کارت ۱
فصل ۱
یادآوری معادله خط

معادله‌ی خط در حالت کلی: معادله‌ی خطی که از نقطه‌ی $(x_{\circ},y_{\circ})$ می‌گذرد و شیب آن m باشد:

$$y-y_{\circ}=m(x-x_{\circ})$$

اگر (x_1,y_1) و (x_2,y_2) دو نقطه‌ی دلخواه در صفحه باشند، از این دو نقطه، فقط و فقط یک خط می‌گذرد که شیب این خط از رابطه‌ی مقابل به‌دست می‌آید:

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

تذکر: برای نوشتن معادله خط، باید مختصات دو نقطه از خط را بدانیم یا شیب و یک نقطه از خط معلوم باشد.

عرض از مبدأ: هرگاه خط L محورyها را در نقطه‌ای به عرض h قطع کند، آن‌گاه h، عرض از مبدأ خط L نامیده می‌شود.

طول از مبدأ: هرگاه خط L محور xها را در نقطه‌ای به طول w قطع کند، آن‌گاه w طول از مبدأ خط L نامیده می‌شود.

یادآوری معادله خط

۱. عرض از مبدأ خط گذرنده بر دو نقطه $(5,-2)$ و $(3,2)$ کدام است؟ **(خارج انسانی - ۹۱)**

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

پاسخ

۱: گزینه‌ی «۴»

ابتدا شیب خط را محاسبه می‌کنیم.

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{-2-2}{5-3}=\frac{-4}{2}=-2$$

$$y-y_0=m(x-x_0) \quad (1)$$

مختصات یکی از نقاط را در معادله (۱) می‌گذاریم:

$$(5,-2)\Rightarrow y+2=-2(x-5)\Rightarrow y=-2x+8$$

برای یافتن عرض از مبدأ خط $x=0$ را جایگذاری می‌کنیم:

$y_0=-2(0)+8\Rightarrow\ y_0=8$ (عرض از مبدأ)

کارت ۲
فصل ۱

وضعیت نسبی دو خط

در حالت کلی، در صفحه، دو خط متمایز یا متقاطع‌اند یا موازی.

شرط توازی دو خط: اگر شیب دو خط با هم برابر باشد، آن‌گاه دو خط موازی‌اند.

توازی دو خط در حالت کلی : خطوط $ax+by+c=0$ و $a'x+b'y+c'=0$ با هم موازی‌اند، اگر: $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$

دو خط متقاطع: اگر دو خط در صفحه با هم موازی نباشند، متقاطع‌اند.

نکته‌ی ۱: دو خط غیر موازی با محورهای مختصات بر هم عمودند، هرگاه حاصل ضرب شیب‌های آن‌ها برابر ۱- باشد؛ یعنی $mm'=-1$. به عبارت دیگر، شیب هر کدام عکس قرینه شیب دیگری باشد.

نکته‌ی ۲: دو خط $ax+by+c=0$ و $a'x+b'y+c'=0$ برهم منطبق‌اند، اگر:

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$$

کارت ۲
فصل ۱

وضعیت نسبی دو خط

۱. ثابت کنید دو خط $4x+3y=5$ و $3x-4y=3$ بر هم عمودند.

۲. خط L به معادله $2y-3x=1$ و خط d به معادله $y=mx+5$ را در نظر بگیرید.

آ) شیب خط d را طوری بیابید که d با L موازی باشد.
ب) به ازای چه مقداری از m دو خط بر هم عمودند؟

پاسخ

:۱

$$4x+3y=5 \Rightarrow 3y=-4x+5 \Rightarrow y=-\frac{4}{3}x+\frac{5}{3}$$

$$3x-4y=3 \Rightarrow 4y=3x-3 \Rightarrow y=\frac{3}{4}x-\frac{3}{4}$$

$$m_1=-\frac{4}{3}, m_2=\frac{3}{4} \Rightarrow m_1m_2=-1 \Rightarrow$$ دو خط بر هم عمودند

:۲ $$2y-3x=1 \Rightarrow y=\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}$$

آ) $$m=\frac{3}{2}$$

ب) $$m\times\frac{3}{2}=-1 \Rightarrow m=-\frac{2}{3}$$

کارت ۳
فصل ۱
فاصله‌ی دو نقطه

تعریف $|x|$: $|x|$ فاصله‌ی نقطه‌ی x از مبدأ، روی محور اعداد حقیقی است.

