲۰
۳) ۱۲۴۰۰
۴) ۱۴۷۶۰

%۳۱
شهریور ۱۴۰۰

۲۹) چند عدد پنج رقمی زوج با ارقام ۰,۱,۲,۳,۴,۵ می‌توان نوشت به شرط آنکه تکرار ارقام مجاز نباشد؟

۱) ۲۵۰ ۲) ۳۱۲
۳) ۱۸۶ ۴) ۴۱۸

%۳۸
مهر ۱۴۰۰

۳۰) تعداد جایگشت‌های ۶ حرفی کلمهٔ **reboak** که در آن حرف **r** اول قرار بگیرد، کدام است؟

۱) ۱۲۰ ۲) ۷۲
۳) ۴۸ ۴) ۶۲

%۲۸
مهر ۱۴۰۰

۳۱) با حروف **abfcde** چند کلمهٔ ۶ حرفی می‌توان نوشت که همواره با حرف **a** آغاز شود و با حرف **f** پایان یابد؟ (تکرار حروف جایز نیست.)

۱) ۲۴ ۲) ۳۶
۳) ۷۲۰ ۴) ۱۲۰

%۶۷
مهر ۱۳۹۷

۳۲) با حروف کلمهٔ «TANESH» چند رمز عبور چهار حرفی بدون تکرار حروف می‌توان ساخت به طوری که حرف «N» در هر رمز وجود داشته باشد؟

۱) ۲۱۰ ۲) ۲۴۰
۳) ۳۰۰ ۴) ۳۴۰

%۴۹
مرداد ۱۳۹۹

۳۳) با حروف کلمهٔ «سازندگی» چند کلمهٔ چهار حرفی بدون تکرار حروف می‌توان نوشت که حتماً شامل دو حرف «س» و «ا» باشد؟

۱) ۲۱۰ ۲) ۱۲۰
۳) ۱۸۰ ۴) ۲۴۰

%۴۹
تیر ۱۳۹۹

۳۴) با حروف کلمهٔ «آموزشی» چند کلمهٔ چهارحرفی (با معنی یا بی‌معنی و بدون تکرار حروف) می‌توان نوشت که به حرف «ی» ختم شوند؟

۱) ۶۰ ۲) ۷۲
۳) ۱۲۰ ۴) ۱۲۵

%۲۴
مرداد ۱۳۹۸

۳۵) با ارقام ۰,۲,۳,۴,۵,۶ چند عدد پنج رقمی زوج بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟

۱) ۴۰۸ ۲) ۱۲۰
۳) ۲۸۸ ۴) ۳۸۴

%۲۶
مرداد ۱۳۹۸

۳۶) با ارقام ۰,۱,۲,۵,۹ چند عدد ۳ رقمی فرد، بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟

۱) ۲۷ ۲) ۳۶
۳) ۱۸ ۴) ۶۰

%۵۰
مرداد ۱۳۹۸

۳۷ با ارقام ۲,۳,۴,۵,۶,۷ و بدون تکرار ارقام، چند عدد ۵ رقمی می‌توان ساخت که یکان آن‌ها ۶ و صدگان آن‌ها عددی مربع کامل باشد؟

۱) ۴
۲) ۱۲
۳) ۲۴
۴) ۴۸

%۶۷
فروردین ۱۳۹۹

۳۸ با ارقام ۰,۱,۲,۳,۴,۵,۶ چند عدد زوج چهار رقمی با ارقام غیرتکراری و بزرگ‌تر از ۳۰۰۰ می‌توان نوشت؟

۱) ۲۸۰
۲) ۳۲۰
۳) ۲۴۰
۴) ۱۲۰

%۳۴
مرداد ۱۳۹۷

۳۹ با حروف کلمهٔ «ولایت» چند کلمهٔ ۵ حرفی بدون توجه به معنی کلمه‌ها می‌توان نوشت؟

۱) ۶۰
۲) ۱۲۰
۳) ۱۶۰
۴) ۷۲۰

%۴۹
مرداد ۱۳۹۷

۴۰ تعداد جایگشت‌های حروف کلمه **mobil** که در آن‌ها (**i**) بلافاصله بعد از (**b**) آمده باشد، کدام است؟

۱) ۲۴
۲) ۴۸
۳) ۳۲
۴) ۱۶

%۳۲
فروردین ۱۴۰۰

۴۱ با حروف کلمهٔ «ولایت»، چند کلمهٔ چهار حرفی بدون تکرار حروف می‌توان نوشت که حرف اول آن نقطه‌دار باشد؟

۱) ۲۴
۲) ۴۸
۳) ۳۲
۴) ۶۴

%۵۸
مهر ۱۳۹۹

۴۲ تمام جایگشت‌های حروف کلمهٔ **mother** را درنظر بگیرید. در چند تا از آن‌ها دو حرف **t** و **h** کنار هم قرار ندارند؟

۱) ۲۴۰
۲) ۳۶۰
۳) ۴۸۰
۴) ۷۲۰

%۵۵
مرداد ۱۳۹۹

۴۳ ۱۵ دونده در یک مسابقه شرکت می‌کنند. اگر هیچ‌کدام هم‌زمان به خط پایان نرسند و جایزهٔ **A** به نفر اول و جایزهٔ **B** به نفر دوم داده شود، به چند طریق این جایزه‌ها بین دونده‌ها ممکن است توزیع شود؟

۱) ۲۱۰
۲) ۳۶۰
۳) ۱۲۰
۴) ۱۶۰

%۶۲
مهر ۱۴۰۰

۴۴ تعداد جایگشت‌های حروف کلمهٔ **SALAMAT** به طوری که حروف یکسان کنار هم باشند، کدام است؟

۱) ۱۲۰
۲) ۷۲۰
۳) ۱۴۴
۴) ۵۴۰

%۴۶
شهریور ۱۴۰۰

۴۵ چند عدد سه رقمی با ارقام فرد متمایز می‌توان نوشت که هم بر ۵ بخش‌پذیر باشد و هم از ۳۰۰ بزرگ‌تر باشد؟

۱) ۱۲
۲) ۸
۳) ۹
۴) ۱۰

٪۶۲
تیر ۱۴۰۱

۴۶ با ارقام صفر، ۱، ۲، ۷ و ۸ چند عدد چهار رقمی زوج بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟

۱) ۳۶
۲) ۶۰
۳) ۹۶
۴) ۱۲۰

٪۲۹
خرداد ۱۳۹۸

۴۷ با حروف کلمهٔ «دبستان» به چند طریق می‌توان یک کلمهٔ ۴ حرفی بدون توجه به معنای کلمه نوشت که با حرف «ن» آغاز و با حرف «س» پایان یابد؟ (تکرار حروف مجاز نیست.)

۱) ۱۰
۲) ۸
۳) ۱۲
۴) ۱۵

٪۴۳
دی ۱۳۹۷

۴۸ با حروف کلمهٔ «سلامتی» چند کلمهٔ ۴ حرفی (بامعنی یا بی‌معنی) بدون تکرار حروف می‌توان نوشت که حرف اول آن «م» باشد؟

۱) ۱۲۵
۲) ۷۲
۳) ۶۵
۴) ۶۰

٪۵۵
فروردین ۱۳۹۹

۴۹ با ارقام ۰,۱,۲,۳,۴,۵,۶ چند عدد چهار رقمی بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت که بر ۵ بخش‌پذیر باشد؟

۱) ۲۴۰
۲) ۲۲۰
۳) ۲۰۰
۴) ۱۸۰

٪۳۴
مرداد ۱۳۹۹

۵۰ ۱۰ دونده در یک مسابقه شرکت می‌کنند. اگر هیچ‌کدام هم‌زمان به خط پایان نرسند و ۳ جایزهٔ مختلف به نفرات اول، دوم و سوم داده شود، به چند طریق این جایزه‌ها بین دونده‌ها ممکن است توزیع شود؟

۱) ۷۲۰
۲) ۳۶۰
۳) ۱۲۰
۴) ۱۰۰

٪۲۷
آبان ۱۳۹۷

۵۱ با ارقام ۵,۶,۷,۸,۰ چند عدد سه رقمی مضرب ۵ ساخته می‌شود؟ (تکرار ارقام مجاز نیست.)

۱) ۲۱
۲) ۲۸
۳) ۴۰
۴) ۱۶

٪۴۳
آذر ۱۳۹۷

۵۲ قطاری با ۵۰ مسافر که ۲۰ نفر آن‌ها خانم هستند، در ۵ ایستگاه توقف می‌کند، به چند طریق می‌توانند این مسافرها پیاده شوند؟ (ایستگاه پنجم، ایستگاه آخر است. در انتها قطار باید به حالت تخلیهٔ کامل باشد و در این ۵ ایستگاه مسافر جدیدی سوار نمی‌شود و ترتیب پیاده شدن مسافران در هر ایستگاه اهمیتی ندارد.)

۱) 50^{5}
۲) 5^{50}
۳) $20^{5} \times 30^{5}$
۴) $5^{20} + 5^{30}$

٪۵۲
مرداد ۱۴۰۱

۵۳) کلاس درسی ۲۰ دانش‌آموز دارد که ۲ نفر از آن‌ها برای نمایندگی کلاس نامزد شده‌اند. اگر این دو نفر حق رأی نداشته باشند و بقیهٔ دانش‌آموزان بتوانند حداکثر به یک نفر رأی دهند، دانش‌آموزان به چند طریق می‌توانند به این دو نامزد نمایندگی رأی دهند؟ (دانش‌آموزان می‌توانند رأی سفید بدهند.)

۱) $۲^{۱۸}$
۲) $۱۸^{۲}$
۳) $۳^{۱۸}$
۴) $۱۸^{۳}$

%۴۸
مرداد ۱۴۰۰

۵۴) ارقام ۹,۶,۵,۲,۲,۲ را روی ۶ کارت نوشته‌ایم. با کنار هم قرار دادن این کارت‌ها چند عدد ۶ رقمی می‌توان نوشت به‌طوری که رقم‌های ۲، یک در میان قرار گرفته باشند؟

۱) ۸
۲) ۱۰
۳) ۱۲
۴) ۱۶

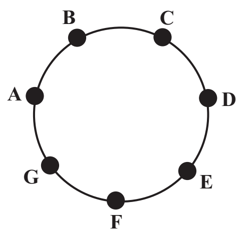
%۴۳
اسفند ۱۳۹۹

۵۵) با جابه‌جایی ارقام ۳۲۴۱۵۶ چند عدد شش رقمی می‌توان تشکیل داد به‌طوری که رقم‌های زوج و فرد، یک در میان قرار گیرند؟

۱) ۳۶
۲) ۷۲
۳) ۱۰۸
۴) ۱۶

%۷۴
دی ۱۳۹۹

۵۶) با نقاط روی محیط دایرهٔ مقابل، چند مثلث می‌توان ساخت به‌طوری که همگی آن‌ها شامل رأس A باشند؟



۱) ۱۲
۲) ۱۳
۳) ۱۴
۴) ۱۵

%۴۹
مرداد ۱۴۰۰

۵۷) در یک مسابقهٔ تنیس، ۵ تنیس باز شرکت کرده‌اند. قرار است هر دو تنیس‌باز یک بار با هم مسابقه بدهند. تعداد کل بازی‌ها چندتاست؟

۱) ۲۵
۲) ۱۰
۳) ۲۰
۴) ۳۲

%۶۴
مرداد ۱۴۰۰

۵۸) بر روی دایره‌ای ۹ نقطهٔ متمایز وجود دارد. چند چهارضلعی می‌توان ساخت که این نقاط رئوس آن‌ها باشند؟

۱) ۱۲۶
۲) ۸۴
۳) ۳۶
۴) ۹۴

%۵۳
دی ۱۳۹۹

۵۹) مجموعهٔ $\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ چند زیرمجموعهٔ سه عضوی یا بیشتر دارد؟

۱) ۳۲
۲) ۱۸
۳) ۳۵
۴) ۴۲

%۲۹
مرداد ۱۳۹۹

۶۰) از بین ۶ مرد و ۳ زن می‌خواهیم یک گروه ۳نفره تشکیل دهیم، به‌طوری که مدیر گروه، زن باشد، این کار به چند حالت امکان‌پذیر است؟

۱) ۷۲   ۲) ۸۴

۳) ۶۴   ۴) ۱۳۶

%۴۲ — مرداد۱۳۹۹

۶۱) تعداد زیر مجموعه‌های سه عضوی مجموعهٔ {۱,۲,۳,۴,۵,۶} که شامل عضو ۳ باشند ولی شامل عضو ۱ نباشند، چند تاست؟

