

درس اول

راهبردهای رسم شکل

۱ تماشاگران ردیف اول یک مسابقه ورزشی دور یک مستطیل به طول و عرض ۲۸ و ۱۶ متر قرار دارند. اگر فاصله تماشاگران از یکدیگر نیممتر باشد، چنانچه هر ضلع از مستطیل را که تماشاگران در آن قرار دارند، یک متر از زمین مسابقه دورتر کنیم، چه تعداد به تماشاگران ردیف اول اضافه خواهد شد؟ (فاصله‌ها را از مرکز صندلی تا مرکز صندلی بعدی در نظر می‌گیریم.)

| | | | |
|--|-----------|--------|--------|
| | %۹۵ | ۱۴ (۲) | ۱۲ (۱) |
| | %۷۵ | ۱۸ (۴) | ۱۶ (۳) |
| | آبان ۱۳۹۸ | | |

۲ میزان $\frac{2}{7}$ بیماران یک بیمارستان خردسال هستند و $\frac{3}{7}$ بیماران، بزرگسال و مرد هستند، چه کسری از بیماران بزرگسال و زن هستند؟ (به‌طور کلی بیماران به دو دسته‌ی خردسال و بزرگسال تقسیم می‌شوند و بیماران زن و مرد در دسته‌ی بزرگسال جدا می‌شوند.)

| | | | |
|--|------------|---------------------|---------------------|
| | %۹۲ | $\frac{2}{7}$ (۲) | $\frac{4}{7}$ (۱) |
| | %۸۴ | $\frac{20}{49}$ (۴) | $\frac{29}{49}$ (۳) |
| | مرداد ۱۳۹۷ | | |

درس دوم

راهبرد الگوسازی

۳ چند عدد سه رقمی فرد وجود دارد که صدگان آن‌ها کم‌تر از ۶ و دهگان آن‌ها مضرب طبیعی ۴ باشد؟ (بدون تکرار ارقام)

| | | | |
|--|----------|--------|--------|
| | %۹۵ | ۵۰ (۲) | ۳۹ (۱) |
| | %۸۱ | ۳۵ (۴) | ۴۲ (۳) |
| | مهر ۱۳۹۶ | | |

۴ تعداد محدودی عدد طبیعی متوالی را که از یک شروع می‌شود، پشت سر هم نوشته‌ایم. عدد حاصل ۹۵۷ رقمی است. سه رقم آخر این عدد کدام است؟

| | | | |
|--|-----------|---------|---------|
| | %۹۲ | ۳۵۵ (۲) | ۹۵۷ (۱) |
| | %۷۷ | ۳۵۶ (۴) | ۲۵۶ (۳) |
| | آبان ۱۳۹۷ | | |

۵ به چند حالت می‌توان یک ظرف ۲۰ لیتری شیر را با پیمانه‌های ۲، ۳ و ۵ لیتری پرکرد؟ (دقت کنید که تنها تعداد استفاده از هر پیمانه اهمیت دارد و ترتیب استفاده از هر پیمانه اهمیتی ندارد.)

| | | | |
|--|-------------|--------|--------|
| | %۹۰ | ۱۱ (۲) | ۱۰ (۱) |
| | %۶۹ | ۱۳ (۴) | ۱۲ (۳) |
| | شهریور ۱۳۹۷ | | |

۶ می‌خواهیم یک اسکناس ۲۰۰ تومانی را به کمک سکه‌های ۱۰، ۲۵ و ۵۰ تومانی خرد کنیم. این کار به چند طریق ممکن است؟

| | | | |
|--|-----------|--------|--------|
| | %۸۹ | ۱۳ (۲) | ۱۶ (۱) |
| | %۶۳ | ۱۵ (۴) | ۱۴ (۳) |
| | آبان ۱۳۹۷ | | |

۷ مساحت مثلثی ۲۱ شده است. چند حالت برای اندازه قاعده و ارتفاع این مثلث وجود دارد؟ (طول قاعده و ارتفاع این مثلث عددهای طبیعی اند.)

| | |
|--|------------|
| | %۸۸ |
| | %۶۲ |
| | بهمین ۱۴۰۱ |

| | | |
|-------|-------|-------|
| ۳ (۱) | ۴ (۲) | ۶ (۳) |
| | ۸ (۴) | |

۸ تعداد زیادی سکه‌های ۲۵، ۵۰ و ۱۰۰ تومانی داریم. به چند حالت می‌توان ۳۰۰ تومان درست کرد؟

| | |
|--|-----------|
| | %۷۳ |
| | %۵۴ |
| | آبان ۱۳۹۶ |

| | | |
|--------|--------|--------|
| ۱۸ (۱) | ۱۶ (۲) | ۱۰ (۳) |
| | ۲۰ (۴) | |

۹ تعداد اعداد سه رقمی فرد کوچک‌تر از ۲۰۰ که مضرب ۵ نباشد و مجموع رقم‌های آن‌ها ۷ یا کم‌تر باشد، چندتا است؟