نکته: بنابر تعریف $|x|$، فاصله نقطه‌ای به طول x روی محور اعداد حقیقی از نقطه‌ای به طول a برابر است با:

$$|x-a|$$

فاصله‌ی دو نقطه‌ی هم‌عرض در صفحه:

$$AB=|x_A-x_B|$$

فاصله‌ی دو نقطه‌ی هم‌طول در صفحه:

$$CD=|y_C-y_D|$$

فاصله‌ی دو نقطه‌ی دلخواه:

فاصله‌ی دو نقطه‌ی $A(x_1,y_1)$ و $B(x_2,y_2)$ برابر است با:

$$AB=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

کارت ۳
فصل ۱

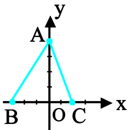
فاصله‌ی دو نقطه

۱. نقاط $A(0,4)$ ، $B(-3,0)$ و $C(2,0)$ سه رأس یک مثلث‌اند. محیط و مساحت این مثلث را حساب کنید.

پاسخ

۱:

مثلث را در صفحه‌ی مختصات رسم می‌کنیم:



$$BC = |x_C - x_B| = |2-(-3)| = |5| = 5$$

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2}$$
$$= \sqrt{25} = 5$$

$$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2}$$
$$= \sqrt{2^2 + (-4)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$AO = |y_A - y_O| = |4-0| = |4| = 4$$

محیط مثلث $= AB + AC + BC = 10 + 2\sqrt{5} = 2(5+\sqrt{5})$

مساحت مثلث $= \frac{1}{2} \times AO \times BC = \frac{1}{2} \times 4 \times 5 = 10$

کارت ۴ فصل ۱
نقطه‌ی وسط پاره‌خط و فاصله‌ی نقطه از خط

مختصات نقطه‌ی وسط پاره خط: اگر $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$ دو نقطه‌ی دلخواه در صفحه باشند، مختصات نقطه‌ی وسط پاره‌خط AB عبارت است از:

$$M\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$

فاصله‌ی نقطه از خط: فاصله‌ی نقطه $A(x_\circ, y_\circ)$ از خط به معادله $ax + by + c = \circ$ برابر است با:

$$d = \frac{|ax_\circ + by_\circ + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

فاصله‌ی دو خط موازی: یک نقطه‌ی دلخواه روی یکی از خطوط در نظر می‌گیریم و فاصله آن را از خط دیگر به دست می‌آوریم.

نکته: اگر معادله دو خط موازی به صورت $ax + by + c = \circ$ و $ax + by + c' = \circ$ باشد (ضرایب x و y در هر دو معادله با هم برابر باشد)، فاصله‌ی دو خط برابر است با:

$$d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

کارت ۴
فصل ۱

نقطه‌ی وسط پاره‌خط و فاصله‌ی نقطه از خط

۱. نقطه‌ی $M(-1,-1)$ وسط پاره‌خط واصل بین دو نقطه‌ی A و $B(-6,-5)$ است. مختصات A را بیابید.

۲. مساحت دایره به مرکز $W(3,2)$ و مماس بر خط $3x-4y=-3$ را بیابید.

پاسخ

:۱

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \Rightarrow -1 = \frac{x_A - 6}{2} \Rightarrow x_A = 4$$

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \Rightarrow -1 = \frac{y_A - 5}{2} \Rightarrow y_A = 3$$

بنابراین مختصات نقطه‌ی A، $(4,3)$ می‌باشد.