۱) ۲۰   ۲) ۱۰

۳) ۴   ۴) ۶

%۴۱ — فروردین۱۴۰۰

۶۲) می‌خواهیم از میان ۸ نفر داوطلب عضویت در هیأت مدیرهٔ یک شرکت، یک نفر به‌عنوان مدیر، یک نفر به‌عنوان معاون و یک نفر به‌عنوان مسئول مالی انتخاب کنیم. به چند طریق می‌توان این کار را انجام داد؟

۱) ۱۲۰   ۲) ۳۳۶

۳) ۲۱۰   ۴) ۲۵۶

%۲۸ — مهر۱۳۹۹

۶۳) به چند طریق می‌توان از بین ۶ دانش‌آموز سال اولی، ۴ دانش‌آموز سال دومی و ۴ دانش‌آموز سال سومی، سه نفر انتخاب کرد به طوری که دقیقاً دو دانش‌آموز سال اولی باشد؟

۱) ۲۸۰   ۲) ۲۴۰

۳) ۱۲۰   ۴) ۱۴۰

%۵۰ — مرداد۱۳۹۷

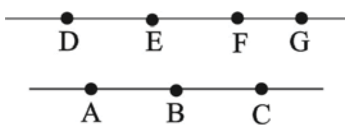
۶۴) مجموعهٔ $A=\{۱,۲,۳,۴,۵\}$ چند زیرمجموعهٔ سه عضوی دارد که فاقد عدد ۳ است؟

۱) ۴   ۲) ۶

۳) ۱۰   ۴) ۱۲

%۲۵ — مرداد۱۳۹۸

۶۵) با نقاط شکل روبه‌رو چند مثلث می‌توان ساخت؟



۱) ۱۸

۲) ۳۰

۳) ۳۲

۴) ۲۴

%۱۳ — خرداد۱۳۹۹

۶۶) مجموعهٔ $A=\{۱,۲,۳,۴,۵\}$ چند زیرمجموعهٔ سه عضوی دارد که قطعاً شامل عدد ۴ باشد؟

۱) ۱۰   ۲) ۲۰

۳) ۶   ۴) ۷

%۴۶ — آبان۱۳۹۷

۶۷) از بین ۵ کتاب ریاضی متفاوت و ۴ کتاب فیزیک متفاوت، می‌خواهیم ۳ کتاب انتخاب کنیم به طوری که حداقل یک کتاب ریاضی انتخاب شود، چند حالت ممکن است؟

۱) ۴۰
۲) ۵۰
۳) ۸۰
۴) ۹۰

٪۵۴
آبان ۱۳۹۷

۶۸) مجموعهٔ $A=\{۱,۲,۳,۴,۵\}$ چند زیرمجموعهٔ ۳ عضوی دارد؟

۱) ۳۰
۲) ۲۰
۳) ۱۰
۴) ۶۰

٪۴۷
آذر ۱۳۹۷

۶۹) می‌خواهیم از بین ۱۰ دانش‌آموز کلاس یک نفر نمایندهٔ آموزشی و یک نفر دیگر نمایندهٔ ورزشی انتخاب کنیم. به چند حالت می‌توان این کار را انجام داد؟

۱) ۱۸۰
۲) ۹۰
۳) ۱۹
۴) ۲۰

٪۳۲
دی ۱۳۹۷

۷۰) به چند طریق می‌توان ۸ سؤال از ۱۰ سؤال یک آزمون تشریحی را انتخاب کرد و پاسخ داد؟

۱) ۴۵
۲) ۹
۳) ۱۲۵
۴) ۱۴۰

٪۵۳
دی ۱۳۹۸

۷۱) حاصل $\dfrac{\binom{۷}{۶}+\binom{۷}{۲}+\binom{۷}{۱}}{\binom{۸}{۲}-\binom{۸}{۳}}$ برابر کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۴}$
۲) $\frac{۶}{۵}$
۳) $\frac{۴}{۷}$
۴) $\frac{۷}{۴}$

٪۵۶
مهر ۱۴۰۱

۷۲) در کیسه‌ای ۴ مهرهٔ آبی و ۳ مهرهٔ قرمز وجود دارد، به چند طریق می‌توان از این کیسه، ۳ مهره انتخاب کرد، به‌طوری‌که لااقل ۲ مهره آبی باشد؟

۱) ۱۰۵
۲) ۲۲
۳) ۳۰
۴) ۴۲

٪۳۰
آبان ۱۴۰۱

۷۳) یک مجموعهٔ ۱۲ عضوی چند زیر مجموعهٔ ۳ عضوی دارد؟

۱) ۱۱۰
۲) ۲۱۰
۳) ۲۲۰
۴) ۴۸۰

٪۴۸
دی ۱۳۹۹

۷۴) مجموعهٔ $\{a,b,c,d,e,f\}$ چند زیرمجموعهٔ چهار عضوی دارد به طوری که a در آن نباشد؟

۱) ۳
۲) ۴
۳) ۵
۴) ۱۵

٪۳۲
خرداد ۹۸

درس دوم: احتمال

۷۵) فضای نمونهٔ پرتاب ۳ سکه و یک تاس سالم چند عضو دارد؟

۱) ۴۸
۲) ۳۶
۳) ۱۲
۴) ۴

٪۴۰
دی۱۳۹۸

۷۶) از بین ۶ دانش‌آموز پایهٔ دهم، ۷ دانش‌آموز پایهٔ یازدهم و ۸ دانش‌آموز پایهٔ دوازدهم، می‌خواهیم ۳ نفر را به تصادف برای انجام یک کار فرهنگی انتخاب کنیم. پیشامد آن‌که سه نفر از سه پایهٔ مختلف باشند، چند عضو دارد؟

۱) ۲۲۴
۲) ۳۳۶
۳) ۵۷
۴) ۱۹

٪۲۱
بهمن۱۳۹۹

۷۷) سه سکه و دو تاس را با هم پرتاب می‌کنیم. تعداد عضوهای فضای نمونهٔ این پدیدهٔ تصادفی کدام است؟

۱) ۱۸
۲) ۴۴
۳) ۲۷۲
۴) ۲۸۸

٪۴۶
آبان۱۴۰۰

۷۸) اختلاف تعداد اعضای فضای نمونهٔ پرتاب دو تاس سالم و تعداد اعضای فضای نمونهٔ پرتاب پنج سکهٔ سالم، چقدر است؟

۱) ۱۱
۲) ۴
۳) ۲۰
۴) ۴

٪۳۶
شهریور۱۳۹۷

۷۹) دو تاس سالم را پرتاب می‌کنیم. پیشامد آن که مجموع دو تاس مضرب ۳ باشد ولی مضرب ۲ نباشد، چند عضو دارد؟

۱) ۶
۲) ۷
۳) ۸
۴) ۹

٪۵۵
شهریور۱۳۹۹

۸۰) در پرتاب یک تاس، اگر A پیشامد زوج آمدن و B پیشامد مضرب ۳ آمدن و C پیشامد اول آمدن باشد، پیشامد آن‌که A یا B رخ دهد ولی C رخ ندهد، چند عضو دارد؟

۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۵

٪۴۴
آبان۱۴۰۱

۸۱) پنج کارت در یک کیف قرار دارد و روی آن‌ها اعداد ۱ تا ۵ نوشته شده است. یکی از کارت‌ها را به تصادف بر می‌داریم و بعد به تعداد عدد نوشته شده روی آن، سکه پرتاب می‌کنیم. فضای نمونه‌ای این آزمایش چند عضو دارد؟

۱) ۴۸
۲) ۳۰
۳) ۶۲
۴) ۱۲۰

٪۵۴
مهر۱۴۰۱

درس ۱: شمارش

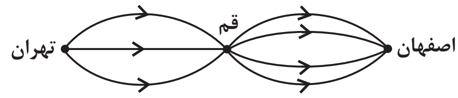
۱ گزینهٔ «۲»

تعداد راه‌های رفتن از تهران به اصفهان در صورت عبور از قم طبق اصل ضرب برابر است با حاصل‌ضرب تعداد راه‌های موجود بین تهران و قم و تعداد راه‌های موجود بین قم و اصفهان.

بنابراین اگر تعداد جاده‌های از قم به اصفهان برابر x باشد، آنگاه داریم:

$۳x = ۱۲ \Rightarrow x = ۴$

طرح کلی این جاده‌ها به صورت زیر خواهد بود:



۳ × ۴ = ۱۲

٪۷۱ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، در تمرینات و کار در کلاس‌های متعددی از کتاب درسی به این موضوع پرداخته شده است.

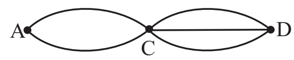
نکته

اگر عملی طی دو مرحله صورت پذیرد به طوری که در مرحلهٔ اول به n طریق و در مرحلهٔ دوم به m طریق قابل انجام باشد، کل کار به $m \times n$ طریق انجام‌پذیر است.

۲ گزینهٔ «۲»

چون می‌خواهیم از شهر B عبور نکنیم، پس جاده‌های متصل به این شهر را از شکل سؤال حذف می‌کنیم. مطابق شکل جدید، ۲ مسیر از A به C و ۳ مسیر از C به D موجود است، بنابراین طبق اصل ضرب تعداد راه‌هایی که می‌توانیم با عبور از شهر A به شهر D برویم، برابر است با:

$۲ \times ۳ = ۶$



٪۲۹ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، در تمرینات و کار در کلاس‌های متعددی از کتاب درسی به این موضوع پرداخته شده است.

۳ گزینهٔ «۱»

چون باید از هر سه رنگ برای رنگ‌آمیزی مربع‌ها استفاده شود، پس کافی است هر مربع با یک رنگ مجزا رنگ‌آمیزی شود و در نتیجه تعداد روش‌های انجام این کار برابر است با:

$۳ \times ۲ \times ۱ = ۶$

٪۴۴ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، مرتبط با پایه‌ای‌ترین مفهوم شمارش یعنی تعداد جایگشت‌ها است و در تمرینات کتاب درسی مورد تأکید زیادی قرار گرفته است.

نکته

تعداد جایگشت‌های n شیء متمایز برابر است با $n!$.

۴ گزینهٔ «۱»

طبق اصل جمع مسیرها به دو دستهٔ کلی با عبور از B یا D تقسیم می‌شود.

دستهٔ اول: عبور از مسیر ABC

در این حالت طبق اصل ضرب به $۹ = ۳ \times ۳$ طریق می‌توان از A به C رفت.

دستهٔ دوم: عبور از مسیر ADC

در این حالت طبق اصل ضرب به $۶ = ۲ \times ۳$ طریق می‌توان از A به C رفت.

بنابراین در مجموع به $۱۵ = ۶ + ۹$ طریق امکان رسیدن از نقطهٔ A به نقطهٔ C وجود دارد.

٪۲۷ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، سؤالاتی مشابه با این سؤال در کار در کلاس‌ها و تمرینات متعددی از کتاب درسی مطرح شده است.

نکته

هر گاه یک کار به دو یا چند دستهٔ کلی تفکیک شود و اعمال مربوط به هر دسته همزمان با دستهٔ دیگر قابل‌انجام نباشد، از اصل جمع استفاده می‌کنیم.

۵ گزینهٔ «۳»

با توجه به اینکه نمی‌توان از جاده‌هایی که در مسیر رفت استفاده شده در مسیر برگشت استفاده نمود، پس در مسیر برگشت بین هر دو شهر، یکی از تعداد جاده‌ها کاسته می‌شود. طبق اصل ضرب داریم:

$A \to B \quad , \quad B \to C \quad , \quad C \to B \quad , \quad B \to A$

$۳ \times ۴ \times ۳ \times ۲ = ۷۲$

٪۱۹ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، مسائل مربوط به مسیرها در کتاب درسی به طور متعدد موجود است.

۶ گزینهٔ «۱»

با توجه به محدودیت عبور از شهر B، مسیرهای موجود به دو دسته تقسیم می‌شوند:

دستهٔ اول: عبور از مسیر ACE که تعداد روش‌های انجام این کار برابر است با:

$۴ \times ۲ = ۸$

دستهٔ دوم: عبور از مسیر ADE که تعداد روش‌های انجام این کار برابر است با:

$۳ \times ۱ = ۳$

بنابراین در مجموع به $۱۱ = ۳ + ۸$ طریق می‌توان از شهر A به شهر E سفر کرد به گونه‌ای که از شهر B عبور نکنیم.

٪۳۲ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، سؤالات متعددی در کتاب درسی مشابه با این سؤال وجود دارد.

۷ گزینهٔ «۳»

فرض کنیم تعداد جاده‌های موجود بین دو شهر D و C، برابر x باشد.

راه‌های سفر از شهر A به D را به دو دستهٔ زیر تقسیم می‌کنیم:

دستهٔ اول: عبور از شهر B

تعداد راه‌های ممکن در این حالت طبق اصل ضرب برابر $۲\times۴=۸$ است.

