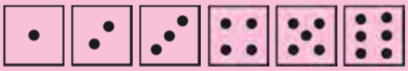
فصل اول

احتمال

تعریف آزمایش تصادفی: اگر نتیجه یک آزمایش قبل از وقوع آن قابل پیش‌بینی نباشد آن را آزمایش تصادفی می‌نامند.

مکعب همگنی را در نظر بگیرید که روی هر وجه آن اعداد یک تا شش نوشته شده است مانند شکل زیر:



حال اگر این مکعب را پرتاب کنیم قطعاً یکی از شش وجه آن رو می شود امّا ما نمی‌توانیم پیش‌بینی کنیم که کدام وجه رو می شود. بنابراین آزمایش ریختن یک تاس، یک آزمایش تصادفی است.

به دنیا آمدن نوزادی را در نظر بگیرید، قبل از تولد دو حالت ممکن برای آن می‌شناسیم پسر یا دختر امّا قبل از تولد نمی‌توانیم با قطعیّت پسر یا دختر بودن را تعیین کنیم چنین پدیده‌ای را تصادفی می‌نامیم.

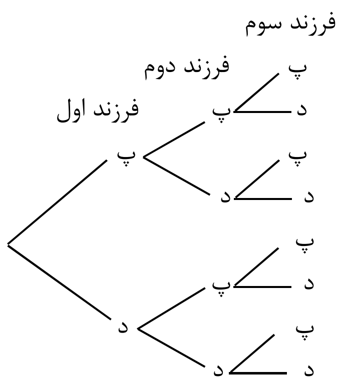
تعریف فضای نمونه‌ای:

فضای نمونه‌ای یک آزمایش، مجموعه‌ای است مانند S به قسمی که نتایج آزمایش عضوی از این مجموعه باشند. به عبارت ساده‌تر تمام نتایج ممکن یک آزمایش تصادفی را فضای نمونه‌ای آن آزمایش تصادفی می‌نامند.

تذکر: فضای نمونه‌ای ممکن است تعداد نامتناهی عضو داشته باشد ولی در این کتاب آزمایش‌هایی را در نظر می‌گیریم که فضای نمونه‌ای آن متناهی است.

q **مثال 1) خانواده‌ای دارای سه فرزند است. فضای نمونه‌ای مناسب جنسیّت فرزندان این خانواده را بنویسید.**

p **پاسخ**: *قبل از تولد هر نوزاد دو حالت ممکن برای آن می‌شناسیم پسر یا دختر پس برای تولد نوزاد اوّل دو حالت خواهیم داشت و برای تولد نوزاد دوم و سوم نیز هر کدام دو حالت خواهیم داشت طبق اصل ضرب کل حالت‌های ممکن برابر است با $2\times2\times2=8$ که همه حالت‌ها را با نمودار درختی و مجموعه‌ای روبرو نشان می‌دهیم.*



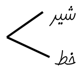
S = {(ر، ر، ر) و (پ، ر، ر) و (ر، پ، ر) و (پ، پ، ر) و (ر، ر، پ) و (پ، ر، پ) و (ر، پ، پ) و (پ، پ، پ)}

سؤالی که برای دانش‌آموزان مطرح می‌شود این است که چطور فضای نمونه‌ای را تشکیل دهیم؟

متداول‌ترین مدل‌های فضای نمونه‌ای به صورت زیر است.

حالت اول: سکه‌ای را n بار می‌ریزیم فضای نمونه‌ای 2^n عضو دارد، چرا؟

دیدید داوران فوتبال قبل از شروع بازی و تعیین زمین و شروع کننده بازی سکه می‌اندازند شما هم می‌دانید که هر سکه دو رو دارد به قول خودمان شیر و خط پس اگر سکه را یک بار بریزیم دو حالت برای آن رخ می‌دهد.

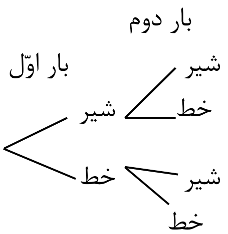


برای بار دوم نیز دو حالت (شیر و خط) و برای بار سوم نیز دو حالت (شیر و خط) و برای بار n-ام نیز دو حالت شیر و خط برای آن رخ می‌دهد که طبق اصل ضرب کل حالت‌ها برابر است با: $\underbrace{2\times 2\times \cdots \times 2}_{n\ \text{بار}} = 2^n$

مثال 2) **اگر سکه‌ای دو بار پرتاب شود مشخص کنید فضای نمونه‌ای چند عضو دارد سپس کل حالت‌های فضای نمونه‌ای را به‌صورت درختی و زوج مرتبی بنویسید.**

$n(s) = 2^2 = 4$

S ={(خط، خط) و (شیر، خط) و (خط، شیر) و (شیر، شیر)}



حالت دوم: در خانواده‌ای n فرزند متولد می‌شود فضای نمونه‌ای 2^n عضو دارد، مانند حالت اوّل محاسبه می‌شود.

حالت سوم: دانش‌آموزی به n سؤال صحیح و غلط پاسخ می‌دهد فضای نمونه‌ای 2^n عضو دارد.

حالت چهارم: مکعبی (تاسی) را n بار می‌ریزیم فضای نمونه‌ای 6^n عضو دارد، چرا؟

اگر یادتان باشد گفتیم اگر مکعب پرتاب شود قطعاً یکی از شش وجه آن رو می‌شود پس در پرتاب اوّل 6 حالت رخ می‌دهد و در پرتاب دوم نیز شش حالت و در پرتاب nام نیز شش حالت طبق اصل ضرب کل حالت‌ها برابر است با $6\times 6\times \cdots \times 6 = 6^n$

تذکر: اگر دقّت کرده باشید در هر چهار حالت بالا برای به‌دست آوردن تعداد عضوهای فضای نمونه‌ای تعداد رخدادهای یک حالت را به توان n رساندیم.

حالت پنجم: کیسه‌ای دارای n مهره متمایز است می‌خواهیم k مهره از کیسه خارج کنیم فضای نمونه‌ای به یکی از حالت‌های زیر است.

الف) اگر k مهره را به ترتیب و با جایگذاری مجدد خارج کنیم فضای نمونه‌ای n^k عضو دارد، چرا؟

می‌دانیم در کیسه n مهره وجود دارد پس برای خارج کردن مهره اوّل شما n انتخاب دارید چون هر کدام از مهره‌ها می‌توانند انتخاب شوند. مهره رؤیت شده را دوباره به کیسه برمی‌گردانیم لذا کیسه همچنان n مهره دارد، در خارج کردن مهره دوم نیز n انتخاب خواهید داشت اگر این عمل k بار تکرار شود هر بار n انتخاب خواهید داشت طبق اصل ضرب کل حالت‌ها برابر است با:

$$\underbrace{n\times n\times \cdots \times n}_{k\ \text{بار}} = n^k$$

ب) اگر k مهره را به ترتیب و بدون جایگذاری خارج کنیم تعداد عضوهای فضای نمونه برابر است با: $p(n,k) = \dfrac{n!}{(n-k)!}$ چرا؟

در این حالت برای خارج کردن مهره اوّل n انتخاب داریم، مهره خارج شده را کنار می‌گذاریم بنابراین در کیسه $(n-1)$ مهره باقی می‌ماند لذا برای خارج کردن مهره دوم $(n-1)$ انتخاب خواهید داشت دقّت کنید در هر حالت یک مهره از کل مهره‌ها کم می‌شود. تا اینکه مهره kام خارج شود. پس طبق اصل ضرب کل حالت‌های ممکن برابر است با $p(n,k)$

ج) اگر k مهره را یک جا خارج کنیم تعداد عضوهای فضای نمونه‌ای برابر است با: $c(n,k)=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

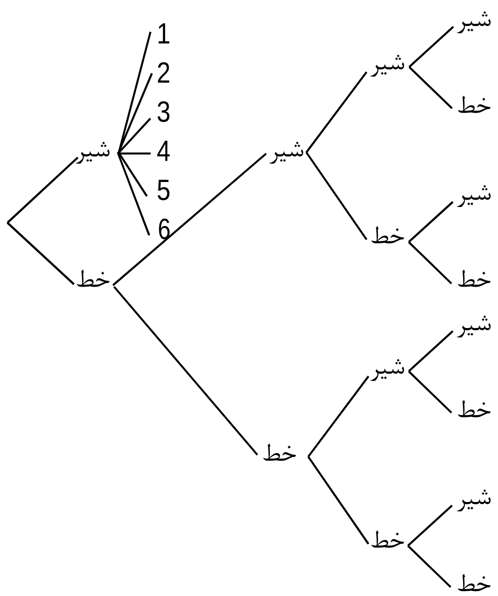
چرا؟

در این حالت مشت می‌کنیم داخل کیسه و k مهره را یک‌جا از کیسه خارج می‌کنیم.

q مثال 3) سکه‌ای را پرتاب می‌کنیم اگر شیر آید یک مکعب پرتاب می‌کنیم و اگر خط آید سکه را سه بار دیگر پرتاب می‌کنیم فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی چند عضو دارد؟

1) 10   2) 14   3) 48   4) 12

p پاسخ: به نمودار درختی زیر دقّت کنید. تعداد شاخه‌های نهایی 14تا است.