:۲ فاصله‌ی مرکز دایره تا خط مماس برابر شعاع دایره است؛ پس داریم:

$$R = \frac{|3x_\circ - 4y_\circ + 3|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|4|}{5} = \frac{4}{5}$$

$$\text{مساحت دایره} = \pi R^2 = \frac{16}{25}\pi$$

کارت ۵ فصل ۱
یادآوری حل معادله با روش‌های تجزیه و مربع کامل

روش تجزیه: اساس حل معادلات به روش تجزیه استفاده از فاکتورگیری، اتحاد مزدوج و اتحاد یک جمله‌ی مشترک و تبدیل معادله به حاصل‌ضرب دو چندجمله‌ای درجه اول است.

یادآوری:

اتحاد مزدوج: ۱) $a^2 - b^2 = (a-b) \times (a+b)$

اتحاد یک جمله مشترک:

۲) $x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b)$

روش مربع کامل: تبدیل معادله درجه دوم از شکل $ax^2 + bx + c = ۰$ به شکل کلی $(x+h)^2 = k$ و سپس استفاده از خاصیت ریشه‌ی زوج را روش مربع کامل می‌گویند. اساس کار این روش استفاده از فرمول زیر است.

$$x^2 + kx = (x + \frac{k}{2})^2 - \frac{k^2}{4}$$

یادآوری: اگر a یک عدد حقیقی نامنفی باشد، ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم $x^2 = a$ عبارتند از:

$$x = \sqrt{a} \ , \ x = -\sqrt{a}$$

کارت ۵
فصل ۱

یادآوری حل معادله با روش‌های تجزیه و مربع کامل

۱. معادله‌ی «آ» را از روش تجزیه و معادله «ب» را از روش مربع کامل حل کنید.

آ: $x^2-5x+6=0$

ب: $x^2-4x+3=0$

پاسخ

آ :۱)

$$x^2-5x+6=0\Rightarrow (x-3)(x-2)=0\Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=3 \end{cases}$$

ب)

$$x^2-4x+3=0\Rightarrow x^2-4x=-3$$

$$\Rightarrow x^2-4x+4=4-3$$

$$\Rightarrow (x-2)^2=1\Rightarrow |x-2|=1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-2=1\Rightarrow x=3 \\ x-2=-1\Rightarrow x=1 \end{cases}$$

کارت ۶
فصل ۱

یادآوری روش کلی حل معادله‌ی درجه ۲

فرمول روش کلی: برای یافتن ریشه‌های معادله درجه دوم $ax^2+bx+c=0$ ابتدا Δ را از فرمول زیر محاسبه می‌کنیم:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

سپس از رابطه‌ی زیر ریشه یا ریشه‌ها را می‌یابیم:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

تعیین تعداد ریشه‌ها با علامت دلتا (Δ):

$\Delta > 0 \Rightarrow$ معادله دو ریشه‌ی حقیقی دارد.

$\Delta = 0 \Rightarrow$ معادله یک ریشه‌ی حقیقی دارد. «ریشه مضاعف»

$\Delta < 0 \Rightarrow$ معادله ریشه‌ی حقیقی ندارد.

نکته: معادله‌ی درجه دوم حداکثر دو ریشه‌ی حقیقی دارد و به طور کلی هر معادله درجه‌ی n ام حداکثر n ریشه‌ی حقیقی دارد و اگر n فرد باشد، حداقل یک ریشه‌ی حقیقی خواهد داشت.

تذکر: در معادله‌ی درجه دوم $ax^2+bx+c=0$ ، اگر $ac<0$ باشد، آن‌گاه معادله همواره دو ریشه‌ی حقیقی دارد.