| | |
|--|----------|
| | %۷۹ |
| | %۴۲ |
| | مهر ۱۴۰۱ |

| | | |
|-------|--------|--------|
| ۸ (۱) | ۹ (۲) | ۱۰ (۳) |
| | ۱۱ (۴) | |

۱۰ در پرتاب سه تاس با رنگ‌های مختلف، در چند حالت مجموع اعداد رو شده ۹ می‌شود؟

| | |
|--|----------|
| | %۷۵ |
| | %۴۰ |
| | مهر ۱۳۹۷ |

| | |
|-------------|-------------|
| ۲۰ (۱) حالت | ۱۶ (۲) حالت |
| ۲۵ (۳) حالت | ۲۸ (۴) حالت |

۱۱ در بین عددهای زیر، چند عدد شامل رقم ۷ نیست؟

| | |
|--|-----------|
| | %۷۸ |
| | %۴۷ |
| | آبان ۱۳۹۷ |

| | | |
|---------|-------------------------|---------|
| ۴۸۶ (۱) | ۲۰۰, ۲۰۱, ۲۰۲, ..., ۸۰۰ | ۴۰۵ (۲) |
| ۴۸۵ (۳) | | ۴۰۶ (۴) |

درس سوم

راهنمای حذف حالت‌های نامطلوب

۱۲ چند عدد دو رقمی وجود دارد که ارقام هر یک از آن‌ها، دو عدد متوالی نباشد؟

| | |
|--|-----------|
| | %۸۷ |
| | %۶۱ |
| | آبان ۱۳۹۹ |

| | | |
|--------|--------|--------|
| ۷۱ (۱) | ۷۴ (۲) | ۷۳ (۳) |
| | ۷۲ (۴) | |

۱۳ در بین مستطیل‌هایی که مساحت آن‌ها ۴۰ مترمربع است، نسبت بیش‌ترین محیط ممکن به کم‌ترین محیط ممکن کدام است؟ (اندازه طول و عرض مستطیل‌ها عددی طبیعی است)

| | |
|--|-----------|
| | %۸۹ |
| | %۵۹ |
| | آبان ۱۳۹۶ |

| | | |
|--------------------|---------------------|---------------------|
| $\frac{11}{7}$ (۱) | $\frac{41}{14}$ (۲) | $\frac{22}{13}$ (۳) |
| | $\frac{41}{13}$ (۴) | |

۱۴ در یک آزمون، به‌ازای هر جواب صحیح، ۱ نمره مثبت و به‌ازای هر ۳ جواب نادرست، یک نمره منفی برای دانش‌آموز لحاظ می‌شود. اگر از مجموع ۲۰ سؤال نمره ۱۲ کسب شده باشد، این نمره در چند حالت امکان‌پذیر است؟

| | |
|--|----------|
| | %۶۳ |
| | %۴۱ |
| | مهر ۱۳۹۷ |

| | | |
|-------|-------|-------|
| ۱ (۱) | ۲ (۲) | ۳ (۳) |
| | ۴ (۴) | |

| ۱۰۰ تومانی | ۵۰ تومانی | ۲۵ تومانی |
|------------|-----------|-----------|
| ۳ | ۰ | ۰ |
| ۲ | ۱ | ۲ |
| ۲ | ۰ | ۴ |
| ۲ | ۲ | ۰ |
| ۱ | ۴ | ۰ |
| ۱ | ۰ | ۸ |
| ۱ | ۱ | ۶ |
| ۱ | ۲ | ۴ |
| ۱ | ۳ | ۲ |
| ۰ | ۶ | ۰ |
| ۰ | ۰ | ۱۲ |
| ۰ | ۱ | ۱۰ |
| ۰ | ۲ | ۸ |
| ۰ | ۳ | ۶ |
| ۰ | ۴ | ۴ |
| ۰ | ۵ | ۲ |

۱۶ حالت ⇒

۹ گزینه «۳»

در این نوع مسائل فکر کردن با نظم به سؤالات به حل سؤالات کمک زیادی خواهد کرد به این ترتیب که ابتدا اعداد سه رقمی با مجموع ارقام ۷ را می‌نویسیم. سپس اعداد سه رقمی با مجموع ارقام ۶ و ... به این ترتیب همه حالت‌های ممکن را در نظر می‌گیریم.

| | |
|-------------|-----------|
| جمع ارقام ۷ | ۱۵۱ و ۱۳۳ |
| جمع ارقام ۶ | ۱۴۱ و ۱۲۳ |
| جمع ارقام ۵ | ۱۱۳ و ۱۳۱ |
| جمع ارقام ۴ | ۱۲۱ و ۱۰۳ |
| جمع ارقام ۳ | ۱۱۱ |
| جمع ارقام ۲ | ۱۰۱ |

۴۲٪ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند. چرا که در حل این سؤال منظم فکر کرده‌اند. در واقع نکته حل این سؤالات این است که هیچ حالتی را از دست ندهیم.