گزینه‌ی 2 صحیح است.

q مثال 4) دو وجه مکعبی سفید و دو وجه آن قرمز و دو وجه آن سبز می‌باشد. این مکعب را 3 بار پرتاب می‌کنیم، فضای نمونه‌ای چند عضو دارد؟

(سراسری ریاضی ـ 82)

1) 6   2) 8   3) 9   4) 27

p پاسخ: این مسئله را با توجّه به گزینه‌ها حل می‌کنیم در این مسئله هر دو وجه یکی حساب می‌شوند چون هم رنگ هستند بنابراین در کل 3 وجه وجود دارد حال اگر آن را سه بار پرتاب کنیم طبق اصل ضرب $3\times3\times3=27$ حالت رخ می‌دهد.

تذکر: اگر دانش‌آموزی هر وجه را جدا در نظر بگیرد باید $6\times6\times6=6^3$ حالت رخ دهد که در گزینه‌ها نیست هرچند این پاسخ نیز صحیح می‌باشد.

گزینه‌ی 4 صحیح است.

q مثال 5) خانواده‌ای دارای سه فرزند است که دو تای آنها دوقلو هستند فضای نمونه‌ای دارای چند عضو است؟

1) 4   2) 10   3) 2   4) 6

p پاسخ: این تست را نیز با توجّه به گزینه‌ها حل می‌کنیم.

S = {(دوقلو، دختر) و (دوقلو، پسر) و (دختر، دوقلو) و (پسر، دوقلو)}

فضای نمونه‌ای چهار حالت دارد. بنابراین گزینه‌ی 1 صحیح است.

q مثال 6) از جعبه‌ای که شامل 2 مهره‌ی آبی و 3 مهره‌ی قرمز است، 2 مهره به تصادف و همزمان خارج می‌کنیم فضای نمونه‌ای این آزمایش چند عضو دارد؟

1) 5   2) 20   3) 10   4) 25

p پاسخ: بدون در نظر گرفتن رنگ مهره‌ها در این جعبه 5 مهره وجود دارد چون می‌خواهیم 2 مهره را یک‌جا خارج کنیم تعداد عضوهای فضای نمونه برابر است با:

$$C(5,2)=\frac{5!}{2!(5-2)!}=\frac{5\times4\times3!}{2\times3!}=10$$

گزینه‌ی 3 صحیح است.

q مثال 7) **در کیسه‌ای 5 مهره با شماره‌های 1 تا 5 وجود دارد. این مهره‌ها را به‌طور تصادفی پی در پی بدون جایگذاری خارج می‌کنیم فضای نمونه‌ای چند عضو دارد؟**

1 (1   120 (2   5 (3 5^5 (4

p پاسخ: برای خارج کردن مهره اوّل پنج انتخاب داریم این مهره را کنار می‌گذاریم بنابراین در کیسه چهار مهره باقی می‌ماند و برای خارج کردن مهره دوم چهار انتخاب داریم این مهره را نیز کنار می‌گذاریم پس در کیسه سه مهره باقی می‌ماند و برای خارج کردن مهره سوم، سه انتخاب داریم و با کنار گذاشتن این مهره برای مهره چهارم دو انتخاب و برای مهره پنجم یک انتخاب داریم طبق اصل ضرب کل حالت‌ها برابر است با :

$$5\times4\times3\times2\times1=5!=120$$

بنابراین گزینه 2 صحیح است.

پیشامد:

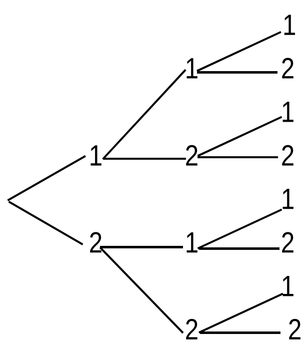
تعریف: هر زیر مجموعه از فضای نمونه‌ای را پیشامد می‌گوئیم، که معمولاً با نماد A و B و C و.... نشان می‌دهیم.

q مثال 8) **مکعبی را یک بار می‌ریزیم پیشامد A را «ظاهر شده عددی زوج» تعریف می‌کنیم، پیشامد A را مشخّص کنید.**

p پاسخ: می‌دانیم اگر مکعبی یک بار پرتاب شود فضای نمونه مجموعه $S=\{1,2,3,4,5,6\}$ خواهد شد ما از این مجموعه عضوهایی را لازم داریم که عددی زوج باشند بنابراین $A=\{2,4,6\}$ خواهد بود.

q مثال 9) **بر روی یک طرف یک سکه عدد یک و بر روی طرف دیگر آن عدد دو نوشته شده است این سکه را سه بار می‌ریزیم اگر پیشامد A «مجموع اعداد ظاهر شده، در پرتاب اوّل و دوم برابر سه باشد» تعریف کنیم، عضوی‌های پیشامد A را بنویسید.**

p پاسخ: فضای نمونه‌ای در سه پرتاب به‌صورت نمودار درختی زیر است:



$$S=\{(1,1,1),(1,1,2),(1,2,1),(1,2,2),(2,1,1),(2,1,2),(2,2,1),(2,2,2)\}$$

باید ببینیم در کدام حالت از سه تایی‌ها مجموع دو عدد اوّل برابر 3 است.

$$A=\{(1,2,1),(1,2,2),(2,1,1),(2,1,2)\}$$

q مثال 10) **در کیسه‌ای شش مهرهٔ سفید و هشت مهره سیاه وجود دارد سه مهره به تصادف و یک‌جا از کیسه خارج می‌کنیم اگر پیشامد A «سفید بودن 2 تا از مهره‌ها» باشد تعداد اعضای پیشامد A را مشخّص کنید.**

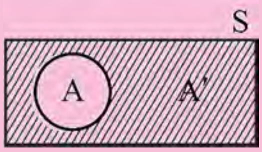
پاسخ: *باید تعداد ترکیبات سه عضوی از این 14 مهره را مشخص کنیم به قسمی که 2 تا از مهره‌ها سفید باشد بدیهی است که یک مهره باید سیاه باشد بنابراین تعداد اعضای پیشامد A برابر است با:*

$$n(A)=\binom{6}{2}\times\binom{8}{1}=\frac{6!}{2!(6-2)!}\times\frac{8!}{1!(8-1)!}=\frac{6\times5\times4!}{2\times4!}\times\frac{8\times7!}{7!}=15\times8=120$$

تعریف پیشامد تهی: اگر در آزمایشی، پیشامدی را تعریف کنیم که امکان وقوع آن نباشد، آن پیشامد را پیشامد غیر ممکن (تهی) می‌گوییم. به عنوان مثال بر روی یک طرف سکه عدد یک و بر روی طرف دیگر آن عدد دو نوشته شده است اگر این سکه را یک بار بریزیم پیشامد رو شدن عدد سه غیر ممکن است.

اعمال روی پیشامدها:

1) **متمم یک پیشامد:** اگر S فضای نمونه‌ای یک پدیده تصادفی و A یک پیشامد از S باشد، متمم پیشامد A را با A' نمایش می‌دهیم و زمانی رخ می‌دهد که پیشامد A رخ ندهد.



تذکر: در واقع دو پیشامد A و A' کل فضای نمونه‌ای S را تشکیل می‌دهند در نتیجه:

الف) $A\cup A'=S$ ب) $A\cap A'=\varnothing$ ج) $n(A')=n(S)-n(A)$

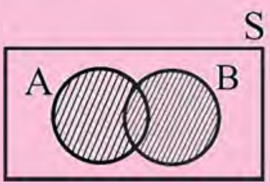
مثال 11) **مکعبی را دو بار پرتاب می‌کنیم اگر پیشامد** A **«مجموع اعداد رو شده کمتر از ده» تعریف کنیم متمم پیشامد** A را بنویسید.

پاسخ: متمم پیشامد A *به‌صورت مجموع اعداد رو شده بزرگتر یا مساوی با ده تعریف می‌شود که عضوهای آن به‌صورت زیر است.*

$$A'=\{(4,6),(6,4),(5,5),(5,6),(6,5),(6,6)\}$$

2) **اشتراک دو پیشامد:** اشتراک دو پیشامد A و B از فضای نمونه‌ای S زمانی رخ می‌دهد که هم پیشامد A و هم پیشامد B رخ دهد. در شکل مقابل $A\cap B$ مشخّص شده است.

3) **اجتماع دو پیشامد:** اجتماع دو پیشامد A و B از فضای نمونه‌ای S زمانی رخ می‌دهد که پیشامد A یا پیشامد B یا هر دو رخ دهند. در شکل مقابل پیشامد $A\cup B$ مشخّص شده است.



نکته: تعداد عضوهای اجتماع دو پیشامد به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

q **مثال 12) از مجموعه اعداد {1، 2 ،000 ، 20} عددی به تصادف انتخاب می‌گردد پیشامد اینکه عدد انتخاب شده زوج یا مضرب 5 باشد چند عضو دارد؟**

p **پاسخ:** پیشامد A را زوج بودن و پیشامد B را مضرب 5 بودن در نظر می‌گیریم لذا داریم:

$$\boldsymbol{A} = \{2,4,6,8,10,12,14,16,18,20\} \quad , \quad \boldsymbol{B} = \{5,10,15,20\}$$

$$\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B} = \{2,4,5,6,8,10,12,14,15,16,18,20\}$$ یا $$\boldsymbol{n}(\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{n}(\boldsymbol{A}) + \boldsymbol{n}(\boldsymbol{B}) - \boldsymbol{n}(\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}) = 10 + 4 - 2 = 12$$

4) **تفاضل دو پیشامد:** اگر $\boldsymbol{A}$ و $\boldsymbol{B}$ دو پیشامد از فضای نمونه‌ای $\boldsymbol{S}$ باشند پیشامد $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ زمانی رخ می‌دهد که پیشامد $\boldsymbol{A}$ رخ دهد ولی پیشامد $\boldsymbol{B}$ رخ ندهد، مانند شکل زیر.