کارت ۶
فصل ۱

یادآوری روش کلی حل معادله‌ی درجه ۲

۱. حاصل‌ضرب یک عدد مثبت در خودش از سه برابر آن عدد ۴ واحد بیش‌تر است، آن عدد کدام است؟ (سراسری تجربی - ۷۳)

۱) ۶ ۲) ۱- ۳) ۸ ۴) ۴

۲. بـه ازای چـه مقـداری از k، معادلـه $x^2+kx+k-1=0$ ریشه‌ی مضاعف دارد؟

پاسخ

۱: گزینه«۴»

$$x^2-3x=4 \Rightarrow x^2-3x-4=0$$

$$\Delta=b^2-4ac=9+16=25$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{3\pm\sqrt{25}}{2}\Rightarrow\begin{cases}x=4\\x=-1\end{cases}$$

چون در صورت سؤال ذکرشده عـدد مثبـت اسـت، پـس فقـط مقدار $x=4$ قابل قبول است.

۲: معادله زمانی ریشه‌ی مضاعف دارد که $\Delta=0$ باشد، پس:

$$k^2-4k+4=0 \Rightarrow |k-2|^2=0 \Rightarrow k=2$$

روش تغییر متغیر برای حل معادله

روش تغییر متغیر: در برخی از معادلات که یک عبارت در آن تکرار شده، می‌توان از روش تغییر متغیر استفاده کرد. به مثال زیر توجه کنید:

$$(x+\frac{1}{x})^2-4(x+\frac{1}{x})=-4$$

عبارت $(x+\frac{1}{x})$ را برابر u درنظر می‌گیریم و معادله را به یک معادله‌ی درجه‌ی ۲ تبدیل می‌کنیم.

$$u^2-4u=-4 \Rightarrow (u-2)^2=0 \Rightarrow u=2$$

$$x+\frac{1}{x}=u \Rightarrow x+\frac{1}{x}=2 \xrightarrow{x\neq 0} x^2-2x+1=0$$

$$\Rightarrow (x-1)^2=0 \Rightarrow x=1$$

این معادله تنها ریشه‌ی مضاعف $x=1$ را دارد.

نکته: معادله‌ی درجه چهار $ax^4+bx^2+c=0$ زمانی چهار ریشه حقیقی دارد که بعد از تبدیل آن به معادله‌ی درجه دوم، دو ریشه‌ی معادله‌ی درجه دوم، مثبت باشد.

کارت ۷
فصل ۱
روش تغییر متغیر برای حل معادله

۱. مجموع ریشه‌های حقیقی معادله زیر کدام است؟

$$(x^2+x)^2-18(x^2+x)+72=0$$ (سراسری تجربی - ۹۰)

۱) -4 ۲) -2 ۳) ۸۲ ۴) ۴

پاسخ

۱: گزینه‌ی «۲»

عبارت مشترک x^2+x را برابر u می‌گیریم و معادله را به یک معادله درجه ۲ تبدیل می‌کنیم:

$$u^2-18u+72=0$$

$$\Delta=b^2-4ac=(-18)^2-4(1)(72)=36$$

$$u=\frac{18\pm\sqrt{36}}{2(1)}\Rightarrow\begin{cases}u=12\\u=6\end{cases}$$

$$1)\ x^2+x=12\Rightarrow\begin{cases}x_1=3\\x_2=-4\end{cases}$$

$$2)\ x^2+x=6\Rightarrow\begin{cases}x_3=2\\x_4=-3\end{cases}$$

$$x_1+x_2+x_3+x_4=-2$$

کارت ۸ — فصل ۱
مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌های معادله‌ی درجه ۲

اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $(a \neq 0)$ و $ax^2+bx+c=0$ باشند، آن‌گاه:

$$\alpha+\beta=S=\frac{-b}{a} \quad \text{و} \quad \alpha\times\beta=P=\frac{c}{a}$$

معادله‌ی درجه دوم با مجموع ریشه‌های S و حاصل‌ضرب ریشه‌های P به صورت $x^2-Sx+P=0$ می‌باشد.