دستهٔ دوم: عبور از شهر C

تعداد راه‌های ممکن در این حالت طبق اصل ضرب برابر $۳\times x=۳x$ است.

با توجه به اینکه تعداد راه‌های ممکن برای سفر از شهر A به شهر D در مجموع برابر ۱۷ است، پس داریم: $۸+۳x=۱۷\Rightarrow ۳x=۹\Rightarrow x=۳$

٪۲۱ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، سؤالات مشابه به این سؤال در کتاب درسی به طور متعدد وجود دارد.

نکته

چون برای رفتن از شهر A به شهر D، دو مسیر متمایز با عبور از شهر B یا C وجود دارد و نمی‌توان این دو مسیر را همزمان انتخاب کرد، پس مسئله از طریق اصل جمع حل می‌شود.

۸ گزینهٔ «۴»

تنها راه ممکن برای سفر از شهر C به شهر B با توجه به محدودیت موردنظر در صورت سؤال، عبور از شهر A است که تعداد این راه‌ها برابر است با:

$$\underset{۳}{C\to}\ \underset{\times\ ۳}{A\to B}=۹$$

٪۱۴ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، سؤالات متعددی در زمینهٔ پیدا کردن تعداد مسیرهای بین دو شهر با استفاده از اصل ضرب در کتاب درسی وجود دارد.

نکته

اگر کاری در مرحلهٔ اول به m طریق و در مرحلهٔ دوم به n طریق قابل‌انجام باشد، کل کار به $m\times n$ طریق انجام‌پذیر است.

۹ گزینهٔ «۳»

مسیرهای سفر از شهر A به شهر C را به دو دستهٔ زیر تقسیم می‌کنیم.

دستهٔ اول: عبور از شهر B

در این حالت طبق اصل ضرب به $۳\times۳=۹$ طریق می‌توان از A به C رفت.

دستهٔ دوم: عبور از شهر D

در این حالت طبق اصل ضرب به $۴\times۲=۸$ طریق می‌توان از A به C رفت.

بنابراین طبق اصل جمع، در مجموع به $۹+۸=۱۷$ طریق می‌توان از شهر A به شهر C سفر کرد.

٪۱۹ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، سؤالاتی مشابه با این سؤال در کار در کلاس‌ها و تمرینات متعددی از کتاب درسی مطرح شده است.

نکته

چون راه‌های عبور از شهر A به شهر C از دو مسیر مجزا و با عبور از شهرهای B یا D صورت می‌گیرد و این دو عمل با هم قابل‌انجام نیستند، پس باید از اصل جمع استفاده کنیم.

۱۰ گزینهٔ «۳»

تعداد راه‌های رفتن از شهر A به شهر D در صورت عبور از شهر B برابر است با: $۳\times۲=۶$

اگر تعداد راه‌های مستقیم بین دو شهر A و C برابر X باشد، تعداد راه‌های رفتن از شهر A به شهر D و با عبور از شهر C برابر است با:

$$X\times۳=۳X$$

طبق اصل جمع، تعداد کل راه‌هایی که می‌توان از شهر A به شهر B رفت را محاسبه کرده و برابر ۱۸ قرار می‌دهیم:

$$۶+۳X=۱۸\Rightarrow ۳X=۱۲\Rightarrow X=۴$$

٪۲۱ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، دقیقاً سؤالی مشابه با این سؤال در تمرینات کتاب درسی وجود دارد.

نکته

چون رفتن از شهر A به شهر D از دو مسیر و با عبور از شهرهای B یا C صورت می‌گیرد و این دو عمل را نمی‌توان با هم انجام داد، پس باید از اصل جمع استفاده کنیم.

۱۱ گزینهٔ «۲»

طبق اصل ضرب تعداد راه‌هایی که می‌توانیم از شهر A به شهر D و با عبور از شهرهای B و C سفر کنیم، برابر است با:

$$\underset{۲}{A\to}\underset{\times\ ۴}{B\to}\underset{\times\ ۲}{C\to D}=۱۶$$

٪۲۰ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، در مثال‌ها و تمرینات زیادی از کتاب درسی، ایدهٔ این سؤال مورد اشاره قرار گرفته و به نوعی پایهٔ سؤالات مربوط به مبحث شمارش محسوب می‌شود.

۱۲ گزینهٔ «۱»

طبق تعریف فاکتوریل داریم:

$$A=\frac{(n-۱)!(n-۴)!}{(n-۲)!(n-۳)!}=\frac{(n-۱)(n-۲)!(n-۴)!}{(n-۲)!(n-۳)(n-۴)!}=\frac{n-۱}{n-۳}$$

٪۳۹ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، سؤال مرتبط با تعریف فاکتوریل است.

۱۳ گزینهٔ «۲»

طبق تعریف فاکتوریل داریم:

$$\frac{(n-۲)!}{۲}=\frac{(n-۱)!}{۴}\Rightarrow\frac{(n-۲)!}{۲}=\frac{(n-۱)(n-۲)!}{۴}$$

$$\Rightarrow\frac{۱}{۲}=\frac{n-۱}{۴}\Rightarrow ۲(n-۱)=۴\Rightarrow n-۱=۲\Rightarrow n=۳$$

٪۲۲ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، سؤال مرتبط بـا تعریف فاکتوریل است.

نکته

برای عدد طبیعی n داریم: $n!=n(n-۱)!$

۱۴ گزینهٔ «۱»

$$\frac{(k-۱)!(k+۱)!}{k!(k-۲)!}=۳\Rightarrow\frac{(k-۱)\cancel{(k-۲)!}(k+۱)\cancel{k!}}{\cancel{k!}\,\cancel{(k-۲)!}}=۳$$

$$\Rightarrow(k-۱)(k+۱)=۳\Rightarrow k^۲-۱=۳\Rightarrow k^۲=۴\xrightarrow{k>۰}k=۲$$

٪۲۹ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که سؤال با توجه به تعریف فاکتوریل به سادگی قابل حل است.

نکته

برای عدد طبیعی n داریم:

$n!=n(n-۱)!$

۱۵ گزینهٔ «۳»

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ «۱»: طبق تعریف $۰!$ برابر ۱ است.

گزینهٔ «۲»: $\frac{۶!}{۳!}=\frac{۶\times۵\times۴\times۳!}{۳!}=۱۲۰$

گزینهٔ «۳»: $۲\times۳!=۲\times۳\times۲\times۱=۱۲$

دقت کنید که $(۲\times۳)!\neq۲\times۳!$.

گزینهٔ «۴»: $(۲+۳)!=۵!=۱۲۰$

٪۵۹ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، سـؤال بـه تعاریف و ویژگی‌های اولیهٔ فاکتوریل اختصاص دارد.

نکته

در حالت کلی برای دو عدد طبیعی m و n :

$۱)\ m\times n!\neq(m\times n)!$

$۲)\ (m+n)!\neq m!+n!$

۱۶ گزینهٔ «۱»

طبق تعریف فاکتوریل داریم:

$$\frac{(۳!)!}{۲!\times۳!}=\frac{۶!}{۲!\times۳!}=\frac{۶\times۵\times۴\times۳!}{۲\times۱\times۳!}=۶۰$$

٪۵۷ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، سـؤال بـه تعاریف مقدماتی فاکتوریل اختصاص دارد.

نکته

برای هر عدد طبیعی $n\neq۱$ داریم: $(n!)!\neq(n!)^۲$

در واقع برای محاسبهٔ $(n!)!$، ابتدا حاصل $n!$ را به دست آورده و سـپس فاکتوریل این عدد را محاسبه می‌کنیم.

۱۷ گزینهٔ «۲»

می‌دانیم $n!=n\times(n-۱)!$ است، بنابراین داریم:

$$\frac{(x+۲)!}{(x+۱)!}=۴\Rightarrow\frac{(x+۲)(x+۱)!}{(x+۱)!}=۴\Rightarrow x+۲=۴$$

$$\Rightarrow x=۲\Rightarrow ۴x=۸$$

٪۳۰ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌انـد، سؤال مرتبط با تعاریف و ویژگی‌های سادهٔ فاکتوریل است.

۱۸ گزینهٔ «۱»

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ «۱»: $\frac{۶!}{۲!}=\frac{۶\times۵\times۴\times۳\times۲!}{۲!}=۶\times۵\times۴\times۳\neq۳!$

گزینهٔ «۲»: $۳!\times۷!+۳!=۳!(۷+۱)=۸\times۳!=۴\times۳!\times۲=۴!\times۲!$

گزینهٔ «۳»: $۲۰\times۳!+۲=۵\times۴\times۳!+۲\times۱=۵!+۲!$

گزینهٔ «۴»: $۹\times۸\times۷!=۹!$

٪۱۹ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، سؤال به قواعـد ساده و تعریف فاکتوریل اختصاص دارد.

نکته

برای عدد طبیعی n داریم:

$n!=n\times(n-۱)!=n(n-۱)\times(n-۲)!=\dots$

۱۹ گزینهٔ «۲»

روش اول: $\underline{۶}\times\underline{۵}\times\underline{۴}\times\underline{۳}\times\underline{۲}$

مطابق شکل برای اولین رقم از سمت چپ، هر کدام از ۶ رقم را می‌توان به دلخواه انتخاب کرد و چون تکرار ارقام مجاز نیست، برای هر کدام از ارقام بعدی یک انتخاب از انتخاب‌های قبلی کم می‌شود. بنابراین تعداد جواب‌ها برابر است با: $۶! = ۷۲۰$

روش دوم: تعداد جایگشت‌های ۵ رقم از میان ۶ رقم داده شده، از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$P(۶,۵) = \frac{۶!}{(۶-۵)!} = ۶! = ۷۲۰$$

۳۰٪ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، تمرینات و کار در کلاس‌های متعددی مشابه با این سؤال در کتاب درسی موجود است.

نکته

تعداد جایگشت‌های r شیء از n شیء (تبدیل یا انتخاب اشیا در صورتی که ترتیب مهم باشد) از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

۲۰ گزینهٔ «۱»

با توجه به اینکه تکرار ارقام مجاز است، تعداد انتخاب‌ها برای هر یک از ارقام مستقل از رقم‌های دیگر صورت می‌گیرد.

برای رقم یکان ۲ انتخاب (صفر یا ۵) وجود دارد و برای رقم هزارگان نمی‌توان از صفر استفاده کرد، بنابراین تعداد جواب‌ها برابر است با:

$۵\times۶\times۶\times۲ = ۳۶۰$

۱۷٪ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، در تمرینات و کار در کلاس‌های کتاب درسی به این موضوع بسیار زیاد پرداخته شده است.

نکته

اگر عملی در مرحلهٔ اول به n_1 طریق، و در مرحلهٔ دوم به n_2 طریق، ... و در مرحلهٔ kام به n_k طریق قابل‌انجام باشد، در کل آن عمل به $n_1\times n_2\times ...\times n_k$ طریق قابل انجام است.

۲۱ گزینهٔ «۴»

چون صرفاً به عد سه‌رقمی اشاره شده است، پس فرض را بر مجازبودن تکرار ارقام می‌گذاریم.

تنها محدودیت مربوط به رقم یکان است که به دلیل بخش‌پذیربودن عدد به ۵، صرفاً باید رقم ۵ باشد. تعداد جواب‌ها برابر است با: $۵\times۵\times۱ = ۲۵$

۳۱٪ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، سؤالات مشابه با این سؤال در کار در کلاس‌ها و تمرینات کتاب درسی موجود است.

نکته

در محاسبهٔ تعداد جایگشت‌ها وقتی تکرار مجاز باشد، تعداد انتخاب‌ها برای هر مرحله مستقل از سایر مراحل و صرفاً بر اساس محدودیت‌های مسئله صورت می‌گیرد.

۲۲ گزینهٔ «۲»

چون برای هر کدام از موارد سوپ، پلو و خورشت، دقیقاً یک انتخاب داریم، پس تعداد حالت‌های انتخاب یک وعدهٔ غذایی طبق اصل ضرب برابر است با:

$۴\times۳\times۵ = ۶۰$

۲۳٪دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چندین سؤال در فعالیت‌ها و کار در کلاس‌های کتاب درسی مشابه با این سؤال وجود دارد.

۲۳ گزینهٔ «۲»

جواب‌های مسئله را به دو دستهٔ کلی تقسیم می‌کنیم:

دستهٔ اول : رقم هزارگان کمتر از ۵ باشد. در این حالت ارقام ۵ و ۶ را نمی‌توان در رقم هزارگان قرار داد و برای رقم یکان یکی از ارقام ۴،۲،۰ و ۶ قرار داده می‌شود و ارقام دهگان و صدگان محدودیتی ندارند.

همچنین صفر نمی‌تواند در رقم هزارگان قرار گیرد.