نکته: تعداد عضوهای تفاضل دو پیشامد به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$n(A-B) = n(A) - n(A \cap B)$$

q **مثال 13) تاسی را دو بار می‌اندازیم اگر پیشامد A «آن که عدد رو شده تاس اوّل 4 باشد» و پیشامد B «آن که مجموع اعداد دو تاس 7 باشد» تعریف شوند پیشامد A -B را به‌دست آورید.**

p **پاسخ:**

$$\boldsymbol{A} \text{ پیشامد} = \{(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6)\}$$

$$\boldsymbol{B} \text{ پیشامد} = \{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$$

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B} = \{(4,1),(4,2),(4,4),(4,5),(4,6)\}$$

5) **پیشامد** $(A-B) \cup (B-A)$: که به آن تفاضل متقارن می‌گویند، زمانی رخ می‌دهد که دقیقاً یکی از دو پیشامد $\boldsymbol{A}$ یا $\boldsymbol{B}$ رخ دهند نه هر دو با هم.

q **مثال 14) در مثال 13 پیشامد اینکه دقیقاً یکی از دو پیشامد A یا B رخ دهد چند عضو دارد آن را بنویسید.**

p **پاسخ:** با توجّه به توضیحات مثال ده داریم:

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}) = \{(4,1),(4,2),(4,4),(4,5),(4,6)\}$$

$$\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A} = \{(1,6),(2,5),(3,4),(5,2),(6,1)\}$$

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}) \cup (\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}) = \{(4,1),(4,2),(4,4),(4,5),(4,6),(1,6),(2,5),(3,4),(5,2),(6,1)\}$$

6) **پیشامدهای ناسازگار:** دو پیشامد $\boldsymbol{A}$ و $\boldsymbol{B}$ از فضای نمونه‌ای $\boldsymbol{S}$ را ناسازگار گوییم هرگاه با هم رخ ندهند به عبارت دیگر $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} = \varnothing$ باشد.

مثال ۱۵) در آزمایش پرتاب ۲ تاس، فرض کنید A پیشامد «مجموع دو عدد ۷» و B پیشامد «مجموع دو عدد ۱۰» است آیا دو پیشامد A و B ناسازگارند؟

پاسخ: عضوهای هر یک از پیشامدها را به‌دست می‌آوریم و اشتراک آنها را حساب می‌کنیم.

$$A=\left\{(۱,۶),(۲,۵),(۳,۴),(۴,۳),(۵,۲),(۶,۱)\right\} \quad , \quad B=\left\{(۶,۴),(۴,۶),(۵,۵)\right\}$$

$$A\bigcap B=\varnothing$$

چون اشتراک آنها تهی است لذا دو پیشامد ناسازگارند.

مثال ۱۶) می‌دانیم گروه خونی افراد جامعه‌ای به چهار دسته اصلی AB,O,B,A تقسیم می‌شوند یک نفر به تصادف از این جامعه انتخاب می‌کنیم آیا پیشامد اینکه از گروه خونی AB یا A باشد ناسازگارند؟

پاسخ: می‌دانیم یک نفر دارای دو گروه، خونی نیست لذا پیشامد اینکه از گروه خونی AB یا A باشند، ناسازگار است.

مثال ۱۷) خانواده‌ای دارای چهار فرزند است پیشامد اینکه این خانواده سه دختر داشته باشد چند عضو دارد؟

۱) ۱ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۱۶

پاسخ: اگر بخواهیم مسئله را به کمک نمودار درختی حل کنیم کمی وقت‌گیر خواهد بود بنابراین از جایگشت تکراری استفاده می‌کنیم حالتی که سه دختر داشته باشد به‌صورت (پ، د، د، د) خواهد بود که اگر جایگشت‌های آن را حساب کنیم (جایگشت‌های تکراری) برابر است با:

$$\frac{۴!}{۳!\times ۱!}=\frac{۴\times ۳!}{۳!}=۴$$

از ترکیب هم می‌توانیم استفاده کنیم:

$$\binom{۴}{۳}=\frac{۴!}{۳!(۴-۳)!}=۴$$

بنابراین گزینه ۲ صحیح است.

مثال ۱۸) سه سکه را همزمان پرتاب می‌کنیم، اگر دو پیشامد A و B را به‌صورت زیر تعریف کنیم:

A: حداقل یکی از سکه‌ها به پشت بنشیند.

B: تعداد سکه‌هایی که به رو نشسته‌اند بیش‌تر از سکه‌هایی باشد که به پشت نشسته‌اند.

آنگاه پیشامد $A\cap B$ چند عضو دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: برای پیشامد A باید حالت‌های یک سکه یا دو سکه یا سه سکه به پشت بنشیند را در نظر بگیریم (حواسمان باشد که در مرحله چندم به پشت می‌نشیند برای ما مهم است یعنی جایگشت آنها مهم است) به‌صورت زیر:

$A=$ {(پ، پ، پ) و (پ، پ، ر) و (پ، ر، پ) و (ر، پ، پ) و (پ، ر، ر) و (ر، پ، ر) و (ر، ر، پ)}

در پیشامد B؛ چون قرار است تعداد روها بیشتر باشد پس دو حالت در نظر می‌گیریم اینکه دو بار رو آید یا سه بار رو آید البته جایگشت آنها را نیز در نظر می‌گیریم.

$B=$ {(ر، ر، ر) و (ر، ر، پ) و (ر، پ، ر) و (پ، ر، ر)}

حالا اشتراک آنها را حساب می‌کنیم.

$A\cap B=$ {(ر، ر، پ) و (ر، پ، ر) و (پ، ر، ر)}

که اشتراک آنها سه عضو دارد.
گزینه‌ی ۳ صحیح است.

نکته: تعداد عضوهای تفاضل متقارن برابر است با:

$$n[(A-B)\bigcup(B-A)]=n(A)+n(B)-2n(A\bigcap B)$$
$$n(A-B)=n(A)-n(A\bigcap B)$$

مثال ۱۹) خانواده‌ای دارای ٤ فرزند است. پیشامدهای A و B را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

A: فرزندان سوم و چهارم دختر باشند **B: تعداد فرزندان دختر از تعداد فرزندان پسر بیشتر باشد.**

پیشامد A - B چند عضو دارد؟

۱) ٤ ۲) ۵ ۳) ۱ ٤) ۳

پاسخ: *در پیشامد A تکلیف فرزند سوم و چهارم مشخّص است پس باید جایگشت‌های فرزند اوّل و دوم را مشخّص کنیم. در واقع مثل این است که بگوییم خانواده‌ای دارای دو فرزند است تعداد عضوهای فضای نمونه را به‌دست آوریم.*

$$A=\{(\text{د، د، پ، د}) \text{ و } (\text{د، د، د، پ}) \text{ و } (\text{د، د، د، د}) \text{ و } (\text{د، د، پ، پ})\}$$

پیشامد B: یا باید سه دختر و یا باید چهار دختر داشته باشند.

$$B=\{(\text{د، د، د، د}) \text{ و } (\text{د، د، د، پ}) \text{ و } (\text{د، د، پ، د}) \text{ و } (\text{د، پ، د، د}) \text{ و } (\text{پ، د، د، د})\}$$

حال A -B را حساب می‌کنیم.

$$A-B=\{(\text{د، د، پ، پ})\}$$

بنابراین گزینه ۳ صحیح است.

مثال۲۰) در کیسه‌ای ۳ مهره آبی، ٤ مهره قرمز و ۵ مهره‌ی سبز وجود دارد از این کیسه ۳ مهره به تصادف با هم انتخاب می‌کنیم پیشامد A را به‌صورت: «حداقل دو مهره همرنگ» باشد تعریف می‌کنیم تعداد عضوهای پیشامد A کدام است؟

۱) ۲۲۰ ۲) ۶۰ ۳) ۱۰۰ ٤) ۱۶۰

پاسخ: *می‌دانیم در کیسه ۱۲ = ۵ + ۴ + ۳ مهره وجود دارد می‌توانیم برای حل مسئله از متمم پیشامد A استفاده کنیم. ابتدا سه مهره را از دوازده مهره انتخاب می‌کنیم چون با هم خارج کردیم لذا:*

$$n(S)=\binom{12}{3}=\frac{12!}{3!(12-3)!}=\frac{12\times11\times10\times9!}{3\times2\times1\times9!}=220$$

متمم پیشامد A آن است که هیچ دو مهره‌ای هم‌رنگ نباشد. پس باید یک مهره از آبی و یک مهره از قرمز و یک مهره از سبز انتخاب کنیم. و چون مهم نیست که کدام مهره از کیسه‌ها انتخاب می‌شوند بنابراین از ترکیب استفاده می‌کنیم.

$$n(A')=\binom{5}{1}\times\binom{4}{1}\times\binom{3}{1}=\frac{5!}{1!(5-1)!}\times\frac{4!}{1!(4-1)!}\times\frac{3!}{1!(3-1)!}=\frac{5\times4!}{4!}\times\frac{4\times3!}{3!}\times\frac{3\times2!}{2!}$$
$$=5\times4\times3=60 \quad\Rightarrow\quad n(A)=220-60=160$$

بنابراین گزینه ۴ صحیح است.