نکات:

۱) تفاضل دو ریشه: $|x_1-x_2|=\dfrac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$

۲) مجموع مربعات دو ریشه: $x_1^2+x_2^2=S^2-2P$

۳) مجموع مکعبات دو ریشه: $x_1^3+x_2^3=S^3-3PS$

۴) مجموع یا تفاضل ریشه‌ی دوم دو ریشه: $\sqrt{x_1}\pm\sqrt{x_2}=\sqrt{S\pm2\sqrt{P}}$

نکته: برای نوشتن معادله درجه دومی که ریشه‌های آن k واحد بیش‌تر (یا کم‌تر) از ریشه‌های معادله مفروض باشد، باید به جای x مقدار $x-k$ (یا $x+k$) را قرار دهیم.

مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌های معادله‌ی درجه ۲

۱. معادله درجه دومی بنویسید که ریشه‌های آن $2-\sqrt{5}$ و $2+\sqrt{5}$ باشد.

۲. ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم $x^2+ax+b=0$ ، یک واحد از ریشه‌های معادله ی $3x^2+7x+1=0$ بیش‌تر است، b کدام است؟

۱) -2 ۲) -1 ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{4}{3}$

پاسخ

۱:

$$S=x_1+x_2=2\sqrt{5} \qquad P=x_1.x_2=1$$

$$x^2-Sx+P=0 \Rightarrow x^2-2\sqrt{5}x+1=0$$

۲: گزینه «۲»؛ به جای x در معادله با ضرایب معلوم $(x-1)$ قرار می‌دهیم تا معادله با ضرایب مجهول حاصل شود.

$$3(x-1)^2+7(x-1)+1=0$$

$$\Rightarrow 3x^2-6x+3+7x-7+1=0$$

$$\Rightarrow 3x^2+x-3=0 \Rightarrow x^2+\frac{1}{3}x-1=0$$

$$\Rightarrow a=\frac{1}{3} \text{ و } b=-1$$

کارت ۹
فصل ۱
ماکزیمم یا مینیمم سهمی

در هر سهمی به معادله‌ی $y=ax^2+bx+c$ ، مختصات رأس سهمی و معادله‌ی محور تقارن به صورت زیر است:

مختصات رأس سهمی: $s(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a})$

معادله‌ی محور تقارن: $x=\frac{-b}{2a}$

سهمی با ضابطه‌ی $y=ax^2+bx+c$ را در نظر می گیریم:

آ) اگر $a>0$ آن‌گاه دهانه سهمی رو به بالاست و به ازای $x=\frac{-b}{2a}$ کم‌ترین مقدار خود را اختیار می‌کند.

ب) اگر $a<0$ آن‌گاه دهانه سهمی رو به پایین است و به ازای $x=\frac{-b}{2a}$ بیش‌ترین مقدار خود را خواهد داشت.

حالت خاص: محور تقارن سهمی، به معادله‌ی $y=a(x-x_1)(x-x_2)$ ، خط به معادله‌ی $x=\frac{x_1+x_2}{2}$ است.

تذکر: قرینه‌ی هر نقطه سهمی نسبت به محور تقارن سهمی، بر روی خود سهمی قرار دارد. به عبارت دیگر: $\frac{x_A+x_{A'}}{2}=x_s$

(A' قرینه‌ی نقطه‌ی A نسبت به محور تقارن است.)

ماکزیمم یا مینیمم سهمی

۱. کم‌ترین مقدار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=x^2+6x-24$ را بیابید.

۲. محیط مستطیلی به طول x و عرض y برابر ۱۲ متر می‌باشد، بیش‌ترین مقدار مساحت مستطیل را محاسبه کنید.