۱۰ گزینه «۳»

کل حالت‌های ممکن که مجموع سه عدد برابر ۹ شوند را می‌نویسیم. این سه عدد باید اعداد کوچک‌تر از ۶ باشند.

| | | | | |
|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| (۵, ۳, ۱) | (۴, ۳, ۲) | (۶, ۲, ۱) | (۵, ۲, ۲) | |
| (۵, ۱, ۳) | (۴, ۲, ۳) | (۶, ۱, ۲) | (۲, ۵, ۲) | |
| (۱, ۳, ۵) | (۳, ۲, ۴) | (۱, ۲, ۶) | (۲, ۲, ۵) | |
| (۱, ۵, ۳) | (۳, ۴, ۲) | (۱, ۶, ۲) | (۳, ۳, ۳) | |
| (۳, ۵, ۱) | (۲, ۳, ۴) | (۲, ۶, ۱) | (۴, ۴, ۱) | |
| (۳, ۱, ۵) | (۲, ۴, ۳) | (۲, ۱, ۶) | (۴, ۱, ۴) | (۱, ۴, ۴) |

حالت ۲۵ ⇒

۶ گزینه «۳»

برای حل این نوع سؤالات بهترین کار رسم جدول نظام‌دار است. در جدول نظام‌دار تلاش می‌کنیم در هر مرحله از تعداد یک نوع سکه کم کنیم و به تعداد بقیه بیفزاییم.

| ۱۰ تومانی | ۲۵ تومانی | ۵۰ تومانی |
|-----------|-----------|-----------|
| ۲۰ | ۰ | ۰ |
| ۱۵ | ۰ | ۱ |
| ۱۵ | ۲ | ۰ |
| ۱۰ | ۴ | ۰ |
| ۱۰ | ۰ | ۲ |
| ۱۰ | ۲ | ۱ |
| ۵ | ۶ | ۰ |
| ۵ | ۰ | ۳ |
| ۵ | ۲ | ۲ |
| ۵ | ۴ | ۱ |
| ۰ | ۸ | ۰ |
| ۰ | ۲ | ۳ |
| ۰ | ۴ | ۲ |
| ۰ | ۶ | ۱ |

۱۴ حالت ⇒

۶۳٪ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند. چرا که به رسم جدول نظام‌دار توجه کرده‌اند.

۷ گزینه «۴»

می‌دانیم که مساحت مثلث عبارت است از: $\frac{1}{2} \times \text{ارتفاع} \times \text{قاعده}$
بنابراین باید اعدادی طبیعی را بیابیم که حاصل ضرب آن‌ها ۴۲ واحد باشد. با استفاده از راهبرد الگوسازی داریم:

| ارتفاع | قاعده | مساحت |
|--------|-------|-------|
| ۱ | ۴۲ | ۲۱ |
| ۲ | ۲۱ | ۲۱ |
| ۳ | ۱۴ | ۲۱ |
| ۶ | ۷ | ۲۱ |
| ۷ | ۶ | ۲۱ |

۸ حالت ⇒

۸ گزینه «۲»

۳۰۰ تومان را می‌توان تنها با ۳ سکه ۱۰۰ تومانی درست کرد. به همین ترتیب تعداد سکه‌های ۱۰۰ تومانی را طبق جدول نظام‌دار زیر کاهش می‌دهیم و به تعداد دیگر سکه‌ها می‌افزاییم.

| | | |
|------|-----|-----|
| محیط | عرض | طول |
| ۸۲ | ۱ | ۴۰ |
| ۴۴ | ۲ | ۲۰ |
| ۲۸ | ۴ | ۱۰ |
| ۲۶ | ۵ | ۸ |

بیشترین محیط ممکن از مستطیلی به طول ۴۰ و عرض ۱ و کمترین محیط ممکن از مستطیلی به طول ۸ و عرض ۵ حاصل می‌شود.

$$۸۲ = (۴۰ + ۱) \times ۲$$

$$۲۶ = (۸ + ۵) \times ۲$$

$$\frac{۸۲}{۲۶} = \frac{۴۱}{۱۳}$$

۵۹٪ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند. چرا که به انتخاب چگونگی اضلاع برای ابعاد بیش‌ترین و کم‌ترین محیط توجه کرده‌اند.

نکته

برای ساخت کم‌ترین محیط در یک مستطیل طول و عرض را باید نزدیک به هم انتخاب کنیم و برای ساخت بیش‌ترین محیط مستطیل باید اعدادی را انتخاب کنیم که فاصله آن‌ها از یکدیگر زیاد است.