تعریف احتمال:

اگر A پیشامدی از فضای نمونه‌ای S باشد، احتمال A را که با $p(A)$ نشان می‌دهیم بنابر دستور زیر محاسبه می‌کنیم.

$$p(A)=\frac{\text{تعداد اعضای } A}{\text{تعداد اعضای } S}=\frac{n(A)}{n(S)}$$

توجّه داشته باشید که همواره $0\leq p(A)\leq 1$ یعنی احتمال وقوع هر پیشامد حداکثر یک برای پیشامدهای حتمی و حداقل صفر برای پیشامدهای نشدنی است.

یک مثال ساده مطرح می‌کنیم سپس قوانین احتمال را بیان و مسائل احتمال را دسته‌بندی می‌کنیم.

مثال 21) خانواده‌ای دارای سه فرزند است مطلوب است احتمال آن که:

الف) هر سه فرزند پسر باشند.

ب) حداکثر یکی از آنها پسر باشد.

پاسخ: الف) $n(S)=2^3=8$ و پیشامد اینکه هر سه فرزند پسر باشد به‌صورت $A=\{(\text{پ، پ، پ})\}$ می‌باشد لذا $n(A)=1$ در نتیجه:

$$p(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{1}{8}$$

پاسخ: ب) چون قرار است حداکثر یکی از فرزندان پسر باشد بنابراین دو حالت خواهیم داشت اینکه هر سه نفر دختر باشند و یا دو نفر دختر و یک فرزند پسر باشد که حالت‌های زیر رخ می‌دهند:

$$B=\{(\text{د، د، د}) \text{ و } (\text{پ، د، د}) \text{ و } (\text{د، پ، د}) \text{ و } (\text{د، د، پ})\} \Rightarrow n(B)=4$$

$$\Rightarrow p(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$$

قوانین احتمال:

1) $p(A')=1-p(A)$ که احتمال متمم پیشامد A را نشان می‌دهد.

2) احتمال آن که حداقل یکی از دو پیشامد A یا B رخ دهد برابر است با $p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)$

3) احتمال آن که دقیقاً یکی از دو پیشامد A یا B رخ دهد، برابر است با

$$p\left((A-B)\cup(B-A)\right)=p(A)+p(B)-2p(A\cap B)$$

4) احتمال آن که پیشامد A رخ دهد و پیشامد B رخ ندهد یا فقط پیشامد A رخ دهد برابر است با:

$$p(A-B)=p(A\cap B')=p(A)-p(A\cap B)$$

5) احتمال آن که حداکثر یکی از دو پیشامد A یا B رخ دهد، برابر است با:

$$p(A'\cup B')=p(A\cap B)'=1-p(A\cap B)$$

6) اگر A و B دو پیشامد ناسازگار باشند آنگاه:

$$p(A\cup B)=p(A)+p(B)$$

7) **پیشامدهای دوبه‌دو ناسازگار:** اگر $A_1,A_2,\dots,A_n$ پیشامدهایی باشند که دو بدو با هم نتوانند رخ دهند در این صورت می‌گوییم این پیشامدها دو به‌دو ناسازگارند در این صورت: $p(A_1\cup A_2\cup\dots\cup A_n)=p(A_1)+p(A_2)+\dots+p(A_n)$

از پیشامدهای دوبه‌دو ناسازگار مثالی مطرح می‌کنیم.

مثال 22) کیسه‌ای دارای 9 مهرهٔ قرمز و 5 مهره آبی است. 5 مهره به تصادف و همزمان از این کیسه بیرون می‌آوریم آیا پیشامدهای زیر دوبه‌دو ناسازگارند؟

A: فقط 2 تا از مهره‌ها آبی باشد

B: فقط 3 تا از مهره‌ها آبی باشد

C: فقط 4 تا از مهره‌ها آبی باشد

پاسخ: بله چون پیشامدهای A و B و C دوبه‌دو به‌طور همزمان نمی‌توانند رخ دهند.

مثال 23) خانواده‌ای دارای 4 فرزند است، مطلوب است:

الف) احتمال آن که این خانواده 2 پسر و 2 دختر داشته باشد

ب) احتمال آن که تعداد پسرها بیش از تعداد دخترها باشد

ج) احتمال آن که فرزندان یک در میان پسر باشند

پاسخ: فضای نمونه‌ای برابر است با: $n(S) = 2^4 = 16$

الف) برای تشکیل پیشامد مطلوب از جایگشت‌های تکراری یا ترکیب استفاده می‌کنیم قرار هست خانواده دارای دو پسر و دو دختر باشد. یعنی (پ، پ، د، د)

$$n(A) = \binom{4}{2} = 6 \text{ یا } n(A) = \frac{4!}{2! \times 2!} = 6 \Rightarrow p(A) = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

ب) چون تعداد پسرها بیشتر از تعداد دخترهاست پس این خانواده یا سه پسر و یا چهار پسر خواهد داشت.

اگر سه پسر داشته باشد، یک دختر خواهد داشت یعنی (د، پ، پ، پ) باید جایگشت‌های آن را حساب کنیم یا از ترکیب استفاده کنیم.

$$\left.\begin{array}{l} (\text{د، پ، پ، پ}) \xrightarrow{\text{کل حالتها}} \dfrac{4!}{3! \times 1!} = 4 \\ (\text{پ، پ، پ، پ}) \longrightarrow 1 \quad \text{اگر چهار پسر داشته باشد فقط یک حالت اتفاق می‌افتد.} \end{array}\right\} \Rightarrow n(B) = ۴ + ۱ = ۵ \Rightarrow p(B) = \frac{۵}{۱۶}$$

ج) دو حالت خواهیم داشت $\{(\text{د، پ، د، پ}) \text{ یا } (\text{پ، د، پ، د})\}$ پس $n(C) = 2$ ، $p(C) = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$

مثال 24) در پرتاب 4 سکه‌ی سالم با هم، احتمال این که فقط 3 سکه رو یا فقط سه سکه پشت بیاید کدام است؟ (ریاضی 82)

1) $\frac{5}{16}$ 2) $\frac{7}{16}$ 3) $\frac{2}{3}$ 4) $\frac{1}{2}$

پاسخ:

$n(S) = 2^4 = 16$

برای تشکیل پیشامد مطلوب از جایگشت تکراری استفاده می‌کنیم. (از ترکیب هم می‌توان استفاده کرد)

$$\left.\begin{array}{l} (\text{پ، ر، ر، ر}) \Rightarrow \dfrac{4!}{3! \times 1!} = 4 \text{ یا } \dbinom{4}{3} = 4 \\ (\text{ر، پ، پ، پ}) \Rightarrow \dfrac{4!}{3! \times 1!} = 4 \end{array}\right. \Rightarrow n(A) = 8 \Rightarrow p(A) = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$$

گزینه‌ی 4 صحیح است.

مثال 25) در پرتاب 5 سکه با هم، با کدام احتمال، درست 3 سکه «پشت» ظاهر می‌شود؟

1) $\frac{5}{16}$ 2) $\frac{5}{32}$ 3) $\frac{3}{8}$ 4) $\frac{5}{8}$

پاسخ: تعداد عضوهای فضای نمونه برابر است با: $n(S) = 2^5 = 32$

چون قرار است دقیقاً 3 سکه پشت ظاهر شود یا از جایگشت تکراری استفاده می‌کنیم و یا از ترکیب؛

$$(\text{ر،ر،پ،پ،پ}) \Rightarrow n(A) = \frac{5!}{3! \times 2!} = 10 \text{ یا } n(A) = \binom{5}{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = 10$$

$$\Rightarrow p(A) = \frac{10}{32} = \frac{5}{16}$$

گزینه 1 صحیح است.

مثال 26) خانواده‌ای دارای 3 فرزند است که دوتایی آنها دوقلو هستند احتمال آن که بزرگترین فرزند دختر بوده و جزء دوقلوها نباشد، کدام است؟

1) $\frac{1}{2}$ 2) $\frac{1}{3}$ 3) $\frac{1}{4}$ 4) $\frac{3}{4}$

پاسخ: دوقلوها را یک فرزند در نظر می‌گیریم بنابراین:

$S=\{$(پسر، دوقلو) و (دختر، دوقلو) و (دوقلو، پسر) و (دوقلو، دختر)$\}$ و $A=\{$(دوقلو، پسر)$\}$

$$P(A)=\frac{1}{4}$$

گزینه 3 صحیح است.

مثال 27) در یک خانواده‌ی 4 فرزندی، با کدام احتمال 2 فرزند پسر یا 3 فرزند دختر است؟ (تجربی 90)

1) $\frac{3}{8}$ 2) $\frac{9}{16}$ 3) $\frac{5}{8}$ 4) $\frac{3}{4}$

پاسخ: این دو پیشامد ناسازگار هستند بنابراین:

P (3 فرزند دختر یا 2 فرزند پسر) = P(2 فرزند پسر) + P (3 فرزند دختر) $=\frac{\binom{4}{2}}{2^4}+\frac{\binom{4}{3}}{2^4}=\frac{6}{16}+\frac{4}{16}=\frac{5}{8}$

گزینه 3 صحیح است.

مثال 28) در یک بیمارستان 5 نوزاد در یک روز متولد شده‌اند. با کدام احتمال، لااقل دو نفر از آنان دختر است؟ (تجربی 88 خارج از کشور)

1) $\frac{5}{16}$ 2) $\frac{3}{8}$ 3) $\frac{7}{16}$ 4) $\frac{13}{16}$

پاسخ: این مسئله را از راه متمم حل می‌کنیم.