پاسخ

۱: این تابع به ازای $x=\frac{-b}{2a}=-3$ کم‌ترین مقدار را خواهد داشت که برابر است با:

$$f(-3)=(-3)^2+6(-3)-24=-33$$

۲:

$$2(x+y)=12 \Rightarrow x+y=6 \Rightarrow y=6-x$$

مساحت مستطیل $=xy=x(6-x)=-x^2+6x$

مساحت مستطیل به ازای $x=\frac{-b}{2a}=3$ بیش‌ترین مقدار را خواهد داشت، پس:

بیش‌ترین مساحت مستطیل $=-(3)^2+6(3)=9$

صفرهای تابع درجه ۲

برای یافتن محل تلاقی سهمی با محور xها کافی است معادله‌ی $y=0$ را حل کنیم که سه حالت پیش می‌آید:

$1)\ \Delta > 0 \Rightarrow$ سهمی محور xها را در دو نقطه قطع می کند

$2)\ \Delta = 0 \Rightarrow$ سهمی بر محورx ها مماس می‌شود

$3)\ \Delta < 0 \Rightarrow$ سهمی محور xها را قطع نمی‌کند

نکته‌ی ۱: برای تشخیص علامت ریشه‌های احتمالی تابع درجه ۲ می‌توانیم از علامت S و P کمک بگیریم.

$1)\ \Delta > 0 \Rightarrow$ سهمی دو ریشه‌ی متمایز دارد.

$2)$
- $P>0, S>0$: هر دو ریشه مثبت اند.
- $P>0, S<0$: هر دو ریشه منفی اند.
- $P<0, S>0$: دو ریشه مختلف العلامت اند.
- $P<0, S<0$: دو ریشه مختلف العلامت اند.

نکته‌ی ۲: برای یافتن محل تلاقی سهمی با محور yها، کافی است در معادله سهمی به جای x صفر قرار دهیم.

کارت ۱۰
فصل ۱

صفرهای تابع درجه ۲

۱. حدود k را طوری تعیین کنید که سهمی $y=(k-2)x^2+(2k+3)x+k$ همواره زیر محور xها باشد.

۲. تعداد و علامت ریشه‌های تابع $y=x^2+6x+2$ را بدون محاسبه‌ی ریشه‌ها بیابید.

پاسخ

۱: باید ضریب x^2 کوچک‌تر از صفر و نیز $\Delta<0$ باشد، پس:

$$\begin{cases} k-2<0 \Rightarrow k<2 \qquad (1) \\ \Delta<0 \Rightarrow 4k^2+12k+9-4k^2+8k<0 \\ \Rightarrow 20k<-9 \Rightarrow k<-\dfrac{9}{20} \qquad (2) \\ \xrightarrow[\text{ب}]{(1)\cap(2)\ \text{جـوا}} k<-\dfrac{9}{20} \end{cases}$$

۲:

$\Delta=36-8=28>0 \Rightarrow$ دو ریشه‌ی متمایز دارد.

$P=\dfrac{c}{a}=2 \Rightarrow$ ریشه‌ها هم‌علامت‌اند.

$S=\dfrac{-b}{a}=-6 \Rightarrow$ هر دو ریشه منفی‌اند.

کارت ۱۱
فصل ۱

رسم نمودار سهمی

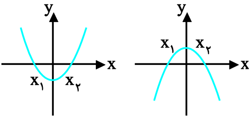
برای رسم نمودار سهمی سه مرحله‌ی زیر را انجام می‌دهیم:

۱- با توجه به ضریب x^2 ، تعیین می‌کنیم دهانهٔ سهمی رو به بالا یا رو به پایین است.

۲- مختصات رأس سهمی را می‌یابیم.

۳- نقاط تلاقی سهمی با محور xها و yها را می‌یابیم.

نکته‌ی ۱: اگر $ac < ۰$ باشد، معادله دارای دو ریشه‌ی مختلف‌العلامت است؛ پس از هر چهار ناحیه می‌گذرد.



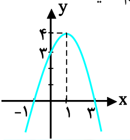
نکته‌ی ۲: در یک معادله با ضرایب گویا، اگر $a+\sqrt{b}$ یک ریشه‌ی معادله باشد، ریشه‌ی دیگر معادله $a-\sqrt{b}$ است و بر عکس

کارت ۱۱
فصل ۱

رسم نمودار سهمی

۱. نمودار سهمی $y = x^2 - 4x + 3$ را رسم کنید.

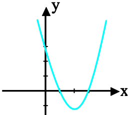
۲. معادله سهمی زیر را بیابید.