تعداد جواب‌ها در این حالت برابر است با: $۴\times۷\times۷\times۴ = ۷۸۴$

دستهٔ دوم: رقم هزارگان ۵ باشد. در این صورت برای اینکه عدد موردنظر کوچک‌تر از ۵۱۰۰ شود، لزوماً در رقم صدگان باید از صفر استفاده کرد. رقم دهگان محدودیتی ندارد ولی رقم یکان تنها می‌تواند شامل ۴،۲،۰ و ۶ باشد. تعداد جواب‌ها در این حالت برابر است با: $۱\times۱\times۷\times۴ = ۲۸$

بنابراین تعداد کل جواب‌ها برابر است با: $۷۸۴ + ۲۸ = ۸۱۲$

۲۴٪ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، تعداد زیاد مسائل مربوط به محاسبهٔ تعداد اعداد زوج یا فرد در کتاب درسی، زمینه را برای بررسی و حل این سؤال فراهم کرده است.

نکته

هر گاه مجبور شویم جواب‌های مسئله را به دو یا چند دسته تفکیک کنیم، تعداد جواب‌ها از طریق اصل جمع به دست می‌آید.

۲۴ گزینهٔ «۲»

برای رقم صدگان نمی‌توان از ارقام ۱، ۰ و ۲ استفاده کرد، ولی برای سایر ارقام استفاده از این سه رقم مجاز است. چون تکرار ارقام مجاز نیست، پس در هر مرحله یکی از انتخاب‌ها کاسته می‌شود. طبق اصل ضرب تعداد اعداد موردنظر برابر است با:

$$\underset{\substack{\downarrow\\ ۵،۴،۳}}{\underline{۳}} \times \underline{۵} \times \underline{۴} = ۶۰$$

۱۱٪ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، تمرینات و کار در کلاس‌های متعددی مشابه با این سؤال در کتاب درسی وجود دارد.

نکته

در سؤالات مربوط به جایگشت، ابتدا از خانه‌ای شروع می‌کنیم که طبق فرض مسئله دارای محدودیتی در قرار دادن اشیاء است.

۲۵ گزینهٔ «۴»

تعداد جواب‌های مسئله برابر تعداد جایگشت‌های ۶ شیء متمایز یعنی $۶! = ۷۲۰$ است.

۹٪ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، سؤال دقیقاً به تعریف مفهوم جایگشت اشاره دارد.

نکته

تعداد جایگشت‌های n شیء متمایز برابر $n!$ است.

۲۶ گزینهٔ «۲»

رمز عبور چهاررقمی برخلاف یک عدد چهاررقمی می‌تواند با رقم صفر نیز آغاز شود، پس برای هر یک از ارقام ۵ انتخاب (۰، ۲، ۴، ۶ و ۸) در اختیار داریم. طبق اصل ضرب تعداد جواب‌ها برابر است با:

$$\underline{۵} \times \underline{۵} \times \underline{۵} \times \underline{۵} = ۵^۴$$

بررسی گزینهٔ دام‌دار:

گزینهٔ «۱»: اگر به اشتباه برای رقم سمت چپ محدودیت قرار گرفتن رقم صفر را در نظر بگیریم، طبق اصل ضرب خواهیم داشت:

$$\underset{\substack{\downarrow\\ \text{فاقد صفر}}}{\underline{۴}} \times \underline{۵} \times \underline{۵} \times \underline{۵} = ۴ \times ۵^۳$$

۳۹٪ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، این سؤال مشابه سؤالات متعددی در کتاب درسی است.

نکته

رقم سمت چپ یک عدد نمی‌تواند رقم صفر باشد ولی برای ساختن رمز یا کد، چنین محدودیتی وجود ندارد.

۲۷ گزینهٔ «۱»

با توجه به اینکه عدد موردنظر باید بزرگتر از ۲۰۰۰۰ باشد، پس رقم ۱ را نمی‌توان به عنوان رقم سمت چپ عدد قرار داد، ولی این رقم می‌تواند در سایر ارقام عدد مورد استفاده قرار گیرد. چون عدد باید فاقد ارقام تکراری باشد، پس طبق اصل ضرب داریم:

$$\underset{\substack{\downarrow\\ \text{فاقد ۱}}}{\underline{۴}} \times \underline{۴} \times \underline{۳} \times \underline{۲} = ۹۶$$

بررسی سایر گزینه‌ها: (در صورت امکان):

گزینه «۲»: اگر به محدودیت قرار گرفتن رقم ۱ در رقم سمت چپ عدد توجه نشود، حاصل برابر $۵! = ۱۲۰$ به دست می‌آید.

۲۷٪ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، این سؤال مشابه تمرینات متعددی از کتاب درسی است.

۲۸ گزینهٔ «۲»

با توجه به اینکه رقم صفر در میان ارقام داده‌شده وجود ندارد، پاسخ سؤال برابر تبدیل (جایگشت) ۵ شیء از میان ۹ شیء است. این مقدار برابر است با:

$$P(۹،۵) = \frac{۹!}{(۹-۵)!} = \frac{۹\times۸\times۷\times۶\times۵\times۴!}{۴!} = ۱۵۱۲۰$$

۱۷٪ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، سؤال به مفهوم تبدیل (جایگشت) اشاره می‌کند که از مفاهیم مقدماتی موضوع شمارش است.

نکته

تبدیل (جایگشت) r شیء از میان n شیء (تعداد انتخاب‌ها در صورت مهم‌بودن ترتیب اشیاء) از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

۲۹ گزینهٔ «۲»

با توجه به اینکه صفر نمی‌تواند در رقم سمت چپ قرار گیرد، جواب‌ها را به دو دستهٔ زیر تقسیم می‌کنیم:

دستهٔ اول: رقم یکان صفر باشد:

$$\underline{۵} \times \underline{۴} \times \underline{۳} \times \underline{۲} \times \underset{\text{صفر}}{\underline{۱}} = ۱۲۰$$

پس تعداد اعداد پنج‌رقمی در این دسته برابر ۱۲۰ است.

دستهٔ دوم: رقم یکان ۲ یا ۴ باشد.

$$\underline{۴} \times \underline{۴} \times \underline{۳} \times \underline{۲} \times \underset{\substack{\downarrow\\ \text{۲ یا ۴}}}{\underline{۲}} = ۱۹۲$$

با در نظر گرفتن محدودیت مربوط به رقم سمت چپ، تعداد اعداد پنج‌رقمی در این دسته برابر ۱۹۲ است.

بنابراین در مجموع $۳۱۲ = ۱۹۲ + ۱۲۰$ عدد با مشخصات موردنظر می‌توان نوشت.

۲۷٪ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، در تمرینات، فعالیت‌ها و کار در کلاس‌های کتاب درسی، سؤالات زیادی به این موضوع اختصاص داده شده است.

نکته

در سؤالاتی که تکرار ارقام مجاز نیست، هر گاه تعداد اعداد زوج یا مضرب ۵ خواسته شود و صفر در بین ارقام موجود باشد، لزوماً اعداد را به دو دسته تفکیک می‌کنیم.

۳۰ گزینهٔ «۱»

برای حرف اول تنها یک انتخاب وجود دارد، پس کافی است تعداد جایگشت‌های ۵ حرف باقی‌مانده را محاسبه کنیم که تعداد آن‌ها برابر است با:

$$\underset{r}{\underline{۱}}\times\underline{۵}\times\underline{۴}\times\underline{۳}\times\underline{۲}\times\underline{۱}=۵!=۱۲۰$$

۱۲٪ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، سؤالات متعددی در کتاب درسی مشابه با این سؤال وجود دارد.

نکته

تعداد جایگشت‌های n شیء متمایز برابر $n!$ است.

۳۱ گزینهٔ «۱»

برای حرف‌های اول و آخر کلمه صرفاً یک انتخاب وجود دارد، پس برای محاسبهٔ تعداد کلمات موردنظر، کافی است تعداد جایگشت‌های ۴ حرف باقی‌مانده را محاسبه کنیم:

$$\underset{a}{\underline{۱}}\times\underline{۴}\times\underline{۳}\times\underline{۲}\times\underset{f}{\underline{۱}}=۲۴$$

۴۳٪ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، سؤالات متعددی در کتاب درسی مرتبط با موضوع این سؤال وجود دارد.

۳۲ گزینهٔ «۲»

ابتدا تعداد تمام رمزهای عبور چهار حرفی که با حروف این کلمه ساخته می‌شود را پیدا کرده و سپس تعداد آن دسته از رمزهای عبور چهارحرفی که فاقد حرف N باشند را از کل جواب‌ها کم می‌کنیم.

تعداد کل رمزهای عبور با توجه به مهم‌بودن ترتیب حروف برابر است با:

$$P(۶,۴)=\frac{۶!}{(۶-۴)!}=\frac{۶!}{۲!}=\frac{۶\times۵\times۴\times۳\times۲!}{۲!}=۳۶۰$$

تعداد رمزهای عبور فاقد حرف N برابر است با:

$$P(۵,۴)=\frac{۵!}{(۵-۴)!}=\frac{۵!}{۱!}=۱۲۰$$

بنابراین تعداد رمزهای عبوری که حتماً شامل حرف N باشند، برابر است با:

$$۳۶۰-۱۲۰=۲۴۰$$

۴۳٪ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، با دقت در مثال‌ها و تمرینات کتاب درسی، امکان مشابهت‌سازی برای حل این سؤال به سادگی میسر می‌شود.

نکته

اگر محاسبهٔ مستقیم تعداد حالت‌های موردنظر دشوار باشد، می‌توانیم تعداد متمم حالت‌ها را پیدا کرده و از تعداد کل حالت‌ها کم کنیم.

۳۳ گزینهٔ «۴»

چون دو حرف «س» و «ا» لزوماً در کلمهٔ موردنظر وجود دارد، پس کافی است از میان ۵ حرف باقی‌ماندهٔ کلمهٔ «سازندگی»، ۲ حرف دیگر را برای کامل کردن کلمهٔ ۴ حرفی انتخاب کنیم که تعداد حالت‌ها برابر است با:

$$\binom{۵}{۲}=\frac{۵!}{۲!۳!}=\frac{۵\times۴\times۳!}{۲\times۱\times۳!}=۱۰$$

حال دو حرف انتخاب شدهٔ اخیر به همراه دو حرف «س» و «ا» به $۴!$ طریق می‌توانند یک کلمهٔ ۴ حرفی ایجاد کنند، پس با در نظر گرفتن تعداد جایگشت‌های این حروف، جواب مسئله برابر است با:

$$۱۰\times۴!=۱۰\times۲۴=۲۴۰$$

۲۷٪ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، سؤال شامل ترکیبی از دو مفهوم ترکیب و جایگشت است که هرکدام به‌طور جداگانه در کتاب بارها و بارها مورد اشاره قرار گرفته‌اند.

نکته

تعداد انتخاب‌های r شیء از میان n شیء در صورتی که ترتیب انتخاب مهم نباشد و بخواهیم k شیء مشخص حتماً انتخاب شوند، برابر است با:

$$\binom{n-k}{r-k}$$

۳۴ گزینهٔ «۱»

برای حرف آخر تنها یک انتخاب وجود دارد، پس کافی است تعداد جایگشت‌های ۳ حرف دیگر که از میان ۵ حرف باقی‌مانده انتخاب می‌شوند را به دست آوریم که این تعداد برابر است با:

$$P(۵,۳)=\frac{۵!}{(۵-۳)!}=\frac{۵!}{۲!}=\frac{۵\times۴\times۳\times۲!}{۲!}=۶۰$$

۱۳٪ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، سؤالات متعددی در این زمینه در کتاب درسی وجود دارد.

۳۵ گزینهٔ «۱»

با توجه به وجود رقم صفر در میان ارقام داده‌شده و چون تکرار ارقام مجاز نیست، پس اعداد را به دو دستهٔ زیر تقسیم می‌کنیم:

درستهٔ اول: رقم یکان صفر باشد.

تعداد اعداد این دسته طبق اصل ضرب برابر است با:

$$\underline{۵}\times\underline{۴}\times\underline{۳}\times\underline{۲}\times\underset{\text{صفر}}{\underline{۱}}=۱۲۰$$

دستهٔ دوم: رقم یکان ۴،۲ یا ۶ باشد.

چون صفر نمی‌تواند به عنوان رقم سمت چپ قرار گیرد، تعداد اعداد این دسته به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\underline{۴}\times\underline{۴}\times\underline{۳}\times\underline{۲}\times\underset{\substack{\downarrow\\ ۶,۴,۲}}{\underline{۳}}=۲۸۸$$

بنابراین تعداد کل اعدادی که با مشخصات موردنظر قابل‌نوشتن هستند، برابر است با: $۱۲۰+۲۸۸=۴۰۸$

٪۱۴ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، در تمرینات، فعالیت‌ها و کار در کلاس‌های کتاب درسی سؤالات مشابهی وجود دارد.

۳۶ گزینهٔ «۱»

طبق اصل ضرب و با توجه به اینکه صفر نمی‌تواند رقم سمت چپ عدد باشد، داریم:

$$\underset{\substack{\downarrow\\ \text{فاقد صفر}}}{\underline{۳}}\times\underline{۳}\times\underset{\substack{\downarrow\\ ۹,۵,۱}}{\underline{۳}}=۲۷$$

٪۲۳ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، سؤالات متعددی در کتاب درسی مشابه به این سؤال وجود دارد.

نکته

در محاسبهٔ تعداد جایگشت‌ها، ابتدا از خانه‌ای شروع می‌کنیم که شامل محدودیتی با توجه به صورت سؤال است.

۳۷ گزینهٔ «۳»

تنها عدد مربع کامل در میان ارقام موجود، عدد ۴ است. بنابراین رقم یکان باید برابر ۶ و رقم صدگان برابر ۴ باشد و در نتیجه کافی است جایگشت‌های ۳ رقم دیگر را از میان ۴ رقم باقی‌مانده محاسبه کنیم که این تعداد برابر است با:

$$P(۴,۳)=\frac{۴!}{(۴-۳)!}=\frac{۴!}{۱!}=۲۴$$

٪۴۶ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، سؤالات مشابهی با این سؤال در کتاب درسی موجود است.

۳۸ گزینهٔ «۱»

اعداد موردنظر را به ۳ دسته تقسیم می‌کنیم:

دستهٔ اول: رقم هزارگان ۳ یا ۵ باشد (۲ انتخاب). در این صورت برای رقم یکان می‌توان هریک از ارقام ۰ ، ۲ ، ۴ ، ۶ را قرار داد (۴ انتخاب) و سپس ارقام صدگان و دهگان را انتخاب نمود.

$$\underset{\substack{\downarrow\\ ۳,۵}}{\underline{۲}}\times\underline{۵}\times\underline{۴}\times\underset{\substack{\downarrow\\ ۰,۲,۴,۶}}{\underline{۴}}=۱۶۰$$

دستهٔ دوم: رقم هزارگان ۴ باشد. در این صورت انتخاب‌ها برای رقم یکان شامل ۰ ، ۲ و ۴ است.

$$\underset{\substack{\downarrow\\ ۴}}{\underline{۱}}\times\underline{۵}\times\underline{۴}\times\underset{\substack{\downarrow\\ ۰,۲,۶}}{\underline{۳}}=۶۰$$

دستهٔ سوم: رقم هزارگان ۶ باشد. در این صورت انتخاب‌ها برای رقم یکان شامل ۰، ۲ و ۴ است.

$$\underline{۱}\times\underline{۵}\times\underline{۴}\times\underset{\substack{\downarrow\\ ۰,۲,۴}}{\underline{۳}}=۶۰$$

بنابراین تعداد کل این اعداد برابر است با:

$$۱۶۰+۶۰+۶۰=۲۸۰$$

٪۲۹ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که سؤالات مرتبط با اصل جمع در تمرینات و مثال‌های کتاب درسی مورد تأکید زیادی قرار گرفته است.

۳۹ گزینهٔ «۲»

تعداد راه‌های انجام این کار برابر تعداد جایگشت‌های حروف کلمهٔ «ولایت» است، بنابراین داریم:

$$\underline{۵}\times\underline{۴}\times\underline{۳}\times\underline{۲}\times\underline{۱}=۵!=۱۲۰$$

٪۳۲ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که مشابه تمرین کتاب درسی و مرتبط با تعریف جایگشت است.

۴۰ گزینهٔ «۱»

دو حرف i و b را به صورت یک بسته در نظر می‌گیریم که درون این بسته جایگشت وجود ندارد (چون ترتیب حروف b و i مشخص است)، بنابراین داریم:

$$\underset{۴}{\underline{b\quad i}}\times\underline{۳}\times\underline{۲}\times\underline{۱}=۲۴$$

بررسی گزینهٔ دام‌دار:

گزینهٔ «۲» اگر به مشخص بودن ترتیب قرار گرفتن b و i در کلمه دقت نشود، برای داخل بسته !۲ جایگشت در نظر گرفته می‌شود و در نتیجه جواب برابر است با: $۴!\times۲!=۲۴\times۲=۴۸$

۲۲٪ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که این دسته از مسائل که مربوط به کنار هم قرار گرفتن اشیاء است، در مسائل کتاب درسی مورد بررسی قرار گرفته است.

۴۱ گزینهٔ «۲»

برای حرف اول کلمه می‌توان یکی از حروف «یـ» یا «ت» را انتخاب نمود و سپس جایگشت‌های ۳ حرف از ۴ حرف باقی‌مانده را در نظر گرفت. تعداد کلمات موردنظر برابر است با:

$$\underline{۲}\times\underline{۳}\times\underline{۴}\times\underset{\text{یـ / ت}}{\underset{\downarrow}{\underline{۲}}}=۴۸$$

۲۷٪ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، مسائل مرتبط با جایگشت حروف یا ارقام در تمرینات و مثال‌های کتاب درسی به طور متعددی طرح گردیده است.

نکته

در حل این‌گونه مسائل ابتدا محدودیت‌های سؤال را اعمال می‌کنیم و سپس مابقی فرضیات مسأله را در نظر می‌گیریم.

۴۲ گزینهٔ «۳»

ابتدا تعداد تمام جایگشت‌های حروف کلمهٔ **mother** را به دست می‌آوریم که برابر !۶ است. سپس تعداد جایگشت‌هایی از حروف این کلمه را محاسبه می‌کنیم که دو حرف t و h کنار هم باشند. حال کافی است این دو حرف را به صورت یک بسته در نظر بگیریم که این دو حرف درون بسته دارای جایگشت هستند. همچنین این بسته به همراه ۴ حرف باقی‌مانده دارای !۵ جایگشت است.

$$\underline{۲}\times\underline{۱}\quad \_\ \_\ \_\ \_$$

$$۵\times۴\times۳\times۲\times۱$$

بنابراین تعداد جایگشت‌هایی که حروف t و h کنار هم قرار ندارند، برابر است با:

$$۶!-۵!\times۲!=۷۲۰-۱۲۰\times۲=۴۸۰$$

بررسی گزینهٔ دام‌دار:

گزینهٔ «۱»: اگر به اشتباه تعداد حالت‌های کنار هم قرار گرفتن دو حرف t و h محاسبه شود، جواب برابر ۲۴۰ خواهد بود.

۴۱٪ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، با توجه به مثال‌ها و تمرینات کتاب درسی، به راحتی می‌توان به راه‌حل این سؤال دست یافت.

نکته

هر گاه بخواهیم تعداد جایگشت‌های تعدادی شیء را حساب کنیم که در آن‌ها دو شیء خاص کنار هم نباشند، کافی است تعداد حالت‌هایی که این دو شیء در کنار هم قرار می‌گیرند را از کل حالت‌ها کم کنیم.

۴۳ گزینهٔ «۱»

طبق اصل ضرب برای جایزهٔ A (نفر اول) ۱۵ انتخاب وجود دارد (هر کدام از ۱۵ دونده) و برای جایزهٔ B (نفر دوم)، تنها نفر اول کنار رفته و ۱۴ انتخاب امکان‌پذیر است، پس تعداد کل حالت‌های توزیع این جایزه برابر است با: $۱۵\times۱۴=۲۱۰$

۳۸٪ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، سؤال با توجه به مفهوم اصل ضرب به سادگی قابل‌حل است.

۴۴ گزینهٔ «۱»

حروف یکسان کلمهٔ **SALAMAT** شامل ۳ حرف A است. این ۳ حرف را به صورت یک بسته در نظر می‌گیریم که با توجه به یکسان‌بودن حروف A، درون بسته جایگشتی وجود ندارد و تنها باید جایگشت این بسته به همراه ۴ حرف باقی‌ماندهٔ کلمه را در نظر بگیریم:

$$(\underline{A}\ \underline{A}\ \underline{A})\ \_\ \_\ \_\ \_$$

مطابق شکل تعداد این جایگشت‌ها برابر $۵!=۱۲۰$ است.

۲۹٪ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، مسائل مربوط به تعداد جایگشت‌هایی که دو یا چند شیء خاص همواره در کنار هم هستند در تمرینات و مثال‌های کتاب درسی مورد تأکید ویژه بوده است.

نکته

هر گاه بخواهیم چند شیء خاص در کنار یکدیگر قرار گیرند، آن‌ها را به هم بسته و یک شیء واحد در نظر می‌گیریم و سپس تعداد جایگشت‌های آن بسته را به همراه سایر اشیاء محاسبه می‌کنیم.

۴۵ گزینهٔ «۳»

رقم یکان این عدد لزوماً ۵ است و با توجه به متمایزبودن ارقام و بزرگ‌تر از ۳۰۰ بودن اعداد موردنظر، رقم صدگان نیز باید از میان ارقام ۳،۷ و ۹ انتخاب شود، پس تعداد اعداد سه‌رقمی موردنظر طبق اصل ضرب برابر است با:

$$\underset{۳,۷,۹}{\underset{\uparrow}{\underline{۳}}}\times\underline{۳}\times\underset{۵}{\underset{\uparrow}{\underline{۱}}}=۹$$

۴۳٪ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، سؤالات مربوط به جایگشت‌های ارقام در تمرینات و مثال‌های کتاب درسی به‌طور متعدد مورد بررسی قرار گرفته است.

۴۶ گزینهٔ «۲»

اعداد موردنظر را به دو دسته تقسیم می‌کنیم:

دستهٔ اول: رقم یکان صفر باشد.

$$\underset{\uparrow \atop ۱,۲,۷,۸}{\underline{۴}}\times\underline{۳}\times\underline{۲}\times\overset{\text{صفر}}{\underline{۱}}$$

در این صورت برای رقم یکان فقط یک انتخاب وجود دارد و تعداد حالت‌ها برابر است با: $۴\times۳\times۲\times۱=۲۴$

دستهٔ دوم: رقم یکان ۲ یا ۸ باشد.

$$\underline{۳}\times\underline{۳}\times\underline{۲}\times\underset{\uparrow \atop ۲,۸}{\underline{۲}}$$

در این صورت برای رقم یکان دو انتخاب وجود دارد و باید دقت کرد که رقم صفر نمی‌تواند به عنوان اولین رقم سمت چپ قرار گیرد. تعداد حالت‌ها برابر است با:

$$۳\times۳\times۲\times۲=۳۶$$

طبق اصل جمع تعداد اعداد چهار رقمی زوج با ارقام داده‌شده برابر است با:

$$۲۴+۳۶=۶۰$$

۹٪ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، سؤالات متعددی مشابه این سؤال در کار در کلاس‌ها و تمرین‌های کتاب درسی وجود دارد.

نکته

در محاسبهٔ تعداد جایگشت‌های چند شیء، ابتدا از جایی شروع می‌کنیم که طبق فرض مسئله دارای محدودیت است. مثلاً برای محاسبهٔ تعداد اعداد زوج یا فرد، ابتدا به سراغ رقم یکان می‌رویم.

۴۷ گزینهٔ «۳»

$$\underset{\text{س}}{\underline{۱}}\times\underline{۳}\times\underline{۴}\times\underset{\text{ن}}{\underline{۱}}$$

مطابق طرح فوق، برای حرف‌های اول و آخر این کلمه تنها یک انتخاب وجود دارد. چون تکرار حروف مجاز نیست، برای حرف دوم باید یکی از حروف باقی‌مانده یعنی «د»، «ب»، «ت» یا «الف» را انتخاب کرد و برای حرف سوم یکی دیگر از انتخاب‌ها کاسته می‌شود، پس تعداد کلمات موردنظر برابر است با: $۴\times۳=۱۲$

۲۸٪ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، کار در کلاس‌ها و تمرینات متعددی در کتاب درسی مشابه با این سؤال وجود دارد.

۴۸ گزینهٔ «۴»

طبق اصل ضرب تعداد این دسته از کلمات برابر است با:

$$\underline{۳}\times\underline{۴}\times\underline{۵}\times\underset{\text{م}}{\underline{۱}}=۶۰$$

دقت کنید که برای اولین حرف (از سمت راست) تنها یک انتخاب (حرف «م») وجود دارد و با توجه به تکراری‌نبودن حروف استفاده شده، هر بار یکی از انتخاب‌ها کم می‌شود.

بررسی گزینهٔ دام‌دار:

گزینهٔ «۱»: اگر بعد از قرار دادن حرف «م» در حرف اول کلمه، به تکراری‌نبودن حروف بعدی دقت نشود، تعداد کلمات ساخته‌شده به شکل مقابل به دست می‌آید: $\underline{۵}\times\underline{۵}\times\underline{۵}\times\underset{\text{م}}{\underline{۱}}=۱۲۵$

۱۴٪ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، سؤالات مشابه با این سؤال در تمرینات و کار در کلاس‌های کتاب درسی وجود دارد.

۴۹ گزینهٔ «۲»

عددی بر ۵ بخش‌پذیر است که رقم یکان آن صفر یا ۵ باشد. چون صفر نمی‌تواند رقم سمت چپ عدد باشد، پس اعداد موردنظر را به دو دستهٔ زیر تقسیم می‌کنیم:

دستهٔ اول: رقم یکان صفر باشد.

$$\underline{۶}\times\underline{۵}\times\underline{۴}\times\underset{\text{صفر}}{\underline{۱}}=۱۲۰$$

در این صورت مطابق شکل، ۱۲۰ عدد چهار رقمی می‌توان نوشت.

دستهٔ دوم: رقم یکان ۵ باشد.

$$\underline{۵}\times\underline{۵}\times\underline{۴}\times\underset{۵}{\underline{۱}}=۱۰۰$$

در این حالت چون صفر نمی‌تواند به عنوان رقم سمت چپ (هزارگان) قرار داده شود، مطابق شکل یکی از انتخاب‌ها برای اولین رقم از سمت چپ کم می‌شود و می‌توان ۱۰۰ عدد چهاررقمی نوشت.

بنابراین طبق اصل جمع، در مجموع $۲۲۰=۱۰۰+۱۲۰$ عدد چهاررقمی با توجه به فرض سؤال قابل‌نوشتن است.

بررسی گزینهٔ دام‌دار:

گزینهٔ «۱»: اگر به محدودیتی که با توجه به امکان‌پذیر نبودن حضور رقم صفر در اولین رقم از سمت چپ پیش آمده است دقت نشود، آنگاه تعداد جواب‌ها طبق اصل ضرب به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\underline{۶}\times\underline{۵}\times\underline{۴}\times\underset{\downarrow \atop \text{صفر یا ۵}}{\underline{۲}}=۲۴۰$$

۲۴٪ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، سؤالی مشابه با این سؤال در یکی از کار در کلاس‌های کتاب درسی وجود دارد.

۵۰ گزینهٔ «۱»

روش اول: طبق اصل ضرب برای انتخاب نفرات اول، دوم و سوم به ترتیب ۹،۱۰ و ۸ انتخاب وجود دارد.

نفر سوم   نفر دوم   نفر اول

$$\overline{۱۰} \times \overline{۹} \times \overline{۸} = ۷۲۰$$

روش دوم: چون ترتیب نفرات مهم است، پس تعداد راه‌های اهدای جوایز از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$P(۱۰,۳)=\frac{۱۰!}{(۱۰-۳)!}=\frac{۱۰\times۹\times۸\times۷!}{۷!}=۷۲۰$$

بررسی گزینهٔ دام‌دار:

گزینهٔ «۳»: در صورتی که به اشتباه ترتیب قرار گرفتن افراد در نظر گرفته نشود، آنگاه جواب این سؤال از راه ترکیب و به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\binom{۱۰}{۳}=\frac{۱۰!}{۷!\,۳!}=\frac{۱۰\times۹\times۸\times۷!}{۷!\times۳\times۲\times۱}=۱۲۰$$

۲۲٪ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، مشابه این سؤال در تمرینات کتاب درسی وجود دارد.

۵۱ گزینهٔ «۱»

عددی مضرب ۵ است که رقم یکان آن صفر یا ۵ باشد. با توجه به وجود رقم صفر در میان ارقام داده‌شده و چون رقم صفر نمی‌تواند به عنوان رقم سمت چپ عدد قرار داده شود، اعداد موردنظر به دو دستهٔ زیر تقسیم می‌کنیم:

دستهٔ اول: رقم یکان صفر باشد.

$$\underline{۴}\times\underline{۳}\times\underset{\text{صفر}}{\underline{۱}}=۱۲$$

در این حالت مطابق شکل، ۱۲ عدد سه‌رقمی ساخته می‌شود.

دستهٔ دوم: رقم یکان ۵ باشد.

$$\underline{۳}\times\underline{۳}\times\underset{۵}{\underline{۱}}=۹$$

در این حالت با توجه به اینکه رقم صفر نمی‌تواند به عنوان رقم سمت چپ (صدگان) قرار داده شود، ۹ عدد سه‌رقمی ساخته می‌شود.

بنابراین طبق اصل جمع، در مجموع $۲۱=۹+۱۲$ عدد سه‌رقمی با توجه به فرض سؤال ساخته می‌شود.

۱۷٪ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، سؤالی مشابه با این سؤال در یکی از کار در کلاس‌های کتاب درسی موجود است.

۵۲ گزینهٔ «۲»

هر مسافر (بدون در نظر گرفتن جنسیت) می‌تواند در هر یک از ۵ ایستگاه موجود در مسیر پیاده شود، یعنی ۵ انتخاب دارد، پس طبق اصل ضرب، تعداد راه‌های پیاده‌شدن مسافرین این قطار برابر است با:

$$\underset{\text{مسافر اول}}{\underset{\downarrow}{۵}}\times\underset{\text{مسافر دوم}}{\underset{\downarrow}{۵}}\times\ldots\times\underset{\text{مسافر پنجاهم}}{\underset{\downarrow}{۵}}=۵^{۵۰}$$

۳۵٪ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، سؤال مربوط به مفهوم اولیهٔ اصل ضرب است

۵۳ گزینهٔ «۳»

هر یک از ۱۸ دانش‌آموز دیگر کلاس ۳ انتخاب دارند که می‌توانند به یکی از دو نفری که برای نمایندگی کلاس نامزد شده‌اند رأی داده و یا رأی سفید بدهند، پس تعداد روش‌های رأی‌دادن این دانش‌آموزان برابر است با:

$$\underset{\text{نفر اول}}{\underset{\downarrow}{۳}}\times\underset{\text{نفر دوم}}{\underset{\downarrow}{۳}}\times\ldots\times\underset{\text{نفر هجدهم}}{\underset{\downarrow}{۳}}=۳^{۱۸}$$

بررسی گزینهٔ دام‌دار:

گزینهٔ «۱»: اگر به حالتی که هر فرد می‌تواند رأی سفید دهد و هیچ کدام از دو نامزد را انتخاب نکند، توجه صورت نگیرد، آنگاه طبق اصل ضرب جواب برابر $۲^{۱۸}$ خواهد بود.

۳۵٪ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، سؤال به مفهوم اولیهٔ اصل ضرب اشاره دارد.

۵۴ گزینهٔ «۳»

رقم‌های ۲ به دو طریق می‌توانند به صورت یک در میان قرار گیرند.

حالت اول: اولین رقم از سمت چپ، رقم ۲ باشد. در نتیجه ارقام سوم و پنجم نیز برابر ۲ هستند. در این صورت مطابق شکل برای ۳ رقم دیگر $۶=۳!$ حالت امکان‌پذیر است.

$$\underset{۲}{\underset{\downarrow}{\underline{۱}}}\times\underline{۳}\times\underset{۲}{\underset{\downarrow}{\underline{۱}}}\times\underline{۲}\times\underset{۲}{\underset{\downarrow}{\underline{۱}}}\times\underline{۱}$$

حالت دوم: دومین رقم از سمت چپ، رقم ۲ باشد. در نتیجه ارقام چهارم و ششم نیز برابر ۲ هستند. در این صورت نیز مطابق شکل برای ۳ رقم دیگر $۶=۳!$ حالت امکان‌پذیر است.

$$\underline{۳}\times\underset{۲}{\underset{\downarrow}{\underline{۱}}}\times\underline{۲}\times\underset{۲}{\underset{\downarrow}{\underline{۱}}}\times\underline{۱}\times\underset{۲}{\underset{\downarrow}{\underline{۱}}}$$

بنابراین در مجموع $۱۲=۶+۶$ عدد ۶رقمی با مشخصات موردنظر می‌توان نوشت.

۲۱٪ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، با دقت در مثال‌های کتاب درسی، تشخیص حالت‌ها در این سؤال به سادگی امکان‌پذیر است.

نکته

در صورتی که جواب‌های مسئله به دو یا چند دستهٔ کلی تفکیک شود، برای حل سؤال از اصل جمع استفاده می‌کنیم.

۵۵ گزینهٔ «۲»

عدد ۳۲۴۱۵۶ از سه رقم فرد و سه رقم زوج تشکیل شده است، پس به دو حالت می‌توان ارقام این عدد را به صورت یک در میان زوج و فرد قرار داد.

حالت اول:

$$\underset{\text{زوج}}{\frac{۱}{}}\times\underset{\text{فرد}}{\frac{۱}{}}\times\underset{\text{زوج}}{\frac{۲}{}}\times\underset{\text{فرد}}{\frac{۲}{}}\times\underset{\text{زوج}}{\frac{۳}{}}\times\underset{\text{فرد}}{\frac{۳}{}}=۳!\times۳!=۶\times۶=۳۶$$

حالت دوم:

$$\underset{\text{فرد}}{\frac{۱}{}}\times\underset{\text{زوج}}{\frac{۱}{}}\times\underset{\text{فرد}}{\frac{۲}{}}\times\underset{\text{زوج}}{\frac{۲}{}}\times\underset{\text{فرد}}{\frac{۳}{}}\times\underset{\text{زوج}}{\frac{۳}{}}=۳!\times۳!=۶\times۶=۳۶$$

بنابراین طبق اصل جمع، تعداد اعداد موردنظر برابر است با:

$$۳۶+۳۶=۷۲$$

بررسی گزینهٔ دام‌دار:

گزینه «۱»: اگر فقط یکی از دو حالت در نظر گرفته شود، مثلاً رقم اول سمت چپ زوج فرض شود، آنگاه جواب برابر $۳!\times۳!=۳۶$ خواهد بود.

۴۸٪ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، با دقت در تمرینات کتاب درسی، مشابهت‌سازی برای حل این سؤال به سادگی امکان‌پذیر است.

نکته

در مسائل مربوط به یک در میان قرار گرفتن اشیاء، اگر تعداد اعضای دو گروه برابر باشد، مسئله به دو حالت تقسیم می‌شود.

۵۶ گزینهٔ «۴»

هر مثلث دارای ۳ رأس است که با توجه به وجود رأس A در تمام مثلث‌های موردنظر، کافی است ۲ رأس دیگر مثلث را از میان ۶ نقطهٔ موجود روی دایره (غیر از نقطهٔ A) انتخاب کنیم که تعداد راه‌های انجام کار برابر است با:

$$\binom{۶}{۲}=\frac{۶!}{۲!\,۴!}=\frac{۶\times۵\times۴!}{۲\times۱\times۴!}=۱۵$$

۴۰٪ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، سؤالات مشابهی در این زمینه یعنی انتخاب اشیاء در صورت شامل بودن یک یا چند شیء خاص در تمرینات کتاب درسی وجود دارد.

نکته

هر گاه یک شیء خاص همواره در میان اشیاء انتخابی قرار داشته باشد، باید از کل اشیاء و نیز تعداد اشیاء مورد انتخاب، هر کدام یک واحد کم کنیم.

۵۷ گزینهٔ «۲»

با توجه به اینکه ترتیب انتخاب دو تنیس‌باز اهمیتی ندارد، با استفاده از ترکیب، تعداد کل بازی‌ها برابر است با:

$$\binom{۵}{۲}=\frac{۵!}{۲!\,۳!}=\frac{۵\times۴\times۳!}{۲\times۱\times۳!}=۱۰$$

بررسی گزینهٔ دام‌دار:

گزینهٔ «۳»: در صورتی که به اشتباه برای دو تنیس‌باز انتخابی ترتیب در نظر گرفته شود، تعداد بازی‌ها طبق اصل ضرب برابر خواهد بود با: $۵\times۴=۲۰$

۴۶٪ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، سؤال به مفهوم اولیهٔ ترکیب k شیء از میان n شیء اشاره دارد.

۵۸ گزینهٔ «۱»

چون هیچ سه نقطه‌ای روی دایره وجود ندارد که روی خط راست باشند و نیز ترتیب انتخاب نقاط یک چهارضلعی اهمیتی ندارد، پس کافی است از ترکیب استفاده کنیم. تعداد این چهارضلعی‌ها برابر است با:

$$\binom{۹}{۴}=\frac{۹!}{۴!\,۵!}=\frac{۹\times۸\times۷\times۶\times۵!}{۴\times۳\times۲\times۱\times۵!}=۱۲۶$$

۳۰٪ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، سؤال دقیقاً معادل تعریف مفهوم ترکیب است.

۵۹ گزینهٔ «۴»

کافی است تعداد زیرمجموعه‌های ۵،۴،۳ و ۶ عضوی این مجموعه را به دست آورده و با هم جمع کنیم.

$$\underset{\text{۳ عضوی}}{\binom{۶}{۳}}+\underset{\text{۴ عضوی}}{\binom{۶}{۴}}+\underset{\text{۵ عضوی}}{\binom{۶}{۵}}+\underset{\text{۶ عضوی}}{\binom{۶}{۶}}$$

$$=\frac{۶!}{۳!\,۳!}+\frac{۶!}{۴!\,۲!}+\frac{۶!}{۵!\,۱!}+\frac{۶!}{۶!\,۱!}$$

$$=۲۰+۱۵+۶+۱=۴۲$$

۱۶٪ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، سؤالات متعددی در تمرینات، کار در کلاس‌ها و فعالیت‌های کتاب درسی در زمینهٔ تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه وجود دارد.

۶۰ گزینهٔ «۲»

ابتدا مدیر گروه را از میان ۳ زن انتخاب می‌کنیم که این کار به $\binom{۳}{۱}$ طریق امکان‌پذیر است. سپس ۲ عضو دیگر این گروه را از میان ۸ نفر باقی‌مانده (۶ مرد و ۲ زن) انتخاب می‌کنیم که این کار به $\binom{۸}{۲}$ طریق امکان‌پذیر است. بنابراین حالت‌های انجام این کار طبق اصل ضرب برابر است با:

$$\binom{۳}{۱}\times\binom{۸}{۲}=\frac{۳!}{۱!\,۲!}\times\frac{۸!}{۲!\,۶!}$$

$$=\frac{۳\times۲!}{۱\times۲!}\times\frac{۸\times۷\times۶!}{۲\times۱\times۶!}=۳\times۲۸=۸۴$$

۲۶٪ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، مرتبط با مفهوم ترکیب k شیء از میان n شیء است که به طور متعدد در سؤالات کتاب درسی مورد بررسی قرار گرفته است.

۶۱ گزینهٔ «۴»

دو عضو ۳ و ۱ را از میان انتخاب‌ها حذف می‌کنیم، پس کافی است اعضای زیرمجموعه را از میان ۴ عضو دیگر یعنی ۲، ۴، ۵، ۶ انتخاب کنیم. از طرفی ۳ باید در زیر مجموعه حضور داشته باشد، پس کافی است دو عضو دیگر زیرمجموعه را انتخاب نماییم.

تعداد این زیرمجموعه‌ها برابر است با:

$$\binom{۴}{۲}=\frac{۴!}{۲!۲!}=\frac{۴\times۳\times۲!}{۲\times۱\times۲!}=۶$$

گزینهٔ «۱»: اگر به عضویت ۳ و عدم عضویت ۱ در زیر مجموعه دقت نشود، جواب برابر $\binom{۶}{۳}=۲۰$ است.

گزینهٔ «۲»: اگر یکی از دو مورد عضویت ۳ یا عدم عضویت ۱ نادیده گرفته شود، جواب برابر $\binom{۵}{۲}$ یا $\binom{۵}{۳}$ می‌شود که هر دو مورد برابر ۱۰ است.

گزینهٔ «۳»: اگر به این موضوع که وجود ۳ در زیرمجموعه، یک انتخاب را کم می‌کند دقت نشود، جواب برابر $\binom{۴}{۳}=۴$ است.

۳۲٪ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که سؤالات مرتبط با تعداد زیر مجموعه‌ها در کتاب درسی مورد تأکید قرار گرفته است.

نکته

در محاسبهٔ تعداد اعضای یک زیر مجموعهٔ k عضوی از یک مجموعهٔ n عضوی، اگر زیرمجموعه شامل عضوی خاص باشد، از مقادیر n و k هر کدام یک واحد کم می‌کنیم و در صورتی که عضوی خاص در زیرمجموعه نباشد، تنها از مقدار n، یک واحد کاسته می‌شود.

۶۲ گزینهٔ «۲»

روش اول: چون ترتیب انتخاب افراد مهم است (با توجه به اینکه سه پست متفاوت برای سه نفر انتخابی وجود دارد)، پس کافی است از تبدیل k شیء از n شیء استفاده کنیم.

تعداد راه‌های انجام این کار برابر است با:

$$P(۸,۳)=\frac{۸!}{(۸-۳)!}=\frac{۸!}{۵!}=\frac{۸\times۷\times۶\times۵!}{۵!}=۳۳۶$$

روش دوم: ابتدا مدیر را از میان ۸ نفر انتخاب می‌کنیم و در مراحل بعد به ترتیب معاون و مسئول مالی را از بین ۷ و ۶ نفر باقی‌مانده انتخاب می‌نماییم، پس تعداد راه‌های انجام این کار برابر است با:

$$\underset{\text{مدیر}}{\underset{\downarrow}{۸}}\times\underset{\text{معاون}}{\underset{\downarrow}{۷}}\times\underset{\text{مسئول مالی}}{\underset{\downarrow}{۶}}=۳۳۶$$

۲۱٪ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که سؤال مرتبط با مفهوم تبدیل k شیء از n شیء است که از مفاهیم پایه‌ای درس شمارش است.

۶۳ گزینهٔ «۳»

کافی است از بین ۶ دانش‌آموز سال اولی، ۲ نفر و از میان ۸ دانش‌آموز دیگر (سال دومی و سومی)، یک نفر باقی‌مانده را انتخاب کنیم. تعداد راه‌های انجام این کار برابر است با:

$$\binom{۶}{۲}\times\binom{۸}{۱}=\frac{۶!}{۲!۴!}\times\frac{۸!}{۱!۷!}$$

$$=\frac{۶\times۵\times۴!}{۲\times۱\times۴!}\times\frac{۸\times۷!}{۱\times۷!}=۱۵\times۸=۱۲۰$$

۳۷٪ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که مسائل مرتبط با ترکیب در تمرینات و کار در کلاس‌های کتاب درسی به طور متعددی مطرح شده است.

نکته

تعداد راه‌های انتخاب k شیء از میان n شیء در صورتی که ترتیب انتخاب اشیاء مهم نباشد، برابر است با:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

۶۴ گزینهٔ «۱»

چون زیرمجموعه‌های موردنظر فاقد عدد ۳ است، پس کافی است ۳ عضو زیرمجموعه را از میان ۴ عضو باقی‌ماندهٔ مجموعهٔ A، یعنی ۱،۲،۴ و ۵ انتخاب کنیم که تعداد حالت‌ها برابر است با:

$$\binom{۴}{۳} = \frac{۴!}{۳!\ ۱!} = \frac{۴\times۳!}{۳!} = ۴$$

٪۱۴ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، سؤالی مشابه با این سؤال در تمرینات کتاب درسی وجود دارد.

نکته

تعداد حالت‌های انتخاب r شیء از میان n شیء و در صورتی که ترتیب انتخاب مهم نباشد و بخواهیم k شیء مشخص در بین انتخاب شده‌ها نباشند، برابر است با: $\binom{n-k}{r}$

۶۵ گزینهٔ «۲»

چون با ۳ نقطهٔ واقع بر یک خط راست نمی‌توان مثلث ساخت، پس جواب‌ها را به دو دستهٔ زیر تقسیم می‌کنیم:

دستهٔ اول: انتخاب دو نقطه از خط بالا و یک نقطه از خط پایین:

$$\binom{۴}{۲}\times\binom{۳}{۱} = \frac{۴!}{۲!۲!}\times\frac{۳!}{۱!\times۲!} = ۶\times۳ = ۱۸$$

دستهٔ دوم: انتخاب یک نقطه از خط بالا و دو نقطه از خط پایین:

$$\binom{۴}{۱}\times\binom{۳}{۲} = \frac{۴!}{۱!۳!}\times\frac{۳!}{۲!\times۱!} = ۴\times۳ = ۱۲$$

بنابراین تعداد کل مثلث‌های ساخته شده با این نقاط برابر است با:

$۱۸+۱۲=۳۰$

٪۱۰ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، حل سؤال با استفاده از مشابهت‌سازی با تمرینات کتاب درسی امکان‌پذیر است.

نکته

اگر جواب‌های مسئله به دو یا چند دستهٔ کلی تفکیک شود، برای به دست آوردن تعداد جواب‌ها از اصل جمع استفاده می‌کنیم.

۶۶ گزینهٔ «۳»

چون عدد ۴ در زیرمجموعهٔ ۳ عضوی انتخاب شده موجود است، پس برای تکمیل زیرمجموعهٔ ۳ عضوی، کافی است ۲ عضو از میان ۴ عضو باقی‌ماندهٔ مجموعهٔ A انتخاب کنیم که تعداد انتخاب‌ها برابر است با:

$$\binom{۴}{۲} = \frac{۴!}{۲!\times۲!} = \frac{۴\times۳\times۲!}{۲\times۱\times۲!} = ۶$$

بررسی گزینهٔ دام‌دار:

گزینهٔ «۱»: اگر به اشتباه تعداد انتخاب‌های دوعضو باقی‌ماندهٔ زیرمجموعه را از میان هر ۵ عضو مجموعهٔ A محاسبه کنیم، جواب به شکل زیر به دست می‌آید:

$$\binom{۵}{۲} = \frac{۵!}{۲!۳!} = \frac{۵\times۴\times۳!}{۲\times۱\times۳!} = ۱۰$$

٪۳۴ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، مشابه این سؤال در تمرینات کتاب درسی وجود دارد.

نکته

تعداد انتخاب‌های r شیء از میان n شیء (بدون در نظر گرفتن ترتیب) در صورتی که k شیء مشخص حتماً انتخاب شوند،برابر است با:

$$\binom{n-k}{r-k}$$

۶۷ گزینهٔ «۳»

ابتدا تعداد کل حالت‌هایی که می‌توانیم ۳ کتاب از بین این ۹ کتاب را انتخاب کنیم، به دست می‌آوریم.

$$\binom{۹}{۳} = \frac{۹!}{۳!\ ۶!} = \frac{۹\times۸\times۷\times۶!}{۳\times۲\times۱\times۶!} = ۸۴$$

سپس تمام حالت‌هایی که هیچ کدام از کتاب‌های ریاضی بین کتاب‌های انتخاب‌شده قرار ندارد را به دست آورده و از کل حالت‌ها کم می‌کنیم. اگر هیچ کتاب ریاضی انتخاب نشود، هر ۳ کتاب باید از بین ۴ کتاب فیزیک انتخاب گردد که تعداد حالت‌ها برابر است با:

$$\binom{۴}{۳} = \frac{۴!}{۳!\ ۱!} = \frac{۴\times۳!}{۳!} = ۴$$

بنابراین جواب مسئله برابر است با: $۸۴-۴=۸۰$

٪۵۰ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، در تمرینات کتاب درسی، سؤالی مشابه به این سؤال دیده می‌شود.

نکته

تعداد روش‌های انتخاب r شیء از میان n شیء در صورتی که ترتیب انتخاب اشیاء مهم نباشد (ترکیب r شیء از n شیء) از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$\binom{n}{r}=\frac{n!}{(n-r)!r!}$$

۶۸ گزینهٔ «۳»

تعداد زیرمجموعه‌های ۳ عضوی یک مجموعهٔ ۵ عضوی برابر تعداد راه‌های انتخاب ۳ شیء از میان ۵ شیء در حالتی است که ترتیب انتخاب اشیاء مهم نباشد (ترکیب r شیء از میان n شیء)، پس تعداد این زیرمجموعه‌ها برابر است با:

$$\binom{۵}{۳}=\frac{۵!}{۳!\ ۲!}=\frac{۵\times۴\times\cancel{۳!}}{\cancel{۳!}\times۲\times۱}=۱۰$$

۳۹٪ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند. تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه در مثال‌ها و تمرینات کتاب درسی چندین بار مورد بررسی قرار گرفته است.

نکته

تعداد زیرمجموعه‌های r عضوی یک مجموعهٔ n عضوی برابر است با: $\binom{n}{r}$

۶۹ گزینهٔ «۲»

می‌خواهیم از بین ۱۰ نفر، ۲ نفر را انتخاب کنیم و ترتیب انتخاب افراد (با توجه به تفاوت نمایندهٔ آموزشی و نمایندهٔ ورزشی)، مهم است، پس کافی است تعداد حالت‌های تبدیل (جایگشت) ۲ شیء از ۱۰ شیء را محاسبه کنیم:

$$P(۱۰,۲)=\frac{۱۰!}{(۱۰-۲)!}=\frac{۱۰!}{۸!}=\frac{۱۰\times۹\times۸!}{۸!}=۹۰$$

۲۷٪ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند. سؤالات متعددی در کتاب درسی مشابه با این سؤال وجود دارد.

نکته

تعداد حالت‌های انتخاب r شیء از n شیء در صورتی که ترتیب انتخاب اشیاء مهم باشد (تبدیل r شیء) برابر است با: $P(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!}$

۷۰ گزینهٔ «۱»

چون ترتیب انتخاب سؤال‌ها اهمیتی ندارد، پس جواب مسئله از روش ترکیب به دست می‌آید. با توجه به داده‌های سؤال داریم:

$$\binom{۱۰}{۸}=\frac{۱۰!}{۸!\ ۲!}=\frac{۱۰\times۹\times\cancel{۸!}}{\cancel{۸!}\times۲}=۴۵$$

۳۳٪ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند. دقیقاً مشابه تعریفی است که برای مفهوم ترکیب ارائه شده است و به صورت‌های مختلف در کار در کلاس‌های کتاب درسی دیده می‌شود.

نکته

تعداد انتخاب‌های k شیء از n شیء در صورتی که ترتیب اشیا مهم نباشد، از رابطهٔ مقابل به دست می‌آید: $\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$

۷۱ گزینهٔ «۱»

حاصل هر کدام از ترکیب‌ها را به دست آورده و در عبارت جایگذاری می‌کنیم.

$$\binom{۷}{۱}=\binom{۷}{۶}=\frac{۷!}{۶!\ ۱!}=\frac{۷\times\cancel{۶!}}{\cancel{۶!}\times۱}=۷$$

$$\binom{۷}{۲}=\frac{۷!}{۲!\ ۵!}=\frac{۷\times۶\times۵!}{۲\times۱\times۵!}=۲۱$$

$$\binom{۸}{۳}=\frac{۸!}{۳!\ ۵!}=\frac{۸\times۷\times۶\times۵!}{۳\times۲\times۱\times۵!}=۵۶$$

$$\binom{۸}{۲}=\frac{۸!}{۲!\ ۶!}=\frac{۸\times۷\times۶!}{۲\times۱\times۶!}=۲۸$$

$$\frac{\binom{۷}{۱}+\binom{۷}{۲}+\binom{۷}{۶}}{\binom{۸}{۳}-\binom{۸}{۲}}=\frac{۷+۲۱+۷}{۵۶-۲۸}=\frac{۳۵}{۲۸}=\frac{۵}{۴}$$

۴۷٪ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند. سؤال صرفاً به محاسبهٔ ترکیب k شیء از n شیء اختصاص دارد.

نکته

برای هر دو عدد دلخواه n و k $(n\geq k)$ داریم:

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

۷۲ گزینهٔ «۲»

حداقل ۲ مهرهٔ آبی به معنای انتخاب ۲ مهره آبی یا ۳ مهره آبی است، پس تعداد انتخاب‌های ممکن برابر است با:

$$\underbrace{\binom{۴}{۲}}_{\text{۲مهرهٔ آبی}}\times\underbrace{\binom{۳}{۱}}_{\text{یک‌مهرهٔ قرمز}}+\underbrace{\binom{۴}{۳}}_{\text{۳مهرهٔ آبی}}=\frac{۴!}{۲!\ ۲!}\times\frac{۳!}{۱!\ ۲!}+\frac{۴!}{۳!\ ۱!}$$

$$=۶\times۳+۴=۲۲$$

۱۵٪ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند. مسائل مربوط به انتخاب اشیاء به گونه‌ای که شامل حداقل k شیء خاص باشد، در تمرینات کتاب درسی بررسی شده است.

نکته

وقتی بخواهیم حداقل k شیء حاصل انتخاب شود، باید تمام حالت‌های ممکن انتخاب این شیء شامل $k, k+1, ...$ تا حداکثر تعداد اشیاء انتخاب را محاسبه و با هم جمع کنیم.

۷۳ گزینهٔ «۳»

تعداد جواب‌های مسئله معادل تعداد راه‌های انتخاب ۳ شیء از میان ۱۲ شیء است در صورتی که ترتیب قرارگرفتن اشیاء مهم نباشد، بنابراین داریم:

$$\binom{12}{3} = \frac{12!}{3!\times 9!} = \frac{12\times 11\times 10\times 9!}{3\times 2\times 1\times 9!} = \text{تعداد زیرمجموعه‌ها}$$

۳۰٪ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، در تمرینات و کار در کلاس‌های کتاب درسی سؤالات مشابهی وجود دارد.

نکته

تعداد زیر مجموعه‌های k عضوی یک مجموعهٔ n عضوی از رابطهٔ $\binom{n}{k}$ به دست می‌آید.

۷۴ گزینهٔ «۳»

اگر a در زیرمجموعه‌های موردنظر نباشد، پس ۴ عضو زیرمجموعه را باید از میان اعضای باقی‌مانده از مجموعه یعنی $\{b,c,d,e,f\}$ انتخاب کرد، بنابراین تعداد زیرمجموعه‌های موردنظر برابر است با:

$$\binom{5}{4} = \frac{5!}{4!\,1!} = \frac{5\times 4!}{4!} = 5$$

۲۴٪ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، مشابه این سؤال در یکی از کار در کلاس‌ها و نیز یکی از تمرینات کتاب درسی موجود است.

درس ۲: احتمال

۷۵ گزینهٔ «۱»

$$\text{فضای نمونهٔ پرتاب ۳ سکه} = S_1 \Rightarrow n(S_1) = 2\times 2\times 2 = 2^3 = 8$$

$$\text{فضای نمونهٔ انداختن ۱ تاس} = S_2 \Rightarrow n(S_2) = 6$$

$$\text{فضای نمونهٔ پرتاب ۳ سکه و ۱ تاس} = S \Rightarrow n(S) = n(S_1)\times n(S_2)$$

$$= 8\times 6 = 48$$

۳۶٪ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، در قسمت فضای نمونه در کتاب درسی مشابه این سؤال بررسی شده است که دانش‌آموزان با توجه به این قسمت موفق به پاسخ‌گویی شده‌اند.

نکته

در حالت کلی اگر S فضای نمونهٔ پرتاب k سکه و n تاس باشد داریم:

$n(S) = 2^k \times 6^n$

۷۶ گزینهٔ «۲»

پیشامد این که ۳ نفر انتخاب شده از سه پایه مختلف باشند معادل آن است که ۱ نفر از پایه دهم و ۱ نفر از پایه یازدهم و ۱ نفر از پایه دوازدهم باشد و اگر این پیشامد را A بنامیم داریم:

$$n(A) = \binom{6}{1}\times\binom{7}{1}\times\binom{8}{1} = 6\times 7\times 8 = 336$$

نکته

همواره انتخاب افراد برای تشکیل گروه یا تیم ورزشی با ترکیب صورت می‌گیرد.

۱۲٪ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، به نمونه‌های حل شده و تمرین‌های کتاب درسی توجه کرده‌اند.

۷۷ گزینهٔ «۴»

$$n(S) = \underbrace{(2\times 2\times 2)}_{\text{سه سکه}}\times\underbrace{(6\times 6)}_{\text{و دوتاس}} = 8\times 36 = 288$$

نکته

در حالت کلی اگر S فضای نمونهٔ پرتاب k سکه و n تاس باشند، طبق اصل ضرب تعداد کلی حالت‌ها برابر است با: $n(S) = 2^k \times 6^n$

۷۸ گزینهٔ «۲»

می‌دانیم در پرتاب ۲ تاس، $n(S_1) = 6^2 = 36$ و برای پرتاب ۵ سکه $n(S_2) = 2^5 = 32$ و بنابراین $36 - 32 = 4$.

بررسی گزینه‌های دام‌دار:

گزینهٔ «۱»: اگر به اشتباه $n(S_2) = 5^2 = 25$ محاسبه شود، $36 - 25 = 11$ به گزینهٔ «۱» می‌رسیم.

نکته

همواره $n(S)$ برای پرتاب k سکه و n تاس برابر است با:

$n(S) = 2^k \times 6^n$

۷۹ گزینهٔ «۱»

اگر A را پیشامد این که مجموع دو تاس مضرب ۳ باشد و B را پیشامد این که مجموع اعداد دو تاس مضرب ۲ باشد تعریف کنیم، با توجه به صورت سؤال واضح است که $n(A-B)$ باید محاسبه شود.

$$n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)$$

$$A=\{(۱,۲),(۲,۱),(۲,۴),(۴,۲),(۳,۳),(۱,۵),(۵,۱),(۴,۵),(۵,۴),(۳,۶),(۶,۳),(۶,۶)\}$$ مجموع مضرب ۳

$$A\cap B=\{(۲,۴),(۴,۲),(۳,۳),(۱,۵),(۵,۱),(۶,۶)\}$$ مجموع مضرب ۳ و مضرب ۲

$$n(A-B)=۱۲-۶=۶$$

نکته

با توجه به جدول زیر به راحتی می‌توانید تعداد حالت‌های ممکن برای مجموع دو تاس را به خاطر بسپارید:

مجموع	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
تعداد	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۵	۴	۳	۲	۱

۸۰ گزینهٔ «۱»

با توجه به مفروضات سؤال داریم:

$$n[(A\cup B)-C]=n(A\cup B)-n[(A\cup B)\cap C]$$
$$=n(A)+n(B)-n(A\cap B)-n[(A\cap C)\cup(B\cap C)]$$
$$=n(A)+n(B)-n(A\cap B)-[n(A\cap C)+n(B\cap C)$$
$$-n(A\cap B\cap C)]$$
$$=n(A)+n(B)-n(A\cap B)-n(A\cap C)-n(B\cap C)$$
$$+n(A\cap B\cap C)$$
$$=۳+۲-۱-۱-۱+۰=۲$$

(تنها دو عدد ۴ و ۶ در شرایط سؤال صدق می‌کنند یعنی یا مضرب ۳ یا زوج هستند ولی اول نیستند)

نکته

در حالت کلّی اگر A و B دو پیشامد از فضای S باشند.

$n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)$

۸۱ گزینهٔ «۳»

به نمودار درختی زیر توجه کنید، همهٔ حالت‌ها روی این نمودار مشخص شده است.

۱) $\xrightarrow{\text{۱سکه}}$ حالت $۲^۱=۲$

۲) $\xrightarrow{\text{۲سکه}}$ حالت $۲^۲=۴$

۳) $\xrightarrow{\text{۳سکه}}$ حالت $۲^۳=۸$

۴) $\xrightarrow{\text{۴سکه}}$ حالت $۲^۴=۱۶$

۵) $\xrightarrow{\text{۵سکه}}$ حالت $۲^۵=۳۲$

$\Rightarrow$ تعداد کل حالت‌ها $=۲+۴+۸+۱۶+۳۲=۶۲$

نکته

دقت دارید که یا کارت ۱ برداشته شده و ۱ سکه می‌اندازیم یا کارت ۲ برداشته شده و ۲ سکه می‌اندازیم یا ...یا کارت ۵ برداشته شده و ۵ سکه می‌اندازیم که استفاده از لفظ «یا» در بین حالت‌ها دلیل بر جمع حالت‌ها است.

۸۲ گزینهٔ «۴»

گزینه‌های «۱»، «۲» و «۳» عیناً متن کتاب درسی بوده و واضح است که اگر A و B با هم رخ ندهند ممکن است هیچ‌کدام رخ ندهند.

۲۲٪ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که در اعمال روی پیشامدها یا جبر پیشامدها تسلط داشته‌اند.

۸۳ گزینهٔ «۳»

کافی است $(B\cup C)$ که رخ نمی‌دهد را برداریم که بخش‌هایی از A را با خود می‌برد!

۴۱٪ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که به‌طور کلّی برای نمایش $(A-B)$ روی نمودار B را از A برمی‌دارند که بخش‌هایی از A را با خود می‌برد.

نکته

هرگاه پیشامدی رخ نمی‌دهد برای نمایش روی نمودار ون، آن پیشامد را حذف می‌کنیم.

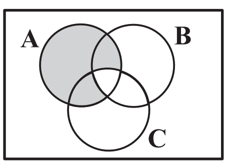
۸۴ گزینهٔ «۳»

برای محاسبهٔ A' از مرجع S کافی است A را از S برداریم بنابراین برای هاشور زدن $(A\cap B\cap C)'$ کافی است $(A\cap B\cap C)$ را از S برداریم.

۸۵ گزینهٔ «۴»

هر سه گزینهٔ (۱)، (۲) و (۳) مشخص‌کنندهٔ قسمت هاشورخورده هستند ولی در گزینهٔ (۴) یعنی $A-(B\cap C)$ قسمت هاشور خورده مطابق شکل زیر است.

(از مجموعهٔ A مجموعهٔ $(B\cap C)$ را برمی‌داریم)



نکته

برای مشخص کردن $(A-B)$ کافی است از مجموعهٔ A مجموعهٔ $(A\cap B)$ را حذف کنیم.