P (حداقل دو فرزند دختر) $=1-P$ (یک دختر یا صفر دختر) $=1-(P$ (صفر دختر)) + P (یک دختر))=

$$1-\left(\frac{\binom{5}{0}}{2^5}+\frac{\binom{5}{1}}{2^5}\right)=1-\left(\frac{1}{32}+\frac{5}{32}\right)=1-\frac{6}{32}=\frac{26}{32}=\frac{13}{16}$$

گزینه‌ی 4 صحیح است.

مثال 29) در پرتاب دو تاس با هم احتمال آن که مجموع اعداد رو شده برابر 5 باشد، کدام است؟ (ریاضی 80)

1) $\frac{1}{9}$ 2) $\frac{1}{12}$ 3) $\frac{1}{18}$ 4) $\frac{1}{36}$

پاسخ:

$$n(S)=6^2=36\quad,\quad A=\{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\}\Rightarrow P(A)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$$

گزینه 1 پاسخ صحیح است.

مثال 30) دو تاس را با هم پرتاب می‌کنیم. با کدام احتمال مجموع دو عدد رو شده، مضرب 4 است؟ (تجربی 92)

1) $\frac{2}{9}$ 2) $\frac{5}{18}$ 3) $\frac{1}{4}$ 4) $\frac{5}{12}$

پاسخ: تعداد عضوهای فضای نمونه برابر است با $n(S)=6^2=36$ امّا پیشامد مطلوب هنگامی مضرب چهار خواهد بود که مجموع دو عدد 4 یا 8 یا 12 شود حالت‌های زیر را در نظر می‌گیریم.

$$A=\{(1,3),(2,2),(3,1),(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2),(6,6)\}\quad\Rightarrow\quad n(A)=9$$

$$\Rightarrow P(A)=\frac{9}{36}=\frac{1}{4}$$

گزینه 3 صحیح است.

مثال 31) در پرتاب دو سکه و یک تاس با هم، احتمال اینکه حداقل یک سکه رو و عدد تاس مضرب 3 باشد، کدام است؟ (تجربی 91 خارج از کشور)

1) $\frac{1}{12}$ 2) $\frac{1}{6}$ 3) $\frac{1}{4}$ 4) $\frac{1}{3}$

پاسخ: تعداد عضوهای فضای نمونه‌ای برابر است با: $n(s)=2\times2\times6=24$ و در پیشامد مطلوب باید حالت‌هایی که یک یا دو سکه رو می‌آیند و تاس اعداد 3 یا 6 می‌آید را در نظر بگیریم. بنابراین داریم:

$A=\{$(6، ر، ر) و (3، ر، ر) و (6، ر، پ) و (3، ر، پ) و (6، پ، ر) و (3، پ، ر)$\} \Rightarrow n(A)=6$

$$\Rightarrow P(A)=\frac{6}{24}=\frac{1}{4}$$

گزینه 3 صحیح است.

مثال 32) در آزمایشگاهی 3 موش سفید و5 موش سیاه نگهداری می شوند اگر به طور تصادفی 4 موش از بین آنها جهت آزمایش برداشته شوند با کدام احتمال فقط یکی از موش های مورد آزمایش سفید است؟

1) $\frac{2}{7}$ 2) $\frac{2}{5}$ 3) $\frac{3}{7}$ 4) $\frac{3}{5}$

پاسخ: بدون در نظر گرفتن رنگ موش ها در آزمایشگاه ، 8 موش وجود دارد اگر چهار موش به طور تصادفی و یک جا انتخاب کنیم.

$$n(S)=\binom{8}{4}=\frac{8!}{4!(8-4)!}=70$$

اگر چهار موش به تصادف و یکجا انتخاب کنیم داریم:

چون قرار است یک موش سفید باشد باید سه موش دیگر سیاه باشند بنابراین پیشامد مطلوب برابر است با:

$$n(A)=\binom{3}{1}\times\binom{5}{3}=\frac{3!}{1!\times(3-1)!}\times\frac{5!}{3!(5-3)!}=\frac{3\times2!}{2!}\times\frac{5\times4\times3!}{3!\times2!}=3\times10=30$$

$$P(A)=\frac{30}{70}=\frac{3}{7}$$

گزینه 3 صحیح است.

مثال 33) چهار رقم 3 ، 2 ، 1 و 0 را به تصادف کنار هم قرار می‌دهیم تا عددی چهار رقمی حاصل شود، با کدام احتمال یک عدد چهار رقمی مضرب 6 حاصل می‌شود؟ (تجربی 89 ـ خارج از کشور)

1) $\frac{1}{3}$ 2) $\frac{5}{12}$ 3) $\frac{4}{9}$ 4) $\frac{5}{9}$

پاسخ:

قرار است یک عدد چهار رقمی نوشته شود فضای نمونه به‌صورت زیر خواهد بود. دقّت داشته باشیم چون عدد چهار رقمی است و بین ارقام صفر داریم نمی‌توانیم اوّلین رقم سمت چپ را صفر قرار دهیم بنابراین برای اوّلین رقم سمت چپ سه انتخاب داریم (اعداد 1 یا 2 یا 3) حال برای بقیّه مکان‌ها می‌توان از صفر استفاده کرد لذا برای دومین رقم سمت چپ نیز سه انتخاب داریم چون صفر جزء انتخاب‌ها است برای رقم دهگان دو انتخاب و برای رقم یکان یک انتخاب باقی می‌ماند. یعنی:

$$3\times3\times2\times1\Rightarrow n(S)=18$$

دقّت داشته باشیم ما با توجّه به گزینه‌ها مسئله را حل کردیم یعنی تکرار مجاز نباشد. برای اینکه عدد مضرب 6 باشد باید بر 3 و 2 بخش‌پذیر باشد می‌دانیم عددی بر 2 بخش‌پذیر است که رقم یکان آن زوج باشد یعنی با توجّه به اعدادی که داریم صفر یا دو می‌توانند رقم یکان را تشکیل دهند و عددی بر 3 بخش‌پذیر است که مجموع ارقام آن بر 3 بخش‌پذیر باشد لذا حالت‌های زیر را داریم. جمع اعداد 3، 2، 1 و 0 برابر با شش است پس این اعداد چهار رقمی همیشه بر 3 بخش‌پذیر هستند. پس اعداد زوج را در دو حالت در نظر می‌گیریم: رقم یکان صفر باشد یا رقم یکان 2 باشد.

حالت اول (رقم یکان صفر): $3\times2\times1\times1=6$ حالت دوم (رقم یکان 2): $2\times2\times1\times1=4 \Rightarrow$ جمع $=6+4=10$

$$\Rightarrow P(A)=\frac{10}{18}=\frac{5}{9}$$

گزینه 4 صحیح است.

مثال 34) اگر A و B دو پشامد ناسازگار باشند و $P(A')=P(B)=\frac{1}{3}$ آنگاه $P(A\cup B)$ کدام است؟

1) 1 2) $\frac{2}{3}$ 3) $\frac{11}{12}$ 4) $\frac{5}{6}$

پاسخ:

$$P(A')=1-P(A)\Rightarrow P(A)=\frac{2}{3}$$
$$P(B)=\frac{1}{3}$$
$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=1$$

گزینه 1 صحیح است.

مثال 35) اگر $P(A')=\frac{2}{3}$ و $P(B)=\frac{1}{6}$ و $A'\cap B=\varnothing$، آنگاه احتمال وقوع پیشامد A' یا B چیست؟

1) $\frac{2}{3}$ 2) $\frac{7}{9}$ 3) $\frac{5}{6}$ 4) $\frac{13}{18}$

پاسخ:

چون $A'\cap B=\varnothing$ در نتیجه دو پیشامد A و B ناسازگار هستند یعنی $P(A'\cap B)=0$ احتمال وقوع پیشامد A یا B یعنی احتمال وقوع اجتماع دو پیشامد.

$$P(A'\cup B)=P(A')+P(B)-P(A'\cap B)=\frac{2}{3}+\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$$

گزینه 3 صحیح است.

مثال 36) **احتمال آن که دانش‌آموزی در درس فیزیک قبول شود 0/55 و در درس شیمی قبول شود 0/6 است اگر احتمال آن که حداقل در یکی از دو درس قبول شود 0/75 باشد با کدام احتمال در هر دو درس قبول می‌شود؟** (ریاضی 81)

1) 0/35 2) 0/4 3) 0/45 4) 0/5

پاسخ:

باید احتمال اجتماع دو پیشامد را بنویسیم تا به جواب برسیم.

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\Rightarrow\frac{75}{100}=\frac{55}{100}+\frac{6}{10}-P(A\cap B)$$
$$P(A\cap B)=\frac{55}{100}+\frac{6}{10}-\frac{75}{100}=\frac{55+60-75}{100}=\frac{40}{100}$$

گزینه 2 صحیح است.

مثال 37) **در ظرفی 4 مهره‌ی سفید و 5 مهره‌ی سیاه موجود است به تصادف 3 مهره از ظرف خارج می‌کنیم با کدام احتمال مهره‌های خارج شده همرنگ‌اند؟** (تجربی 92 خارج از کشور)

1) $\frac{1}{6}$ 2) $\frac{3}{14}$ 3) $\frac{2}{9}$ 4) $\frac{5}{12}$

پاسخ: بدون در نظر گرفتن رنگ در ظرف 9 مهره وجود دارد می‌خواهیم سه مهره به تصادف خارج کنیم، تعداد عضوهای فضای نمونه برابر است با:

$$n(S)=\binom{9}{3}=\frac{9!}{3!(9-3)!}=\frac{9!}{3!\times 6!}=\frac{9\times 8\times 7\times 6!}{3\times 2\times 1\times 6!}=3\times 4\times 7=84$$

قرار است سه مهره هم‌رنگ باشند یعنی یا هر سه سفید و یا هر سه سیاه بنابراین دو پیشامد ناسازگار می‌باشند. بنابراین سه مهره از چهار مهره سفید انتخاب می‌کنیم یا 3 مهره از پنج مهره سیاه در نتیجه:

$$p(A\cup B)=p(A)+p(B)=\frac{\binom{4}{3}}{84}+\frac{\binom{5}{3}}{84}=\frac{\frac{4!}{3!\times 1!}}{84}+\frac{\frac{5!}{3!\times(5-3)!}}{84}=\frac{4}{84}+\frac{10}{84}=\frac{14}{84}=\frac{1}{6}$$

گزینه 1 صحیح است.

مثال 38) تعداد مسافرین در یک هتل 72 نفرند که 23 نفر آنان تاجر و 12 نفر برای اوّلین بار سفر کرده‌اند. 8 نفر از این تاجرین برای اوّلین بار سفر کرده‌اند. اگر فردی به تصادف از بین آنها انتخاب شود، با کدام احتمال این فرد نه تاجر است و نه برای اوّلین بار سفر کرده است؟ (ریاضی 87 ـ خارج از کشور)

1) $\frac{4}{9}$ 2) $\frac{5}{9}$ 3) $\frac{5}{8}$ 4) $\frac{3}{4}$

پاسخ: پیشامد تاجر بودن را با A و پیشامد اوّلین سفر را با B نشان می‌دهیم. مسئله $A'\cap B'$ را هرچند قوانین دمورگان در کتاب درسی موجود نیست این قوانین به‌صورت زیر می‌باشند:

الف) $(A'\cap B')=(A\cup B)'$

ب) $A'\cup B'=(A\cap B)'$

در نتیجه:

$$P(A'\cap B')=P(A\cup B)'=1-P(A\cup B)=1-\left(P(A)+P(B)-\underline{P(A\cap B)}\right)$$

$$=1-\left(\frac{23}{72}+\frac{12}{72}-\frac{8}{72}\right)=1-\frac{27}{72}=\frac{45}{72}=\frac{5}{8}$$

یعنی تاجرانی که برای اوّلین بار سفر کرده‌اند که تعداد آنها 8 نفر است.

گزینه 3 صحیح است.

مثال 39) احتمال قبولی شخصی در امتحان شیمی $\frac{1}{2}$ و در درس ریاضی $\frac{1}{4}$ و در هر دو درس $\frac{1}{6}$ می‌باشد احتمال آن که فقط در درس ریاضی قبول شود کدام است؟

1) $\frac{1}{4}$ 2) $\frac{3}{4}$ 3) $\frac{5}{12}$ 4) $\frac{1}{12}$

پاسخ:

فقط در ریاضی قبول شود یعنی در شیمی قبول نشود اگر A پیشامد قبول شدن در درس ریاضی و B پیشامد قبول شدن در درس شیمی باشد. لذا، مسئله $p(A-B)$ را می‌خواهد.

$$P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)=\frac{1}{4}-\frac{1}{6}=\frac{3-2}{12}=\frac{1}{12}$$

گزینه 4 صحیح است.

پیشامدهای مستقل:

اگر دو پیشامد به قسمی باشند که وقوع یا عدم وقوع یکی در وقوع دیگری تأثیری نداشته باشد، آن دو پیشامد را مستقل می‌گوییم:
به عنوان مثال اگر در مسئله‌ای مطرح شود که احتمال آن که رضا در درس فیزیک قبول شود 0/4 و احتمال آن که احمد در درس فیزیک

قبول شود 0/7 است این دو پیشامد مستقل از هم هستند چون قبول نشدن رضا تأثیری در قبول شدن احمد ندارد.

به عنوان مثال دیگر می‌دانیم گروه خونی افراد جامعه از نوع $\boldsymbol{A}$ و $\boldsymbol{B}$ و $\boldsymbol{AB}$ و $\boldsymbol{O}$ می‌باشند اگر سه فرد از این جامعه انتخاب کنیم، مشاهده نوع گروه خونی آنها مستقل از هم است.

یا به دنیا آمدن فرزندان در یک خانواده پیشامدهای مستقل از هم می‌باشند و یا انداختن دو تاس آبی و قرمز را در نظر بگیرید و پیشامد $\boldsymbol{A}$ را رو شدن عدد زوج در تاس آبی و پیشامد $\boldsymbol{B}$ را رو شدن عدد اول در تاس قرمز فرض کنید، این دو پیشامد مستقل از هم می‌باشند زیرا $\boldsymbol{A}$ رخ بدهد یا رخ ندهد پیشامد $\boldsymbol{B}$ می‌تواند رخ دهد.

ولی باز با این وجود برای تشخیص مستقل بودن از رابطه‌ی زیر استفاده می‌کنیم اگر $\boldsymbol{A}$ و $\boldsymbol{B}$ دو پیشامد مستقل باشند آنگاه $\boldsymbol{P(A \cap B) = P(A) \times P(B)}$ خواهد بود.

مثال 40) **مادری صاحب سه فرزند است. احتمال آن که دو فرزند اوّل پسر باشند چقدر است؟**

پاسخ: *جنسیّت نوزادان دو پیشامد مستقل است پس:*

P (دو فرزند اوّل پسر) = P (فرزند اوّل پسر و فرزند دوم پسر)= P (فرزند اوّل پسر) × P (فرزند دوم پسر) $= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

مثال 41) **مطالعات ژنتیکی نشان داده است که 40% ژن‌های تعیین کننده عامل RH خون منفی‌اند. مطلوب است احتمال آن که فردی دارای RH منفی باشد.**

پاسخ: *می‌دانیم برای آن که فردی دارای RH منفی باشد لازم است که دو ژن منفی داشته باشد. و چون این ژن‌ها را از هر یک از والدین خود به ارث می‌برد می‌توانیم منفی بودن هر یک از این ژن‌ها را مستقل فرض کنیم بنابراین:*

$\boldsymbol{p}$ (منفی $\boldsymbol{RH}$) $= \boldsymbol{p}$ (هر دو ژن منفی) $= \boldsymbol{p}$ (یک ژن منفی) $\boldsymbol{p}$ (یک ژن منفی) $= (0/4)(0/4) = 0/16$

مثال 42) **احتمال آن که در خانواده‌ای اوّلین فرزند با RH منفی فرزند سوم خانواده باشد چقدر است؟**

پاسخ: *چون اوّلین فرزند با RH منفی فرزند سوم است لذا دو فرزند اوّل و دوم دارای RH منفی نیستند لذا احتمال آن برابر است با:*

$$\boldsymbol{P} = (1 - 0/16)(1 - 0/16)(0/16) = 0/112896$$

مثال 43) **خانواده‌ای دارای سه فرزند است. مطلوب است احتمال آن که RH خون هر سه فرزند یکی نباشد.**

پاسخ: *از راه متمم پیشامدها مسئله را حل می‌کنیم یعنی حالتی که RH همه یکی باشد را به‌دست آوریم و از روی آن احتمال پیشامد مطلوب را به‌دست می‌آوریم.*

$\boldsymbol{P(A')} = \boldsymbol{P}$ (همه یکسان باشد RH)= P (هر سه منفی باشد)+ P (هر سه منفی نباشد)

می‌دانیم $\boldsymbol{P}$ (منفی $\boldsymbol{RH}$) =0/16 بنابراین:

$$\boldsymbol{P(A')} = (0/16) \times (0/16) \times (0/16) + (0/84)(0/84)(0/84) = 0/004096 + 0/592704 = 0/59$$

مثال 44) **تاس سالمی را دو بار پرتاب می‌کنیم. فرض کنید A پیشامد اینکه مجموع اعداد دو تاس 9 باشد و B پیشامد مشاهده‌ی عدد 3 در اوّلین پرتاب تاس باشد، آیا A و B مستقل‌اند؟ چرا؟**

پاسخ: $\boldsymbol{n(S)} = 6^2 = 36$ *و پیشامدهای A و B به‌صورت زیر می‌باشند:*

$$\boldsymbol{A} = \{(3,6),(4,5),(5,4),(6,3)\} \Rightarrow \boldsymbol{n(A)} = 4 \Rightarrow \boldsymbol{p(A)} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

$$\boldsymbol{B} = \{(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6)\} \Rightarrow \boldsymbol{n(B)} = 6 \Rightarrow \boldsymbol{P(B)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$\boldsymbol{A \cap B} = \{(3,6)\} \Rightarrow \boldsymbol{n(A \cap B)} = 1 \Rightarrow \boldsymbol{P(A \cap B)} = \frac{1}{36}$$

حال باید رابطه $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ *را بررسی می‌کنیم.*

$$\frac{1}{9} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{54} \neq \frac{1}{36}$$

تساوی برقرار نیست بنابراین دو پیشامد مستقل نیستند.

مثال 45) اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند ثابت کنید:

الف) A' و B مستقل‌اند ب) A و B' مستقل‌اند ج) A' و B' مستقل‌اند

پاسخ: چون A و B مستقل هستند لذا $P(A\cap B)=P(A)P(B)$ برای اثبات سه رابطه داریم:

الف)

$$P(A'\cap B)=P(B-A)=P(B)-P(A\cap B)=P(B)-P(A)P(B)=P(B)(1-P(A))$$

$$=P(B)\times P(A')\Rightarrow$$ یعنی A' و B مستقل اند

ب)

$$P(A\cap B')=P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)=P(A)-P(A)P(B)=P(A)(1-P(B))$$

$$=p(A)p(B')\Rightarrow$$ A و B' مستقل اند

ج)

$$P(A'\cap B')=P(A\cup B)'=1-P(A\cup B)=1-\big(P(A)+P(B)-P(A\cap B)\big)$$

$$=1-(P(A)+P(B)-P(A)P(B))=1-(P(A)+P(B)(1-P(A))$$

$$=1-P(A)-P(B)(1-P(A))=(1-P(A))(1-P(B))=P(A')P(B')\Rightarrow$$ A' و B' مستقل اند.

نکته: عکس مثال 45 نیز برقرار اســت به عنوان مثال اگر A' و B مســتقل باشــند می‌توان نتیجه گرفت A و B نیز مستقل هستند.

مثال 46) در گروه زنان ساکن یک روستا، 60 درصد آنان تحصیلات ابتدایی و 25 درصد آنان مهارت قالی بافی دارند. اگر یک فرد از این گروه انتخاب شود. با کدام احتمال این فرد تحصیلات ابتدایی یا مهارت قالی بافی دارد؟ (تجربی ـ 90)

1) 0/7 2) 0/75 3) 0/8 4) 0/85

پاسخ: اگر A پیشامد تحصیلات ابتدایی و B پیشامد مهارت قالی‌بافی باشند بنابراین:

$$P(A)=\frac{60}{100}\quad,\quad P(B)=\frac{25}{100}$$

دو پیشامد A و B مستقل از هم هستند چون وقوع یکی تأثیری در وقوع دیگری ندارد.

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A)\times P(B)$$

$$=\frac{60}{100}+\frac{25}{100}-(\frac{60}{100}\times\frac{25}{100})=\frac{85}{100}-\frac{60}{400}=\frac{340-60}{400}=\frac{280}{400}=\frac{28}{40}=0/7$$

گزینه 1 صحیح است.

مثال 47) چهار دانش‌آموز یک کلاس که بر یک نیمکت نشسته باشند، با کدام احتمال ماه تولد حداقل دو نفر از آنها یکسان است؟ (تجربی 92 خارج از کشور)

1) $\frac{19}{48}$ 2) $\frac{41}{96}$ 3) $\frac{23}{48}$ 4) $\frac{55}{96}$

پاسخ: از متمم استفاده می‌کنیم. ابتدا احتمال اینکه ماه تولد چهار نفر متفاوت باشد را به‌دست می‌آوریم چون هر نفر می‌تواند در یکی از دوازده ماه سال متولد شود بنابراین هر کدام از آنها 12 حالت برای ماه تولدشان دارند طبق اصل ضرب داریم:

$$n(S)=12\times12\times12\times12\Rightarrow n(S)=12^4$$

چون قرار شــد ماه‌های تولد متفاوت را در ابتدا حســاب کنیم بنابراین نفر اوّل می‌تواند در یکی از دوازده ماه متولد شــود و نفر دوم در یازده ماه باقی‌مانده و نفر سوم در ده ماه باقی‌مانده و نفر چهارم در نه ماه بنابراین:

$$n(A')=12\times11\times10\times9$$

$$\Rightarrow P(A')=\frac{12\times11\times10\times9}{12\times12\times12\times12}=\frac{55}{96}\Rightarrow P(A)=1-\frac{55}{96}=\frac{41}{96}$$

بنابراین گزینه 2 صحیح است.

مثال 48) خانواده‌ای دارای 4 فرزند است. می‌دانیم که دو فرزند اوّل آنها پسر است. احتمال آن که دو فرزند دیگر این خانواده دختر باشند کدام است؟ (تجربی 83)

1) $\frac{3}{16}$ 2) $\frac{1}{4}$ 3) $\frac{5}{16}$ 4) $\frac{3}{8}$

پاسخ: جنسیّت فرزندان مستقل از هم می‌باشد از اینکه دو فرزند اول پسر هستند تأثیری در فرزندان سوم و چهارم ندارد لذا:

$$P\ (\text{فرزند سوم و چهارم دختر})=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

بنابراین گزینه 2 صحیح است.

مثال 49) اگر دو پیشامد A و B مستقل باشند و $P(A)=\frac{1}{4}$ و $P(B)=\frac{1}{3}$ حاصل $P(A\cup B')$ کدام است؟ (آزاد ریاضی 81)

1) $\frac{1}{4}$ 2) $\frac{3}{4}$ 3) $\frac{1}{2}$ 4) 1

پاسخ: چون A و B مستقل هستند لذا A و B' نیز مستقل می‌باشند بنابراین داریم:

$$P(A\cup B')=P(A)+P(B')-P(A\cap B')=P(A)+P(B')-P(A)\times P(B')$$

از طرفی چون $P(B)=\frac{1}{3}$ در نتیجه

$$P(B')=1-P(B)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow P(A\cup B')=\frac{1}{4}+\frac{2}{3}-\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{3+8-2}{12}=\frac{9}{12}=\frac{3}{4}$$

گزینه 2 صحیح است.

احتمال شرطی: در بعضی مواقع بیان می‌کنند که پیشامد A رخ داده، و می‌خواهند احتمال رخ دادن پیشامد B را حساب کنند. به عنوان مثال تاسی را دو بار می‌ریزند و می‌گویند مجموع اعداد رو شده بزرگتر از 10 است، احتمال آن که هر دو عدد رو شده شش باشد چقدر است. بنابراین اطلاعاتی که در اختیار ما قرار می‌دهند در اکثر موارد باعث می‌شود فضای نمونه‌ای ما کوچکتر شود.

مثال 50) فرض کنید از ظرفی که شامل 5 مهره سفید و 4 مهره سیاه است، مهره‌ای به تصادف خارج کرده‌ایم:

الف) احتمال آن که این مهره سفید باشد چقدر است؟

ب) اگر مهره خارج شده از ظرف سیاه باشد و این مهره را کنار بگذاریم و مهره دوم را به تصادف خارج کنیم، احتمال اینکه مهره دوم سفید باشد چقدر است؟

پاسخ:

الف)

$$n(S)=\binom{9}{1}=\frac{9!}{1!(9-1)!}=9\quad,\quad n(A)=\binom{5}{1}=\frac{5!}{1!(5-1)!}=5\qquad\Rightarrow P(A)=\frac{5}{9}$$

ب) مهره اوّل که خارج شد سیاه است آن را کنار می‌گذاریم بنابراین در ظرف 5 مهره سفید و 3 مهره سیاه وجود دارد حال باید از این ظرف جدید یک مهره خارج کنیم و احتمال سفید بودن را به‌دست آوریم ظرف دارای 8 مهره است.

$$n(S)=\binom{8}{1}=\frac{8!}{1!(8-1)!}=8\quad,\quad n(B)=\binom{5}{1}=\frac{5!}{1!(5-1)!}=5\qquad\Rightarrow P(B)=\frac{5}{8}$$

همانطور که ملاحظه می‌شود در دو قسمت الف و ب مثال احتمال سفید بودن مهره را حساب کردیم ولی جواب‌ها یکسان نشد زیرا در قسمت ب اطلاعاتی داریم که احتمال آمدن مهرهٔ سفید را تغییر می‌دهد.

تعریف: فرض کنید $\boldsymbol{A}$ و $\boldsymbol{B}$ دو پیشامد باشند، به قسمتی که $\boldsymbol{P(B)} > 0$، در این صورت اگر $\boldsymbol{B}$ رخ داده باشد احتمال وقوع $\boldsymbol{A}$ را که با نماد $\boldsymbol{P}(\mathrm{A} \mid \mathrm{B})$ نشان می‌دهیم و آن را احتمال شرطی $\boldsymbol{A}$ به شرط وقوع $\boldsymbol{B}$ می‌گوییم، بنابر دستور زیر محاسبه می‌شود:

$$\boldsymbol{P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}}$$

این تعریف را می‌توان ساده کرد:

$$\boldsymbol{P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{n(A \cap B)}{n(S)}}{\frac{n(B)}{n(S)}} = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}}$$

تذکر: از آنجایی که در تعریف بالا $\mathrm{P(B)}$ در مخرج کسر قرار می‌گیرد شرط $\mathrm{P(B)} > 0$ ضروری است.

مثال 51) اگر $\boldsymbol{A}$ و $\boldsymbol{B}$ دو پیشامد باشند و $\boldsymbol{P(A)} = \frac{3}{14}$ و $\boldsymbol{P(B)} = \frac{5}{14}$ و $\boldsymbol{P(A \cup B)} = \frac{4}{7}$ باشند، مطلوب است محاسبه $\boldsymbol{P(A \mid B)}$

پاسخ: *ابتدا $\boldsymbol{P(A \cap B)}$ را حساب می‌کنیم.*

$$\boldsymbol{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)} \Rightarrow \frac{3}{7} = \frac{3}{14} + \frac{5}{14} - \boldsymbol{P(A \cap B)} \Rightarrow \boldsymbol{P(A \cap B)} = \frac{3}{14} + \frac{5}{14} - \frac{3}{7}$$

$$\boldsymbol{P(A \cap B)} = \frac{3+5-6}{14} = \frac{2}{14} = \frac{1}{7} \Rightarrow \boldsymbol{P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}} = \frac{\frac{1}{7}}{\frac{5}{14}} = \frac{14}{35} = \frac{2}{5}$$

مثال 52) **در یک کلاس، %20 دانش‌آموزان در امتحان ریاضی نمره‌ی کامل گرفته‌اند و %15 آنها در امتحان زیست نمره‌ی کامل اخذ کرده‌اند و ده درصد در هر دو درس نمره‌ی کامل گرفته‌اند. احتمال اینکه دانش‌آموزی از این کلاس نمره‌ی زیست را کامل گرفته باشد به شرط آن که نمره‌ی ریاضی را نیز کامل اخذ کرده باشد چقدر است؟**

پاسخ: *پیشامد A را نمره کامل ریاضی و پیشامد B را نمره کامل زیست در نظر می‌گیریم. می‌خواهیم $\mathrm{p(B|A)}$ را حساب کنیم.*

$$\boldsymbol{P(B \mid A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}} = \frac{\%10}{\%20} = \frac{1}{2}$$

نکته: اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند آنگاه $P(A \mid B) = P(A)$ و برعکس:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B)}{P(B)} = P(A)$$

از تعریف $P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ می‌توان به‌صورت زیر احتمال اشتراک دو پیشامد را حساب کرد.