پاسخ

:۱

$$\left.\begin{array}{l} y = 0 \Rightarrow x_1 = 3 ,\ x_2 = 1 \\ \text{رأس: } (2,-1) \\ \text{دهانه‌ی سهمی رو به بالاست} \end{array}\right\} \Rightarrow$$



:۲ معادله سهمی را به شکل $y = ax^2 + bx + c$ فرض می‌کنیم.

عرض از مبدأ سهمی $= 3 \Rightarrow c = 3$

$$P = \frac{c}{a} = x_1 x_2 \Rightarrow \frac{3}{a} = -3 \Rightarrow a = -1$$

$$S = \frac{-b}{a} = x_1 + x_2 \Rightarrow \frac{-b}{-1} = 2 \Rightarrow b = 2$$

معادله سهمی: $y = -x^2 + 2x + 3$

کارت ۱۲ فصل ۱

رابطه بین نمودار تابع درجه ۲ و ضرایب معادله

هرگاه نمودار تابع $f(x)=ax^2+bx+c \quad (a\neq 0)$ را داشته باشیم به کمک نکات زیر علامت ضرایب a، b و c را مشخص می‌کنیم.

۱) اگر دهانه‌ی سهمی رو به بالا باشد، $a>0$ و اگر دهانه‌ی سهمی رو به پایین باشد، $a<0$ است.

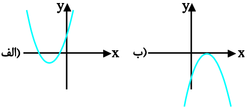
۲) اگر نمودار تابع محور yها را در قسمت منفی قطع کرده باشد، $c<0$ و اگر محور yها را در قسمت مثبت قطع کرده باشد، $c>0$ و اگر از مبدأ بگذرد $c=0$ است.

۳) رأس سهمی اگر در ربع اول یا چهار قرار گرفته باشد، $-\frac{b}{2a}>0$ و اگر در ربع دوم یا سوم قرار گرفته باشد، $-\frac{b}{2a}<0$ است که با توجه به نکته‌ی (۱) می‌توان علامت ضریب b را به‌دست آورد و اگر رأس سهمی روی محور yها باشد. $b=0$ است.

نکته: باتوجه به محل برخورد سهمی با محور xها می‌توان علامت مجموع دو ریشه یعنی $-\frac{b}{a}$ را به‌دست آورد و به کمک این نکته نیز می‌توان علامت b را مشخص کرد.

کارت ۱۲ فصل ۱
رابطه بین نمودار تابع درجه ۲ و ضرایب معادله

۱. در هر یک از شکل‌های زیر، سهمی به معادله‌ی $f(x)=ax^2+bx+c$ رسم شده است. علامت ضرایب a، b و c را تعیین کنید.



پاسخ

۱: الف)

$\Rightarrow$
- تابع مینیمم دار است. $\Rightarrow a>0$
- عرض از مبدأ مثبت است. $\Rightarrow c>0$
- طول رأس سهمی منفی است. $\Rightarrow -\dfrac{b}{2a}<0 \xrightarrow{a>0} b>0$

ب)

$\Rightarrow$
- تابع ماکزیمم دارد است. $\Rightarrow a<0$
- عرض از مبدأ منفی است. $\Rightarrow c<0$
- طول رأس سهمی مثبت است. $\Rightarrow -\dfrac{b}{2a}>0 \xrightarrow{a<0} b>0$

کارت ۱۳
فصل ۱

معادلات گویا

مستطیل طلایی: مستطیلی است که نسبت مجموع طول و عرض آن به طول آن برابر باشد با نسبت طول به عرض مستطیل.

عدد طلایی: به عدد $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ عدد طلایی گویند که مقدار تقریبی آن $1/618$ می‌باشد.

روش حل معادلات گویا: برای حل یک معادله‌ی گویا می‌توان دو طرف تساوی را پس از تجزیه کردن مخرج‌ها، در کوچکترین مضرب مشترک مخرج‌ها ضرب کرد تا معادله از شکل کسری خارج شود، جواب‌های به‌دست آمده نباید مخرج هریک از کسرها را صفر کنند و این جواب‌ها باید در معادله اولیه صدق نمایند.