۱۴ گزینه ۳»

حالت‌های ممکن را طبق جدول زیر با تعداد پاسخ غلط صفر شروع می‌کنیم و ادامه می‌دهیم:

| تعداد درست | تعداد غلط | نمره نهایی | جمع درست و نادرست |
|------------|-----------|------------------------|-------------------|
| ۱۲ | ۰ | $۱۲ \times ۱ = ۱۲$ | ۱۲ |
| ۱۳ | ۳ | $۱۳ \times ۱ - ۱ = ۱۲$ | ۱۶ |
| ۱۴ | ۶ | $۱۴ \times ۱ - ۲ = ۱۲$ | ۲۰ |
| ۱۵ | ۹ | $۱۵ \times ۱ - ۳ = ۱۲$ | ۲۴ |
| ۱۶ | ۱۲ | $۱۶ \times ۱ - ۴ = ۱۲$ | ۲۸ |

$$۳ \times ۳ = ۱۲$$

این نمره در ۳ حالت امکان‌پذیر است.

۴۱٪ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که به جدول نظام‌دار توجه کرده‌اند.

نکته

با توجه به اینکه هر ۳ پاسخ نادرست یک پاسخ صحیح را از بین می‌برد پس می‌توان رابطه نمره نهایی را به صورت (غلط - ۳ × درست) در نظر گرفت.

۱۵ گزینه ۲»

در هر مرحله، اعداد فرد به ترتیب به عدد قبلی اضافه می‌شود.

$$۰, ۳, ۸, ۱۵, ۲۴, ۳۵, ۴۸, ۶۳, ۸۰, ۹۹, ۱۲۰$$

جمله دهم برابر با ۹۹ و جمله نهم برابر با ۸۰ است.

$$۸۰ + ۹۹ = ۱۷۹$$

۴۰٪ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند. چرا که به این نکته که یک تاس عدد ۱ تا ۶ را می‌پذیرد و جابه‌جایی در ترتیب اعداد رو شده حالات جدید می‌سازد توجه کرده‌اند.

۱۱ گزینه ۴»

با توجه به خواسته مسئله مبنی بر حذف رقم ۷ در اعداد صدگان می‌تواند اعداد ۲,۳,۴,۵,۶ را (۵ حالت) دهگان و یکان اعداد صفر تا ۹ به جز ۷ یعنی هر کدام ۹ حالت می‌توانند اختیار کنند. حال با ضرب این حالات به عدد ۴۰۵ می‌رسیم اما چون برای صدگان رقم ۸ را در نظر نگرفتیم باید در انتها ۱ عدد ۸۰۰ را به تعداد اعداد اضافه کنیم.

$$۴۰۵ + ۱ = ۴۰۶$$

۴۷٪ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند. چرا که به حالت بندی ارقام در عدد و انتخاب ارقام براساس شرایط مسئله توجه کرده‌اند.

نکته

برای ساخت یک عدد می‌توانیم حالتی که برای هر رقم آن در جدول ارزش مکانی ممکن است را در نظر بگیریم و آن‌ها را در هم ضرب کنیم.

۱۲ گزینه ۳»

اعداد دو رقمی از ۱۰ تا ۹۹ یعنی ۹۰ عدد هستند که اگر اعدادی که ارقام آن‌ها متوالی هستند را کم کنیم پاسخ مسئله به دست می‌آید.

$$۱۰, ۱۲, ۲۳, ۳۴, ۴۵, ۵۶, ۶۷, ۷۸, ۸۹$$

$$۲۱, ۳۲, ۴۳, ۵۴, ۶۵, ۷۶, ۸۷, ۹۸$$

$$۹۰ - ۱۷ = ۷۳$$

۹۱٪ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند. چرا که به حذف حالات نامطلوب مسئله توجه کرده‌اند.

نکته

اصل متمم: اگر از کل حالات ممکن حالات نامطلوب را حذف کنیم حالات مطلوب به دست می‌آید. مثلاً اگر می‌خواهیم تعداد اعداد غیر اول بین اعداد ۱۰ تا ۶۵ را محاسبه کنیم، کافی است. تعداد اعداد اول از ۱۰ تا ۶۵ را از کل اعداد کم کنیم تا اعداد غیر اول به دست آیند.

۱۳ گزینه ۴»

مساحت مستطیل ۴۰ مترمربع است یعنی حاصلضرب طول و عرض آن برابر با عدد ۴۰ شده است. پس تمام حالت‌های ممکن برابر طول و عرض‌هایی را می‌نویسیم که حاصلضرب ۴۰ را بدهد. توجه داشته باشید که طول مستطیل همواره بزرگ‌تر از عرض آن است: