فصل اول: مجموعه‌ها

درخت دانش

با درخت دانش، گام به گام

پیشرفت خود را ارزیابی کنید.

گام اول: میزان تسلط خود را با رنگ مشخص کنید.
آبی: خیلی خوب
سبز: متوسط
زرد: به این قسمت مسلط نیستم.
گام‌های بعدی: اگر در گام اول، به آن مبحث مسلط نبودید و دانش خود را در حد رنگ زرد ارزیابی کردید، در نوبت‌های بعدی مطالعه و تمرین، در صورتی که پیشرفت کردید می‌توانید خانه‌های سبز یا آبی را رنگ کنید.

مجموعه‌ها

- **معرفی مجموعه** (آبی / سبز / زرد)
  - مفهوم مجموعه
  - نمایش عضوهای یک مجموعه
- **مجموعه‌های برابر و نمایش مجموعه‌ها** (آبی / سبز / زرد)
  - دو مجموعه‌ی برابر
  - زیر مجموعه
  - نمایش مجموعه‌های اعداد
- **اجتماع، اشتراک و تفاضل مجموعه‌ها** (آبی / سبز / زرد)
  - اجتماع دو مجموعه
  - اشتراک دو مجموعه
  - تفاضل دو مجموعه
- **مجموعه‌ها و احتمال** (آبی / سبز / زرد)
  - محاسبه‌ی احتمال وقوع پیشامد

تعداد مثال‌های فصل
۵۰
تعداد سؤال‌های تستی
۱۷
تعداد سؤالات تشریحی
۳۳

فصل اول

مجموعه‌ها

معرفی مجموعه

مفهوم مجموعه

در بین اعداد زیر، اعداد زوج را در نظر بگیرید:

$۲,۵,۷,۳۹,۵۶,۱۴,۱۰۱$

این اعداد را داخل آکولاد قرار می‌دهیم و آن را با حرف A نامگذاری می‌کنیم.

$A=\{۲,۵۶,۱۴\}$

در این صورت مجموعه‌ای به نام A تشکیل داده‌ایم. هر یک از اعداد ۲، ۵۶ و ۱۴ اعضای مجموعه‌ی A هستند. بنابراین A مجموعه‌ای ۳ عضوی است.

برای نام‌گذاری مجموعه‌ها اغلب از حروف انگلیسی بزرگ استفاده می‌کنیم.

نکته: در واقع هر مجموعه دسته‌ای از اشیا (یا اعداد یا حروف) مشخص و متمایز (غیرتکراری) است.

▼**مثال ۱)** **مجموعه‌ی B شامل اعداد اول زوج را بنویسید. این مجموعه چند عضو دارد؟** (کتاب درسی، مشابه فعالیت ۳، صفحه‌ی ۳)

☑**پاسخ:**

مجموعه‌ی B تنها یک عضو دارد. $B=\{۲\}\Rightarrow$

نکته: عدد ۲ تنها عدد زوج اول است.

معلمی در کلاس به دانش‌آموزان می‌گوید مجموعه‌ای شامل ۳ عدد طبیعی را بنویسید. دانش‌آموز اول مجموعه‌ی $A_1=\{۲,۷,۹\}$ و دانش‌آموز دوم مجموعه‌ی $A_2=\{۱۰,۵,۱۴\}$ را نوشتند. جواب‌ها با هم متفاوت است اما هر دو پاسخ صحیح هستند. عبارتی که معلم گفته بود، مشخص‌کننده‌ی مجموعه‌ی یکتا و مشخصی نبود.

عبارت‌هایی که مشخص کننده‌ی یک مجموعه‌ی معین و یکتا نباشند، مجموعه‌ای را مشخص نمی‌کنند.

اگر در مجموعه‌ای عضو تکراری داشته باشیم، این عضو فقط یکبار شمارش می‌شود.

همچنین ترتیب نوشتن اعضا در مجموعه‌ها مهم نیست. به عنوان مثال دو مجموعه‌ی $P=\{۱,۹,۱۲\}$ و $S=\{۹,۱۲,۱\}$ با هم برابرند.

▼ **مثال ۲) تعداد اعضای دو مجموعه‌ی $M=\{۵,۶,۵,۷\}$ و $N=\{۵,۶,۷\}$ را بنویسید.** (کتاب درسی، مکمل و مرتبط با فعالیت ۲، صفحه‌ی ۳)

☑ **پاسخ:** *در مجموعه‌ی M، عدد ۵ دو بار تکرار شده است اما در شمارش تعداد اعضا، تنها عضوهای متمایز مورد شمارش قرار می‌گیرد. پس هر دو مجموعه سه عضو دارد.*

▼ **مثال ۳) کدام یک از مجموعه‌های زیر مشخص کننده‌ی یک مجموعه نیست؟** (کتاب درسی، مکمل و مرتبط با تمرین ۵، صفحه‌ی ۵)

۱) اعداد اول یک رقمی
۲) سه مضرب مثبت عدد ۱۲
۳) هشت مقسوم علیه مثبت عدد ۲۴
۴) اعداد طبیعی فرد کوچکتر از ۱۴

☑ **پاسخ:** *مجموعه‌ی اعداد اول یک رقمی عبارتند از:* $\{۲,۳,۵,۷\}$ *: گزینه‌ی «۱»*

هشت مقسوم علیه مثبت عدد ۲۴ $\{۱,۲,۳,۴,۶,۸,۱۲,۲۴\}$ *: گزینه‌ی «۳»*

اعداد طبیعی فرد کوچکتر از ۱۴ $\{۱,۳,۵,۷,۹,۱۱,۱۳\}$ *: گزینه‌ی «۴»*

ولی مضارب عدد ۱۲ عبارتند از:

$۱۲,۲۴,۳۶,۴۸,۶۰,...$

وقتی می‌گوید «سه مضرب عدد ۱۲»، در واقع می‌توان بین مضارب عدد ۱۲، سه عدد به دلخواه انتخاب شود و در مجموعه قرار داده شود، به عنوان مثال مجموعه‌های $\{۱۲,۲۴,۶۰\}$ و ...,$\{۴۸,۶۰,۱۲۰\}$ را می‌توان مشخص کرد. بنابراین عبارت فوق مجموعه‌ی مشخصی را معلوم نمی‌کند، پس گزینه‌ی ۲ صحیح می‌باشد.

نمایش عضوهای یک مجموعه

مجموعه‌ی اعداد اول یک رقمی را در نظر بگیرید و آن را C بنامید:

$C=\{۲,۳,۵,۷\}$

برای نشان دادن اینکه عدد ۲ عضو مجموعه‌ی C است، می‌نویسیم $۲\in C$ و می‌خوانیم: «عدد ۲ عضو C است.» اما عدد ۹ عضو مجموعه‌ی C نیست، بنابراین می‌نویسیم $۹\notin C$ و می‌خوانیم «عدد ۹ عضو C نیست.»

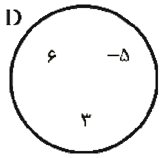
نمایش مجموعه‌ها با استفاده از نمودار ون

در بعضی از موارد، عضوهای یک مجموعه را به کمک منحنی‌های بسته نمایش می‌دهیم که به آن نمایش مجموعه‌ها با استفاده از «نمودار ون» می‌گوییم.

▼**مثال ۴)** مجموعه‌ی $D=\{۶,-۵,۳\}$ را به کمک نمودار ون نمایش دهید.

(کتاب درسی، مرتبط و مکمل با فعالیت ۱، صفحه‌ی ۳)

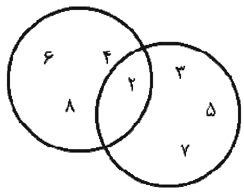
☑**پاسخ:**



▼**مثال ۵)** دو مجموعه‌ی اعداد زوج طبیعی یک رقمی و اعداد اول یک رقمی را به کمک یک نمودار ون نمایش دهید.

(کتاب درسی، مرتبط و مکمل فعالیت ۱، صفحه‌ی ۳)

☑**پاسخ:** عدد ۲، عددی اول و زوج است، بنابراین در هر دو مجموعه‌ی فوق مشترک است و بنابراین در هر دو منحنی بسته قرار می‌گیرد و به صورت مقابل نمایش داده می‌شود.



نکته: اگر در مجموعه‌ای عضوی وجود نداشته باشد، این مجموعه را به صورت قراردادی با نماد ϕ یا $\{\ \}$ نمایش می‌دهند و به آن مجموعه‌ی تهی می‌گویند.

$$\phi=\{\ \}$$

توجه داشته باشید $\{\phi\}\neq\phi$. چون مجموعه‌ی $\{\phi\}$ یک عضو دارد و آن نماد ϕ است. اما مجموعه‌ی ϕ (تهی) عضوی ندارد.

▼**مثال ۶)** کدام یک از مجموعه‌های زیر تهی است؟

(کتاب درسی، مکمل و مرتبط با مثال ۴، صفحه‌ی ۴)

۱) عددهای صحیح و زوج منفی
۲) اعداد حسابی کوچکتر از یک
۳) عددهای اول و زوج دورقمی
۴) عددهای صحیح بین ۱ و ۱-

☑**پاسخ:** اعضای همه گزینه‌ها را می‌نویسیم:

$\{-۲,-۴,-۶,-۸,...\}=$ عددهای صحیح و زوج منفی : گزینه‌ی «۱»

$\{۰\}=$ عددهای حسابی کوچکتر از یک : گزینه‌ی «۲»

$\{\ \}=$ عددهای اول و زوج دو رقمی : گزینه‌ی «۳»

این مجموعه عضوی ندارد چون تنها عدد اول زوج عدد ۲ است. باقی اعداد زوج چون بر ۲ بخش‌پذیرند، اول نیستند.

$\{۰\}=$ عددهای صحیح بین ۱ و ۱- : گزینه‌ی «۴»

پس گزینه‌ی ۳ صحیح می‌باشد.

▼**مثال ۷)** مجموعه‌های زیر هر کدام چند عضو دارند؟

(کتاب درسی، مکمل و مرتبط با تمرین ۱، صفحه‌ی ۵)

$$A=\{\{۱,۲\},۲,۱,\{۱\}\}$$

$$B=\{\phi,\{\ \},۳\}$$

☑**پاسخ:** مجموعه‌ی A، ۴ عضو دارد که اعضای آن عبارتند از: $\{۱\},۱,۲,\{۱,۲\}$. توجه کنید که $\{۱\}$ و $\{۱,۲\}$ هر کدام یک عضو متمایز از این مجموعه هستند.

مجموعه‌ی B دارای دو عضو است چرا که $\{\ \}=\phi$. چون اعضای تکراری یکبار شمارش می‌شوند، پس مجموعه‌ی B شامل اعضای ۳ و ϕ است.

▼مثال ۸) مجموعه‌ی $A=\{\{۱,۲\},۱,\{۱\}\}$ را در نظر بگیرید. عبارات صحیح و غلط را مشخص کنید. (کتاب درسی، مکمل و مرتبط با تمرین ۲، صفحه‌ی ۵)

الف) $\{۱,۲\}\in A$ ، ب) $\{۱\}\notin A$ ، پ) $\phi\in A$

☑**پاسخ:** *الف) $\{۱,۲\}\in A$: این عبارت صحیح است، چون $\{۱,۲\}$ یک عضو از مجموعه‌ی A است.*

ب) $\{۱\}\notin A$: این عبارت صحیح نیست چون $\{۱\}$ یک عضو مجموعه A است.

پ) $\phi\in A$: این عبارت صحیح نیست چون نماد ϕ در مجموعه‌ی A وجود ندارد.

مجموعه‌های برابر و نمایش مجموعه‌ها

دو مجموعه‌ی برابر

مجموعه‌ی اعداد اول فرد را F و مجموعه‌ی اعداد فرد بین ۲ و ۸ را نیز G می‌نامیم. داریم:

$F=\{۳,۵,۷\}$

$G=\{۳,۵,۷\}$

هر عضو مجموعه‌ی F، عضوی از مجموعه‌ی G و هر عضو مجموعه‌ی G عضوی از مجموعه‌ی F است. در واقع عضوهای مجموعه‌ی F و G یکسان‌اند. بنابراین دو مجموعه‌ی F و G برابرند و می‌نویسیم:

$F=G$

اگر عضوی در مجموعه‌ی A داشته باشیم که در مجموعه‌ی B نباشد، $A\neq B$ است و برعکس، اگر عضوی در مجموعه‌ی B داشته باشیم که در A نباشد، $B\neq A$ است.

▼مثال ۹) اگر دو مجموعه‌ی A و B برابر باشند، $\frac{a}{b}$ کدام است؟ (کتاب درسی، مکمل و مرتبط با کار در کلاس ۱، صفحه‌ی ۶)

$$A=\left\{۳,-\frac{\sqrt{۱۴۴}}{(-۲)^۲},b\right\}$$

$$B=\left\{a,\sqrt{۹},(-۲)^۳\right\}$$

☑**پاسخ:** *چون دو مجموعه‌ی A و B با یکدیگر برابرند، تمام اعضای مجموعه‌ی A باید در مجموعه‌ی B و تمام اعضای مجموعه‌ی B نیز باید در مجموعه‌ی A وجود داشته باشد. بنابراین:*

$$\begin{cases}\sqrt{۹}=۳\\ -\frac{\sqrt{۱۴۴}}{(-۲)^۲}=-\frac{۱۲}{۴}=-۳=a\\ (-۲)^۳=(-۲)\times(-۲)\times(-۲)=-۸=b\end{cases}\Rightarrow\frac{a}{b}=\frac{-۳}{-۸}=\frac{۳}{۸}$$

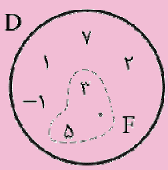
بدیهی است که در دو مجموعه‌ی برابر، تعداد اعضا یکسان است.

زیر مجموعه

با توجه به نمودار ون زیر، دو مجموعه‌ی D و F را در نظر بگیرید.

$D=\{-۱,۱,۰,۳,۵,۲,۷\}$

$F=\{۰,۳,۵\}$



همان‌طور که از روی نمودار ون و از روی مجموعه‌ها قابل مشاهده است، تمام اعضای مجموعه‌ی F در مجموعه‌ی D نیز وجود دارد. در این صورت می‌گوییم مجموعه‌ی F زیرمجموعه‌ی مجموعه‌ی D است. این عبارت را با $F \subseteq D$ نمایش می‌دهند.به عبارت دیگر هر عضوی از مجموعه‌ی F را که در نظر بگیرید، عضوی از مجموعه‌ی D نیز می‌باشد. ولی لزومی ندارد که همه‌ی اعضای D در F نیز وجود داشته باشند.

هر مجموعه، زیرمجموعه‌ی خودش است، زیرا هر عضو مجموعه‌ی دلخواه A در خودش حضور دارد، بنابراین می‌نویسیم $A \subseteq A$ است.

اگر بتوانیم عضوی در مجموعه‌ی F بیابیم که در مجموعه‌ی G وجود نداشته باشد می‌گوییم F زیرمجموعه‌ی G نیست و می‌نویسیم:
$F \not\subseteq G$

نکته: مجموعه‌ی تهی، زیرمجموعه‌ی همه‌ی مجموعه‌هاست. یعنی برای مجموعه‌ی دلخواه B داریم:

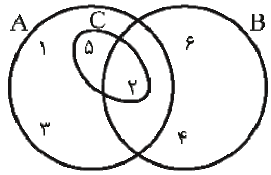
$\phi \subseteq B$

▼مثال ۱۰) اگر مجموعه‌ی $A=\{a,b,c\}$ باشد، آنگاه درستی و نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.
(کتاب درسی، مکمل و مرتبط با کار در کلاس ۲، صفحه‌ی ۸)

۱) $\{a,b,c,a\} \subseteq A$
۲) $\{c,a,b\} \subseteq A$
۳) $\{\ \} \subseteq A$
۴) $\{a,b,c\} \subseteq A$
۵) $\{a,b\} \in A$
۶) $\{\ \} \in A$
۷) $\{a,b,d\} \not\subseteq A$

☑پاسخ: ۱) درست است. در مجموعه‌ی اول a دو بار نوشته شده است، بنابراین اعضای تکراری یک بار شمارش می‌شوند و هر دو مجموعه برابرند.
۲) درست است. جابه‌جایی در مجموعه‌ها اهمیتی ندارد.
۳) درست است. تهی زیرمجموعه‌ی همه‌ی مجموعه‌هاست.
۴) درست است. هر مجموعه زیرمجموعه‌ی خودش است.
۵) نادرست است. مجموعه‌ی $\{a,b\}$ زیرمجموعه‌ی مجموعه‌ی A است امّا عضو آن نیست.
۶) نادرست است. تهی زیرمجموعه‌ی همه‌ی مجموعه‌هاست امّا عضو آنها نیست.
۷) درست است. در مجموعه‌ی سمت چپ عضو d وجود دارد که در مجموعه‌ی سمت راست نیست بنابراین مجموعه‌ی سمت چپ زیرمجموعه‌ی مجموعه‌ی سمت راست نیست.

▼مثال ۱۱) با توجه به نمودار زیر، درستی و نادرستی عبارات را مشخص کنید.
(کتاب درسی، مکمل و مرتبط با کار در کلاس ۱، صفحه‌ی ۸)



۱) $C \subseteq A$
۲) $C \subseteq B$
۳) $\phi \subseteq C$
۴) $B \subseteq A$

پاسخ: ۱) درست است. اعداد ۲ و ۵ که اعضای مجموعه‌ی C هستند در مجموعه‌ی A نیز وجود دارند.

۲) نادرست است. عدد ۵ در مجموعه‌ی C وجود دارد امّا در مجموعه‌ی B وجود ندارد.

۳) درست است. تهی زیرمجموعه‌ی هر مجموعه‌ای است.

۴) نادرست است. اعداد ۴، ۶ عضو مجموعه‌ی B هستند امّا عضو مجموعه‌ی A نیستند.

مثال ۱۲) تمام زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی B از مثال بالا را بنویسید. (کتاب درسی، مکمل و مرتبط با کار در کلاس ۳، صفحه‌ی ۸)

پاسخ: با توجه به مجموعه‌ی $B=\{۲,۴,۶\}$:

زیرمجموعه‌ی صفر عضوی: $\{\ \}$

زیرمجموعه‌های یک عضوی: $\{۲\},\{۴\},\{۶\}$

زیرمجموعه‌های دو عضوی: $\{۲,۴\},\{۲,۶\},\{۴,۶\}$

زیرمجموعه‌ی سه عضوی: $\{۲,۴,۶\}$

بنابراین مجموعه‌ی B دارای ۸ زیرمجموعه است.

نکته: هر مجموعه‌ی n عضوی، ۲^n زیرمجموعه دارد.

به عنوان مثال اگر مجموعه‌ای دارای ۵ عضو باشد، تعداد زیرمجموعه‌های آن برابر $۲^۵$ می‌باشد، یعنی دارای ۳۲ زیرمجموعه است. همچنین با توجه به تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه می‌توان تعداد اعضای آن را مشخص نمود. به طور مثال اگر مجموعه‌ای دارای ۶۴ زیرمجموعه باشد، با توجه به تجزیه‌ی عدد ۶۴ به عوامل اول و نوشتن آن به صورت عدد توان‌دار $(۶۴=۲^۶)$ تعداد عضوهای مجموعه برابر ۶ عضو است.

$$۲^n=۶۴\Rightarrow ۲^n=۲^۶\Rightarrow n=۶$$

مثال ۱۳) یک مجموعه دارای $۱۶^۷$ زیرمجموعه است. این مجموعه دارای چند عضو است؟ (کتاب درسی، مکمل و مرتبط با فعالیت، صفحه‌های ۷ و ۸)

۱) ۷ ۲) ۱٤ ۳) ۲۸ ٤) ۱۶

پاسخ: کافی است پایه‌ی عدد $۱۶^۷$ را به ۲ تبدیل کنیم یعنی:

$$۱۶^۷=(۲^۴)^۷=۲^{۲۸}\Rightarrow ۲^n=۲^{۲۸}\Rightarrow n=۲۸$$

گزینه‌ی ۳ درست می‌باشد.

نمایش مجموعه‌های اعداد

۱- مجموعه‌ی عددهای طبیعی:

مجموعه‌ی اعداد طبیعی که معمولاً با حرف $\mathbb{N}$ نمایش داده می‌شود، با عدد ۱ آغاز می‌گردد. مجموعه‌ی اعداد طبیعی به صورت زیر است:

$$\mathbb{N}=\{۱,۲,۳,۴,...\}$$

این مجموعه بزرگترین عضو ندارد.

بعضی از زیرمجموعه‌های مهم مجموعه‌ی اعداد طبیعی عبارتند از:

الف) مجموعه‌ی اعداد طبیعی زوج

مجموعه‌ی اعداد طبیعی زوج که معمولاً با حرف E نمایش داده می‌شود، با عدد ۲ آغاز می‌گردد و همگی مضرب ۲ هستند. این مجموعه بزرگ‌ترین عضو ندارد و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$E=\{2k|k\in\mathbb{N}\}=\{2,4,6,8,...\}$$

ب) مجموعه‌ی اعداد طبیعی فرد

مجموعه‌ی اعداد طبیعی فرد که معمولاً با حرف O نمایش داده می‌شود، با عدد ۱ آغاز شده و بزرگ‌ترین عضو ندارد و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$O=\{2k-1|k\in\mathbb{N}\}=\{1,3,5,7,...\}$$

۲- مجموعه‌ی اعداد صحیح:

مجموعه‌ی اعداد صحیح که معمولاً با حرف $\mathbb{Z}$ نمایش داده می‌شود، مجموعه‌ای شامل اعداد طبیعی، قرینه‌ی اعداد طبیعی و عدد صفر است.

$$\mathbb{Z}=\{...,-2,-1,0,1,2,...\}$$

۳- مجموعه‌ی اعداد حسابی:

مجموعه‌ی اعداد حسابی که معمولاً با حرف W یا I نمایش داده می‌شود، مجموعه‌ای شامل مجموعه‌ی اعداد طبیعی و عدد صفر است.

$$W=\{0,1,2,3,4,...\}$$

۴- مجموعه‌ی اعداد گویا:

مجموعه‌ی عددهای گویا را با حرف Q نمایش می‌دهیم. چون بین هر دو عدد گویا، بیشمار عدد گویا وجود دارد و نمی‌توانیم عدد گویایی بعد یک عدد گویا را مشخص کنیم، نمی‌توان این مجموعه را با عضوها مشخص کرد. به همین دلیل مجموعه‌ی عددهای گویا را با نمادهای ریاضی نمایش می‌دهیم:

$$Q=\left\{\frac{a}{b}\middle|a,b\in\mathbb{Z},b\neq 0\right\}$$

توجه: هر عدد صحیحی را می‌توان به صورت یک عدد گویا نمایش داد.

▼ **مثال ۱۴)** **اعضای مجموعه‌های زیر را بنویسید.** (کتاب درسی، مشابه و مرتبط با تمرین ۳، صفحه‌ی ۱۰)

$$A=\{x|x\in\mathbb{Z},-4\le x<3\}$$

$$B=\{2x+1|x\in W,-2\le x<5\}$$

☑ **پاسخ:**

$$A=\{-4,-3,-2,-1,0,1,2\}$$

مجموعه‌ی W با عدد صفر آغاز می‌شود بنابراین (۲-) و (۱-) را نمی‌توان به جای x قرار داد. پس برای مجموعه‌ی B داریم:

$$x=0\Rightarrow 2x+1=1$$

$$x=1\Rightarrow 2x+1=3$$

$$x=2\Rightarrow 2x+1=5$$

$$x=3\Rightarrow 2x+1=7$$

$$x=4\Rightarrow 2x+1=9$$

$$\Rightarrow B=\{1,3,5,7,9\}$$

▼مثال ۱۵) درستی و نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید. (کتاب درسی، مشابه و مکمل مثال ۵، صفحه‌ی ۱۰)

۱) مجموعه‌ی اعداد حسابی زیرمجموعه‌ی مجموعه‌ی اعداد صحیح است.

۲) هر عدد حسابی عددی گویا است.

۳) همه‌ی عددهای گویا، عددی صحیح هستند.

٤) مجموعه‌ی اعداد صحیح زیرمجموعه‌ی اعداد طبیعی است.

☑پاسخ: ۱) *درست است. زیرا مجموعه‌ی اعداد حسابی شامل اعداد طبیعی و صفر است و مجموعه‌ی اعداد صحیح شامل مجموعه‌ی اعداد طبیعی، صفر و قرینه‌ی مجموعه‌ی اعداد طبیعی است.*

$$\begin{cases} W=\{۰,۱,۲,\ldots\} \\ \mathbb{Z}=\{\ldots,-۲,-۱,۰,۱,۲,\ldots\} \end{cases} \Rightarrow W\subseteq \mathbb{Z}$$

با توجه به اینکه تمام اعضای مجموعه‌ی W عضوی از مجموعه‌ی $\mathbb{Z}$ نیز هست، پس عبارت صحیح است.

۲) *درست است. زیرا تمام اعداد حسابی را می‌توان به صورت کسری نوشت که صورت و مخرج آن عددی صحیح و مخرج مخالف صفر باشد. بنابراین هر عدد حسابی عددی گویا است.*

۳) *نادرست است. زیرا اعداد گویا مانند $\frac{۴}{۲}$ برابر ۲ هستند که عددی صحیح است، یعنی $\frac{۴}{۲}\in\mathbb{Z}$ اما عددی مثل $\frac{۳}{۲}$ گویا است امّا صحیح نیست.*

۴) *نادرست است. زیرا عددی مثل (۵-) عددی صحیح است امّا طبیعی نیست.*

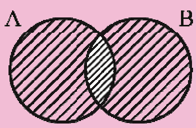
اجتماع، اشتراک و تفاضل مجموعه‌ها

اجتماع دو مجموعه

اجتماع دو مجموعه‌ی A و B، مجموعه‌ای است که شامل همه‌ی عضوهایی است که حداقل در یکی از دو مجموعه‌ی A و B باشد.

این مجموعه را با نماد ریاضی به صورت $A\cup B$ نمایش می‌دهند.

در نمودار ون مقابل، قسمت هاشورخورده، $A\cup B$ را نمایش می‌دهد.



▼مثال ۱۶) اگر $A=\{۲,۴,۶,۸\}$ و $B=\{۵,۶,۲\}$ باشند، آنگاه $A\cup B$ را به دست آورید. (کتاب درسی، مکمل و مرتبط با مثال، صفحه‌ی ۱۲)

☑پاسخ:

$$A\cup B=\{۲,۴,۵,۶,۸\}$$

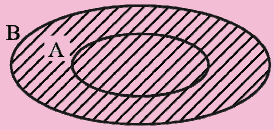
همان‌طور که ملاحظه می‌کنید هر عضو مجموعه‌ی $(A\cup B)$ یا عضوی از A است یا عضوی از B است یا هر دو.

▼مثال ۱۷) اگر $A=\{۳,۵,۷,۹,۱۱\}$ و $B=\{۸,۹,۱۰,۱۱\}$ باشند، آنگاه اعضای مجموعه‌ی $A\cup B$ را بنویسید.
(کتاب درسی، مکمل و مرتبط با مثال، صفحه‌ی ۱۲)

☑پاسخ:

$$A\cup B=\{۳,۵,۷,۸,۹,۱۰,۱۱\}$$

نکته: اگر $A \subseteq B$ باشد، آنگاه اجتماع دو مجموعه‌ی A و B برابر B است که نمودار ون آن به صورت زیر است.



$$A \subseteq B \Rightarrow A \cup B = B$$

▼ **مثال ۱۸)** اگر $H = \{۱,۲,۳,۴\}$ و $S = \{۱,۳\}$ باشد، $H \cup S$ را بدست آورید. (کتاب درسی، مکمل و مرتبط با کار در کلاس، صفحه‌ی ۱۳)

☑ **پاسخ:**

$$S \subseteq H \Rightarrow H \cup S = H = \{۱,۲,۳,۴\}$$

خواص اجتماع دو مجموعه

۱) $A \cup \phi = A$

۲) $A \cup A = A$

۳) $A \cup M = M$ (مجموعه‌ی مرجع است M)

۴) $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B$

۵) $A \subseteq (A \cup B)\ ,\ B \subseteq (A \cup B)$

۶) $A \cup B = B \cup A$

۷) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

▼ **مثال ۱۹)** کدام یک از گزینه‌های زیر نادرست است؟ (کتاب درسی، مکمل و مرتبط با تمرین ۱، صفحه‌ی ۱۴)

۱) $A \subseteq B \Rightarrow A \cup B \subseteq A$

۲) $A \subseteq B \Rightarrow A \cup B = B$

۳) $A \subseteq (A \cup B)$

۴) $A \cup \phi = A$

☑ **پاسخ:** *گزینه‌ی (۲) و (۳) و (۴) از خواص مجموعه‌ها است و همواره برقرار است. اما در مورد گزینه‌ی (۱) داریم:*

$$A \subseteq B \Rightarrow A \cup B = B$$

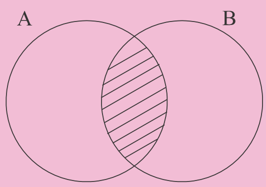
$A \cup B \subseteq A \Rightarrow B \subseteq A$ *لزوماً برقرار نیست.*

پس گزینه‌ی ۱ صحیح است.

اشتراک دو مجموعه

اشتراک دو مجموعه‌ی A و B، مجموعه‌ای است که عضوهای آن شامل همه‌ی عضوهای مشترک بین دو مجموعه‌ی A و B است که آن را با نماد ریاضی به صورت $A \cap B$ نمایش می‌دهیم.

(در نمودار مقابل، قسمت هاشورخورده، $A \cap B$ را نمایش می‌دهد.)



▼**مثال ۲۰)** **اگر** $A=\{۲,۴,۶,۸\}$ **و** $B=\{۲,۵,۶\}$ **باشد، آنگاه** $A\bigcap B$ **را بدست آورید.** (کتاب درسی، مکمل و مرتبط با مثال، صفحه‌ی ۱۲)

☑**پاسخ:**

$A\bigcap B=\{۲,۶\}$

همانطور که ملاحظه می‌کنید هر عضو مجموعه‌ی $(A\bigcap B)$ هم عضو مجموعه‌ی A است و هم عضو مجموعه‌ی B.

▼**مثال ۲۱)** **اگر** $C=\{-۳,۷,-۱۷,۲۷\}$ **و** $D=\{۷,۱۷,۲۷,۳۷\}$ **باشد، آنگاه مجموعه‌ی** $C\bigcap D$ **را مشخص کنید.**
(کتاب درسی، مکمل و مرتبط با مثال، صفحه‌ی ۱۲)

☑**پاسخ:**

$C\bigcap D=\{۷,۲۷\}$

▼**مثال ۲۲)** **اگر** $A=\{۳,۵,۷,۹,۱۱\}$ **و** $B=\{۲,۴,۶,۸,...\}$ **باشد، آنگاه مجموعه‌ی** $A\bigcap B$ **را مشخص کنید.**
(کتاب درسی، مکمل و مرتبط با مثال، صفحه‌ی ۱۲)

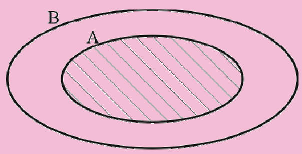
☑**پاسخ:**

$A\bigcap B=\{\ \}=\phi$

مجموعه‌ی A شامل تعدادی عدد فرد و مجموعه‌ی B شامل اعداد زوج طبیعی است و عضو مشترکی ندارند.

نکته: اگر $A\subseteq B$ **باشد، آنگاه اشتراک A و B برابر A است که نمودار ون آن به صورت زیر است:**

$$A\subseteq B\Leftrightarrow A\bigcap B=A$$



▼**مثال ۲۳)** **اگر** $H=\{۱,۲,۳,۴\}$ **و** $S=\{۱,۳\}$ **باشند، آنگاه** $A\bigcap B$ **را مشخص کنید.** (کتاب درسی، مکمل و مرتبط با کار در کلاس، صفحه‌ی ۱۳)

☑**پاسخ:**

$S\subseteq H\Rightarrow H\bigcap S=S=\{۱,۳\}$

خواص اشتراک دو مجموعه

۱) $A\bigcap\phi=\phi$
۲) $A\bigcap A=A$
۳) $A\bigcap M=A$ (M مجموعه‌ی مرجع است)
۴) $A\subseteq B\Leftrightarrow A\bigcap B=A$
۵) $(A\bigcap B)\subseteq A\ ,\ (A\bigcap B)\subseteq B$
۶) $A\bigcap B=B\bigcap A$
۷) $A\bigcap(B\bigcap C)=(A\bigcap B)\bigcap C$

▼**مثال ۲۴)** **کدام گزینه نادرست است؟** (کتاب درسی، مکمل و مرتبط با تمرین ۱، صفحه‌ی ۱۴)

۱) $A \subseteq B \Rightarrow A \cap B \neq \phi$　　۲) $A \cup (A \cap B) = A$

۳) $A \cap (A \cup B) = A$　　۴) $A \subseteq B \Rightarrow A \cap B = A$

☑**پاسخ:** *گزینه‌ی (۴) از خواص اشتراک است. گزینه‌ی (۲) و (۳) را اثبات می‌کنیم.*

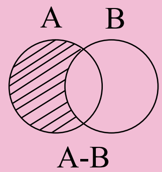
$$(A \cap B) \subseteq A \Rightarrow A \cup (A \cap B) = A$$

$$A \subseteq (A \cup B) \Rightarrow A \cap (A \cup B) = A$$

گزینه‌ی (۱) همواره صحیح نیست. زیرا اگر $A = \phi$ باشد، $A \cap B = \phi$ می‌شود.

تفاضل دو مجموعه

مجموعه‌ی $A - B$ (A منهای B) مجموعه‌ای است که متشکل است از تمام اعضای A که عضو مجموعه‌ی B نباشند. این مجموعه را به صورت زیر نمایش می‌دهند:



$$A - B = \{x | x \in A, x \notin B\}$$

▼**مثال ۲۵)** **اگر** $A = \{۲,۴,۶,۸\}$ **و** $B = \{۲,۳,۵,۷\}$ **و** $C = \{۷\}$ **باشند، آنگاه مجموعه‌ی** $C - B$ **و** $A - B$ **را مشخص کنید.**

(کتاب درسی، مکمل و مرتبط با تمرین ۱، صفحه‌ی ۱۴)

☑**پاسخ:**

$$A - B = \{۴,۶,۸\}$$
$$C - B = \{\ \}$$

نکته: اگر مجموعه‌ای مانند مجموعه‌ی $A = \{۱,۲,...,۱۰\}$ شامل ۱۰ عضو باشد، تعداد اعضای این مجموعه را به صورت $n(A) = ۱۰$ نمایش می‌دهند. اگر S مجموعه‌ای k عضوی باشد آنگاه می‌نویسیم: $n(S) = k$.

مجموعه‌ها و احتمال

محاسبه‌ی احتمال وقوع پیشامد

در سال گذشته آموختید که اگر احتمال وقوع پیشامد A را بخواهیم محاسبه کنیم، نسبت تعداد حالت‌های مطلوب به تعداد کل حالت‌های ممکن را محاسبه می‌کنیم.

$$\text{احتمال رخ دادن یک پیشامد} = \frac{\text{تعداد حالت‌های مطلوب}}{\text{تعداد همه‌ی حالت‌های ممکن}}$$

مجموعه‌ی شامل همه‌ی حالت‌های ممکن را با S و تعداد اعضای این مجموعه را با n(S) نمایش می‌دهیم. مجموعه‌ی شامل همه‌ی حالت‌های مطلوب را با A و تعداد اعضای آن را با n(A) نمایش می‌دهیم.

بنابراین احتمال وقوع پیشامد A عبارت است از:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}$$

▼**مثال ۲۶) اگر سکه‌ی سالمی را بیندازیم، احتمال اینکه "رو" ظاهر شود، کدام است؟** (کتاب درسی، مکمل و مرتبط با تمرین ۱، صفحه‌ی ۱۷)

☑**پاسخ:** سکه دو حالت کلی "رو" و "پشت" دارد.

$$S=\{\text{رو}\,،\text{پشت}\}\Rightarrow n(S)=۲$$

$$A=\{\text{رو}\}\Rightarrow n(A)=۱$$

$$\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۱}{۲}$$

▼**مثال ۲۷) دو تاس را همزمان پرتاب می‌کنیم. احتمال اینکه مجموع اعداد رو شده در تاس‌ها ۵ شود، کدام است؟**
(کتاب درسی، مکمل و مرتبط با مثال، صفحه‌ی ۱۵)

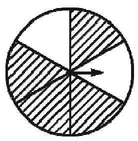
☑**پاسخ:** هر تاس ۶ حالت دارد، بنابراین اگر اعداد ظاهر شده روی تاس را به صورت (تاس دوم، تاس اول) نمایش دهیم، داریم:

$$S=\{(۱,۱),(۱,۲),(۱,۳),...,(۶,۶)\}\Rightarrow n(S)=۳۶$$

$$A=\{(۲,۳),(۳,۲),(۱,۴),(۴,۱)\}\Rightarrow n(A)=۴$$

$$\Rightarrow P(A)=\frac{۴}{۳۶}=\frac{۱}{۹}$$

▼**مثال ۲۸) با توجه به چرخنده‌ی شکل زیر که به ۶ قسمت مساوی تقسیم شده است، احتمال اینکه چرخنده در اولین حرکت روی خانه‌ای خاکستری بایستد، چقدر است؟** (کتاب درسی، مکمل و مرتبط با فعالیت، صفحه‌ی ۱۶)



☑**پاسخ:** در این چرخنده ۶ خانه با قسمت‌های مساوی می‌بینیم. بنابراین $n(S)=۶$

در بین این خانه‌ها ۴ خانه‌ی خاکستری وجود دارد، بنابراین $n(A)=۴$

$$\Rightarrow P(A)=\frac{۴}{۶}=\frac{۲}{۳}$$

▼**مثال ۲۹) در کیسه‌ای ۱۰ توپ داریم. از بین این توپ‌ها ۲ توپ قرمز، ۳ توپ آبی، ۵ توپ سبز هستند. چقدر احتمال دارد اولین توپی که بیرون می‌آوریم، قرمز یا آبی باشد؟** (کتاب درسی، مکمل و مرتبط با کار در کلاس، صفحه‌ی ۱۶)

☑**پاسخ:**

$$\begin{cases}n(S)=۱۰\\ n(A)=۲+۳=۵\end{cases}\qquad\Rightarrow P(A)=\frac{۵}{۱۰}=\frac{۱}{۲}$$

▼**مثال ۳۰) ۷ بار سکه‌ای سالم را انداخته‌ایم. ۳ بار "رو" و ٤ بار "پشت" ظاهر شده است. بار هشتم سکه را پرتاب می‌کنیم، چقدر احتمال دارد "رو" ظاهر شود؟** (کتاب درسی، مکمل و مرتبط با تمرین ۴، صفحه‌ی ۱۷)

۱) ۱ ۲) $\frac{۳}{۸}$ ۳) $\frac{۴}{۷}$ ٤) $\frac{۱}{۲}$

☑**پاسخ:** چون سکه سالم است، در هر بار پرتاب آن، احتمال "رو" یا "پشت" ظاهر شدن برابر است و مستقل از اتفاقات گذشته است پس احتمال رو آمدن در پرتاب هشتم برابر $\frac{۱}{۲}$ است.

گزینه‌ی ۴ صحیح است.

آزمون تیزهوشان

۱- می‌دانیم $۰<c<a<b<d$ است. مجموعه‌های D، E و F را به صورت زیر تعریف می‌کنیم. k کدام باشد تا مطمئن باشیم تهی، تنها زیرمجموعه‌ی F است؟ (a، b، c و d همگی اعداد طبیعی‌اند.)

(کتاب درسی، مکمل و مرتبط با تمرین ۲، صفحه‌ی ۱۰)

$D=\{x|a\le x\le d\,,\,x\in\mathbb{N}\}$

$E=\{x|c\le x\le b,\,x\in\mathbb{N}\}$

$F=\{x|x\le k,\,x\in D\cap E\}$

۱) $a-۱$　　۲) a

۳) b　　۴) $b+۱$

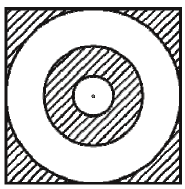
۲- دو تاس را با هم پرتاب می‌کنیم. احتمال آنکه عدد رو شده در تاس دوم بزرگ‌تر از تاس اول باشد، کدام است؟

(کتاب درسی، مکمل و مرتبط با تمرین ۴، صفحه‌ی ۱۷)

۱) $\frac{۱}{۶}$　　۲) $\frac{۱}{۲}$　　۳) $\frac{۵}{۱۲}$　　۴) $\frac{۵}{۹}$

۳- تیری را به سمت صفحه‌ی روبه‌رو پرتاب می‌کنیم و قطعاً به صفحه برخورد می‌کند. اگر شعاع دایره‌ها را به ترتیب a، ۲a و ۴a باشد، احتمال آن که تیر به بخش‌های هاشورخورده برخورد کند، کدام است؟ (دایره‌ها هم مرکزند.)

(کتاب درسی، مکمل و مرتبط با فعالیت، صفحه‌ی ۱۶)



۱) $\frac{۶۴-۱۳\pi}{۶۴}$　　۲) $\frac{۳۲-۳\pi}{۳۲}$

۳) $\frac{۱۶-۳\pi}{۶۴}$　　۴) $\frac{۳۲-۳\pi}{۶۴}$

۴- سکه‌ای را طوری می‌گیریم که قسمت عکس‌دار آن بالا باشد. سپس آن را طوری پرتاب می‌کنیم که دقیقاً هشت دور ۱۸۰° در هوا بزند و کفِ دست بیافتد. احتمال آن که سکه طوری بیاید که طرف عکس‌دار آن مجدداً بالا باشد، کدام است؟

(کتاب درسی، مکمل و مرتبط با تمرین ۴، صفحه‌ی ۱۷)

۱) $\frac{۱}{۶}$　　۲) $\frac{۱}{۲}$　　۳) صفر　　۴) ۱

۵- مجموعه‌ی A مجموعه‌ی مضارب اول عدد ۳، مجموعه‌ی B مجموعه‌ی مضارب اول عدد ۵، مجموعه‌ی C مجموعه‌ی اعداد زوج اول و مجموعه‌ی D مجموعه‌ی شمارنده‌های عدد طبیعی k است. کوچکترین k که به ازای آن $(A\cup B\cup C)\subseteq D$ باشد، کدام است؟

(کتاب درسی، مکمل و مرتبط با تمرین ۲، صفحه‌ی ۱۰)

۱) ۱۵　　۲) ۲۴　　۳) ۳۰　　۴) ۶۰

۶- مردی ۷ نوه دارد. بدون اطلاعات دیگر از این ۷ نوه، اگر یکی از احتمال‌های زیر را نتوان اندازه گرفت، آن احتمال کدام است؟

(کتاب درسی، مکمل و مرتبط با تمرین ۲، صفحه‌ی ۱۷)

۱) هر هفت نوه متولد ماه فروردین باشند.

۲) هر هفت نوه پسر باشند.

۳) هر هفت نوه از یک پدر و مادر باشند.

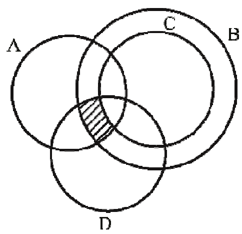
۴) هر هفت نوه متأهل باشند.

۷- حاصل $(A\bigcap B\bigcap C)\bigcap((B\bigcap C)-A))$ کدام است؟

۱) ϕ ۲) $A\bigcap B\bigcap C$ ۳) $A-B$ ۴) $B\bigcup C$

۸- عبارت کدام گزینه بخش هاشورخورده‌ی شکل زیر را نشان می‌دهد؟

(کتاب درسی، مکمل و مرتبط با تمرین ۴، صفحه‌ی ۱۴)



۱) $(A\bigcap D)-(B-C)$

۲) $(B-C)-(A\bigcap D)$

۳) $(A\bigcap B\bigcap D)-C$

۴) $(A\bigcap B\bigcap C\bigcap D)-(B\bigcap C)$

۹- مجموعه‌ی $A=\{b,c,d,e,f,g,h,i\}$ چند زیرمجموعه دارد که شروط زیر را داشته باشند؟

(کتاب درسی، مکمل و مرتبط با تمرین ۳، صفحه‌ی ۱۴)

الف) g، h و i عضو آن نباشند.

ب) b حتماً عضو آن باشد.

۱) ۴ ۲) ۸ ۳) ۱۶ ۴) ۳۲

۱۰- تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی $k+۲$ عضوی، نصف تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی $۲k+۳$ عضوی است. k عضو کدام مجموعه است؟

(کتاب درسی، مکمل و مرتبط با تمرین ۳، صفحه‌ی ۱۴)

۱) $A=\{۳x+۱ | -۲\le x\le -۱, x\in z\}$

۲) $B=\{۳x-۱ | -۲\le x\le -۱, x\in z\}$

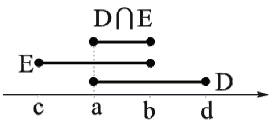
۳) $C=\{x+۱ | -۳\le x\le ۳, x\in z\}$

۴) $D=\{x+۱ | -۹\le x\le -۳, x\in z\}$

پاسخنامه آزمون تیزهوشان

۱- گزینه‌ی «۱»

مجموعه‌ی تهی زیرمجموعه‌ی همه مجموعه‌هاست. اگر مجموعه ϕ، تنها زیر مجموعه‌ی یک مجموعه باشد، آن مجموعه، خود تهی است. در این سؤال باید F تهی باشد. مجموعه‌ی F، اعداد طبیعی بین a و b و البته خود a و b را شامل می‌شود. اگر k از a کوچکتر باشد، این مجموعه تهی می‌شود. با توجه به این که a عددی طبیعی است، کافی است $x \le a-۱$ باشد.



۲- گزینه‌ی «۳»

وقتی دو تاس را با هم می‌اندازیم ۳۶ حالت دارد. در ۶ حالت اعداد رو شده‌ی دو تاس با هم برابرند. در ۳۰=۶-۳۶ حالت باقی‌مانده در نصف حالات تاس اول بزرگ‌تر و در نصف دیگر حالات تاس دوم بزرگ‌تر است. پس:

$$P=\frac{۱۵}{۳۶}=\frac{۵}{۱۲}$$

۳- گزینه‌ی «۱»

طول ضلع مربع صفحه $۸a$ و در نتیجه مساحت آن $۸a\times ۸a=۶۴a^۲$ است. مساحت دایره‌ی بزرگتر $\pi\times(۴a)^۲$، مساحت دایره‌ی وسطی $\pi\times(۲a)^۲$ و مساحت دایره‌ی کوچکتر $\pi a^۲$ است. مساحت هاشورخورده از دو بخش تشکیل شده است.

مساحت بخش داخلی: $۴\pi a^۲-\pi a^۲=۳\pi a^۲$

مساحت بخش خارجی: $۶۴a^۲-۱۶\pi a^۲$

مساحت کل هاشورخورده: $۶۴a^۲-۱۶\pi a^۲+۳\pi a^۲=۶۴a^۲-۱۳\pi a^۲$

$$\text{احتمال مورد نظر}=\frac{\text{مساحت هاشورخورده}}{\text{مساحت کل}}=\frac{۶۴a^۲-۱۳\pi a^۲}{۶۴a^۲}=\frac{۶۴-۱۳\pi}{۶۴}$$

۴- گزینه‌ی «۴»

هر ۱۸۰° چرخش یک دور جهت سکه عوض می‌شود. سکه هشت دور می‌چرخد، پس دقیقاً در همان جهتی که به بالا پرتاب شده است، به کف دست برمی‌گردد. یعنی احتمال این اتفاق، صددرصد (یک) است.

۵- گزینه‌ی «۳»

$$A=\{۳\}\ ,\ B=\{۵\}\ ,\ C=\{۲\}$$
$$A\cup B\cup C=\{۲,۳,۵\}$$

در واقع صورت سؤال به دنبال عددی می‌گردد که ۲، ۳ و ۵ عامل‌های آن باشند که کوچک‌ترین عدد ممکن برابر حاصل‌ضرب این اعداد است.

$$۲\times۳\times۵=۳۰$$

۶- گزینه‌ی «۳»

همواره در تعیین احتمال دو عامل وجود دارد. یکی حالت مطلوب، دیگری کل حالت‌ها. مثلاً در پرتاب یک تاس برای پیدا کردن احتمال آمدن یک عدد خاصی بین ۱ تا ۶، مثلاً ۳، می‌توان گفت تاس ۶ عدد دارد. حالت مطلوب یکی از آن‌ها است. پس در پرتاب تاس احتمال آمدن عدد ۳، $\frac{۱}{۶}$ است؛

بنابراین بدون داشتن کل حالت‌ها، نمی‌توان احتمال را اندازه‌گیری کرد.

بررسی گزینه‌ها:

گزینه «۱»: نوه‌ها هر کدام متولد یکی از ماه‌های سال هستند. هر سال ۱۲ ماه دارد. بنابراین احتمال را می‌توان اندازه گرفت.

گزینه «۲»: هر فرزند یا پسر است یا دختر، پس احتمال را می‌توان اندازه گرفت.

گزینه «۳»: نمی‌دانیم مرد صورت سؤال چند فرزند دارد و هر کدام از فرزندانش چند بار ازدواج کرده‌اند و از چند ازدواج فرزند دارد، بنابراین این احتمال را نمی‌توان اندازه گرفت.

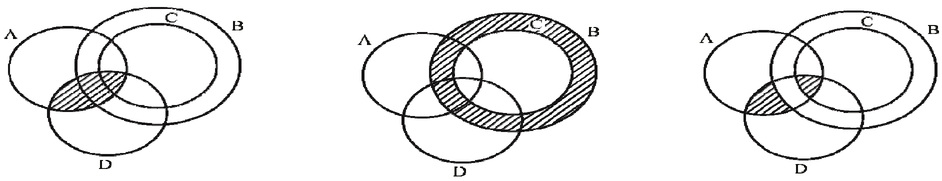
گزینه «۴»: هر فرد یا مجرد است یا متأهل بنابراین احتمال را می‌توان اندازه گرفت.

۷- گزینه‌ی «۱»

عبارت $(A\cap B\cap C)$ چیزی خارج از A ندارد. عبارت $((B\cap C)-A)$ چیزی از A ندارد. بنابراین اشتراک این دو عبارت تهی است.

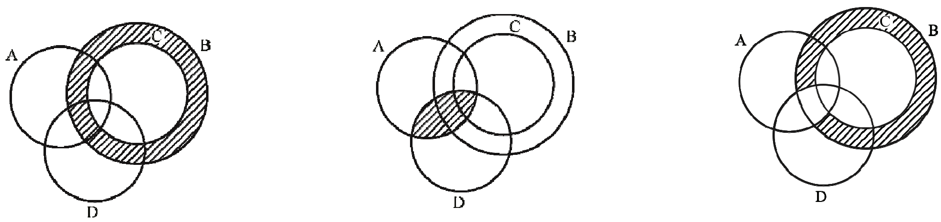
۸- گزینه‌ی «۳»

گزینه‌ی «۱»



$A\cap D \quad - \quad B-C \quad = \quad (A\cap D)-(B-C)$

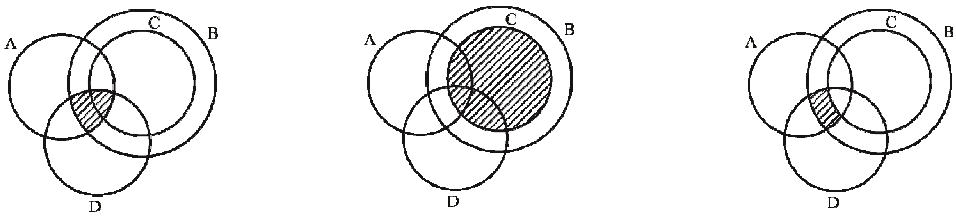
گزینه‌ی «۲»



B−C

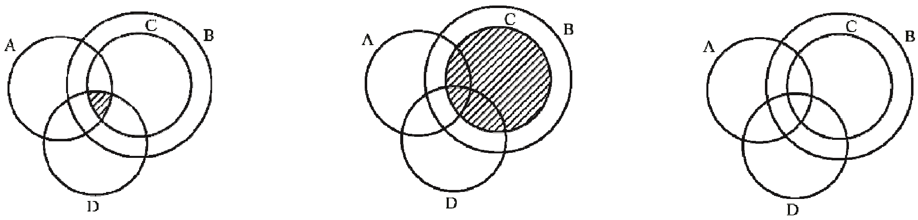
$B-C \quad - \quad A\cap D \quad = \quad (B-C)-(A\cap D)$

گزینه‌ی «۳»



$A\cap B\cap D \quad - \quad C \quad = \quad (A\cap B\cap D)-C$

گزینه‌ی «۴»



$A\cap B\cap C\cap D \quad - \quad B\cap C \quad = \quad \phi$

۹- گزینه‌ی «۳»

G، h و i عضو زیرمجموعه‌ها نیستند، پس با این سه عضو کاری نداریم. از طرفی b عضو زیرمجموعه‌ها است. پس b همواره وجود دارد. چهار عضو باقی می‌ماند، پس $۲^{٤}=۱٦$ زیرمجموعه با این شرایط وجود دارد.

۱۰- گزینه‌ی «۳»

هر مجموعه‌ی n عضوی ۲^{n} زیرمجموعه دارد، داریم:

$$۲^{k+۲}=\frac{۱}{۲}(۲^{۲k+۳})\Rightarrow ۲^{k}\times ۴=\frac{۱}{۲}(۲^{۲k}\times ۸)$$
$$\Rightarrow ۴\times ۲^{k}=۴\times ۲^{۲k}\Rightarrow ۲^{k}=۲^{۲k}\Rightarrow k=۲k\Rightarrow k=۰$$

در واقع صورت سؤال، گفته است تعداد زیرمجموعه‌ی یک مجموعه‌ی دو عضوی، (٤)، نصف تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی سه عضوی (۸) است. باید در گزینه‌ها به دنبال مجموعه‌ای بگردیم که صفر عضو آن باشد. مجموعه‌ی C این ویژگی را دارد.

آزمون تشریحی

۱- کدام یک از عبارات زیر، مشخص کننده یک مجموعه است؟ چرا؟ (کتاب درسی، مکمل و مشابه کار در کلاس، صفحه‌ی ۴)

A: اعداد طبیعی کمتر از ۱

B: شمارنده‌های اول عدد ۱۸۵۴۲۷۲۱۰۴۹۹

C: جواب‌های طبیعی معادله‌ی $\frac{۵x}{۴}+۷=\frac{۱۰۰۰}{۸}$

D: ۴ عدد فرد

۲- مجموعه‌ی A، مجموعه‌ای شامل ۲ عدد متوالی طبیعی با حاصلضرب ۱۳۲ است. کدام‌یک از مجموعه‌های زیر، اجتماعشان با مجموعه‌ی A، خود A است؟ (کتاب درسی، مکمل و مرتبط با فعالیت، صفحه‌ی ۷)

الف) دو عدد طبیعی متوالی با میانگین ۱۱/۵

ب) ۱۰ ۱۱ ۱۲

ج) اعداد صحیح بین ۹ و ۱۳ که بر ۵ بخش‌پذیر نیستند.

۳- تمام زیرمجموعه‌های چهار عضوی مجموعه‌ی $A=\{a,b,d,\{a\},b,d,\{a,b,d\}\}$ را بنویسید. (کتاب درسی، مکمل و مرتبط با فعالیت، صفحه‌ی ۸)

۴- در هر مورد صحیح یا غلط بودن را مشخص کنید. (کتاب درسی، مکمل و مرتبط با صفحه‌ی ۹)

الف) هر عدد طبیعی یک عدد گویاست.

ب) برخی از اعداد صحیح، گویا هستند.

ج) برخی از اعداد گویا، حسابی هستند.

د) هر عدد حسابی یک عدد طبیعی است.

۵- زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی زیر را با نشان دادن اعضا بنویسید. (کتاب درسی، مکمل و مرتبط با کار در کلاس، صفحه‌ی ۱۰)

$A=\{x+۲ | x\in\mathbb{N}, ۱\le x<۴\}$

۶- اگر $A\subseteq B$، حاصل $[(A\cup B)\cap\phi]\cup[B\cup(A\cup B)]$ کدام است؟ (کتاب درسی، نتیجه‌گیری از فعالیت، صفحه‌ی ۱۲)