تذکر: در صورتی که در حل معادلات گویا، عامل مشترکی را از صورت و مخرج حذف کنیم، باید ریشه‌ی آن عامل را از مجموعه جواب، کسر کنیم.

کارت ۱۳
فصل ۱

معادلات گویا

۱. معادلات زیر را حل کنید.

آ) $\frac{3}{x^2}-12=0$

ب) $\frac{2x}{x-3}+\frac{x+1}{x+4}=\frac{x-1}{x-3}$

پاسخ

۱: آ) $\frac{3}{x^2}-12=0 \Rightarrow \frac{3}{x^2}=12 \Rightarrow x^2=\frac{1}{4} \Rightarrow x=\pm\frac{1}{2}$

هر دو جواب مخرج کسر را صفر نمی‌کند و در معادله اولیه نیز صدق می‌کند؛ پس هر دو قابل قبول‌اند.

ب)

دو طرف تساوی را در $(x-3)(x+4)$ ضرب می‌کنیم.

$$2x(x+4)+(x+1)(x-3)=(x-1)(x+4)$$

$$\Rightarrow 2x^2+8x+x^2-2x-3=x^2+3x-4$$

$$\Rightarrow 2x^2+3x+1=0 \Rightarrow \Delta=9-8=1$$

$$x=\frac{-3\pm1}{4} \Rightarrow \begin{cases} x_1=-1 \\ x_2=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

قابل

قبول

قابل

قبول

کارت ۱۴
فصل ۱

معادلات رادیکالی

روش حل معادلات رادیکالی:

برای حل یک معادله رادیکالی می‌توان جملات را طوری در طرفین تساوی جابه‌جا کرد که عبارت رادیکالی به تنهایی در یک طرف تساوی قرار گیرد. سپس با توان رسانی طرفین معادله و در صورت لزوم تکرار این عمل، معادله را از شکل رادیکالی خارج نمود. پس از حل معادله باید مطمئن شویم که جواب‌های به‌دست آمده در معادله‌ی اولیه صدق می‌کنند.

تذکر: رادیکال با فرجه‌ی زوج $(\sqrt[2n]{f(x)})$ زمانی تعریف شده است که عبارت زیر رادیکال بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشد؛ اما رادیکال با فرجه‌ی فرد $(\sqrt[2n+1]{f(x)})$ به ازای هر عددی که عبارت $f(x)$ به ازای آن تعریف شده است، وجود دارد.

کارت ۱۴
فصل ۱

معادلات رادیکالی

۱. معادلات زیر را حل کنید.

$$x+\sqrt{x}=6$$

۲. اگر $x=4$ یکی از جواب‌های معادله $x+a=\sqrt{5x-x^2}$ باشد، جواب دیگر آن کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) جواب دیگری ندارد.

پاسخ

۱:

$$x-6=-\sqrt{x}\xrightarrow[\text{۲ می‌رسانیم}]{\text{طرفین را به توان}}$$

$$x^2-12x+36=x\Rightarrow x^2-13x+36=0\Rightarrow$$

$$(x-9)(x-4)=0\Rightarrow\begin{cases}x=9\\x=4\end{cases}$$

(در معادله صدق نمی‌کند) غ ق ق

۲: گزینه «۴»؛ $x=4$ یکی از جواب‌هاست، پس:

$$4+a=\sqrt{20-16}\Rightarrow a=-2$$

$$x-2=\sqrt{5x-x^2}\xrightarrow{\text{به}}(x-2)^2=5x-x^2$$

$$\Rightarrow x^2-4x+4=5x-x^2\Rightarrow 2x^2-9x+4=0$$

$$\Rightarrow(2x-1)(x-4)=0\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{1}{2}\\x=4\end{cases}$$

(در معادله صدق نمی‌کند) غ ق ق