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(A \mid B)$$

رابطه را طرفین وسطین کردیم.

q **مثال 53) دو مهره، متوالیاً و بدون جایگذاری از جعبه‌ای که شامل 4 مهرهٔ سفید و 6 مهرهٔ سیاه است خارج می‌کنیم. مطلوب است احتمال آن که مهرهٔ اوّل سفید و مهرهٔ دوم سیاه باشد.**

p **پاسخ:** اگر سفید بودن مهرهٔ اوّل را با A و سیاه بودن مهرهٔ دوم را با B نشان دهیم می‌خواهیم $P(A\text{Ç}\,B)$ را حساب کنیم.

برای محاسبه $p(A)$ چون در جعبه چهار مهرهٔ سفید داریم بنابراین:

$$n(A)=\binom{4}{1}=\frac{4!}{1!\,3!}=4\ \ ,\ n(S)=\binom{10}{1}=\frac{10!}{1!(10-1)!}=10\Rightarrow P(A)=\frac{4}{10}$$

کل مهره‌های موجود در جعبه 10 تاست لذا:

وقتی مهرهٔ اوّل بدون جایگذاری خارج شود در حال حاضر در جعبه سه مهرهٔ سفید و 6 مهرهٔ سیاه وجود دارد و کل مهره‌ها 9 تاست.

$$P(B\mid A)=\frac{\binom{6}{1}}{\binom{9}{1}}=\frac{6}{9}$$

$$\Rightarrow P(A\ \mathbf{I}\ B)=P(A)\times P(B\mid A)=\frac{4}{10}\times\frac{6}{9}=\frac{24}{90}$$

q **مثال 54) تاسی را پرتاب می‌کنیم. اگر بدانیم عدد رو شده بزرگتر از 3 است احتمال آن که فرد باشد را حساب کنید.**

p **پاسخ:** پیشامد $\boldsymbol{A}$ را عدد بزرگتر از 3 و پیشامد $\boldsymbol{B}$ را عدد فرد در نظر می‌گیریم.

$$A=\{4,5,6\}\quad,\quad B=\{1,3,5\}\quad\Rightarrow\quad A\ \mathbf{I}\ B=\{5\}$$

$$\Rightarrow P(B\mid A)=\frac{n(A\ \mathbf{I}\ B)}{n(A)}=\frac{1}{3}$$

q **مثال 55) در پرتاب دو تاس با هم، می‌دانیم جمع دو عدد رو شده کم‌تر از 10 است. با کدام احتمال هر دو عدد رو شده، فرد هستند؟** (ریاضی 83)

1) $\frac{4}{15}$ 2) $\frac{2}{9}$ 3) $\frac{1}{5}$ 4) $\frac{1}{4}$

p **پاسخ:** بهتر است حالتی که مجموع اعداد رو شده ده و یا بیشتر از ده است را در نظر بگیریم و آن را از روی کل عضوهای فضای نمونه کم کنیم. چون دو تاس پرتاب شد لذا تعداد عضوهای فضای نمونه $n(S)=6^2=36$ است.

$$A'=\{(4,6),(5,5),(5,6),(6,4),(6,6),(6,5)\}$$

متمم پیشامد A دارای شش عضو است در نتیجه پیشامد A دارای 30 = 6 - 36 عضو است پس فضای نمونه‌ی جدید دارای 30 عضو است. که باید از بین آنها حالت‌هایی را در نظر بگیریم که هر دو عدد فرد هستند که دارای 8 عضو است.

$$B=\{(1,1),(1,3),(1,5),(3,1),(3,3),(3,5),(5,1),(5,3)\}$$

$$\Rightarrow P(B\mid A)=\frac{n(B)}{n(A)}=\frac{8}{30}=\frac{4}{15}$$

(هر دو عدد رو شده فرد به شرط اینکه مجموعشان کمتر از ده باشد)

گزینه 1 صحیح است.

q **مثال 56) در یک خانواده‌ی سه فرزندی، می‌دانیم یکی از فرزندان پسر است. با کدام احتمال دو فرزند دیگر، دختر است؟** (تجربی 89 خارج از کشور)

1) $\frac{3}{8}$ 2) $\frac{3}{7}$ 3) $\frac{4}{7}$ 4) $\frac{5}{8}$

p **پاسخ:** می‌دانیم $n(S)=2^3=8$ برای تشکیل فضای نمونه جدید چون یکی از فرزندان پسر است در نتیجه حالت (دختر، دختر، دختر) از روی کل

حالت‌ها کم می‌شود لذا فضای نمونه‌ای جدید دارای 7 عضو است حال مسئله را در فضای نمونه‌ای جدید حل می‌کنیم. قرار است دو فرزند دیگر دختر باشند حالت‌های زیر رخ می‌دهند:

$$A=\{(\text{دختر، دختر، پسر})\ \text{و}\ (\text{دختر، پسر، دختر})\ \text{و}\ (\text{پسر، دختر، دختر})\} \Rightarrow n(A)=\binom{3}{2}=\frac{3!}{2!1!}=3$$

$$\Rightarrow P(A)=\frac{3}{7}$$

گزینه 2 صحیح است.

مثال 57) در آزمایشگاهی 5 موش سفید و 3 موش سیاه نگهداری می‌شوند. به تصادف متوالیاً سه موش از بین آنها انتخاب می‌شود. با کدام احتمال اولین موش سفید و سومین موش سیاه است. (تجربی 88)

1) $\frac{11}{56}$ 2) $\frac{17}{56}$ 3) $\frac{13}{56}$ 4) $\frac{15}{56}$

پاسخ: در صورت مسئله اشاره‌ای نشده که موش‌ها را بدون جایگذاری یا با جایگذاری خارج کرده است باید به گزینه‌ها توجّه شود حالتی که بدون جایگذاری خارج شده است حل می‌کنیم و جواب آن را با گزینه‌ها مقایسه می‌کنیم.

مسئله را به دو روش حل می‌کنیم. در آزمایشگاه 8 موش وجود دارد.

روش اوّل: ممکن است موش دوم سفید و یا سیاه باشد پس دو حالت در نظر می‌گیریم.

$$P(A)=P\ (\text{موش سوم سیاه و موش دوم سفید و موش اوّل سفید})+P\ (\text{موش سوم سیاه و موش دوم سیاه و موش اوّل سفید})$$

وقتی موش‌ها بدون جایگذاری خارج می‌شوند با خارج شدن هر موش برای موش بعدی از تعداد کل آنها یکی کم می‌شود.

$$P(A)=\frac{\binom{5}{1}}{\binom{8}{1}}\times\frac{\binom{4}{1}}{\binom{7}{1}}\times\frac{\binom{3}{1}}{\binom{6}{1}}+\frac{\binom{5}{1}}{\binom{8}{1}}\times\frac{\binom{3}{1}}{\binom{7}{1}}\times\frac{\binom{2}{1}}{\binom{6}{1}}=\frac{5}{8}\times\frac{4}{7}\times\frac{3}{6}+\frac{5}{8}\times\frac{3}{7}\times\frac{2}{6}=\frac{15}{56}$$

روش دوم: این روش چون به رنگ موش دوم اشاره نشده است فرض می‌کنیم موش دوم انتخاب نشده است و تنها می‌خواهیم دو موش را خارج کنیم.

$$P\ (\text{موش دوم سیاه و موش اوّل سفید})=\frac{5}{8}\times\frac{3}{7}=\frac{15}{56}$$

گزینه 4 صحیح است.

قانون احتمال کل (نمودار درختی)

قبل از بیان دقیق احتمال کل به این مثال دقّت کنید. فرض کنید دبیرستان شما دارای پنج کلاس به نام‌های A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 باشد که هر کدام از کلاس‌ها تعدادی دانش‌آموز دارند که الزاماً تعداد آنها با هم برابر نیست و قطعاً هر کلاس دارای یک شاگرد اوّل است. در یکی از روزهای سال تحصیلی که همه دانش‌آموزان در دبیرستان حضور دارند و هر دانش‌آموزی سر کلاس خود نشسته است یک دانش‌آموز را به تصادف از این دبیرستان انتخاب می‌کنیم می‌خواهیم احتمال شاگرد اوّل بودن را حساب کنیم این خواسته مفهومی از احتمال کل را بیان می‌کند. چون معلوم نیست این دانش‌آموز از کدام کلاس است و احتمال شاگرد اوّل بودن دانش‌آموز هر کلاس با کلاس دیگر ممکن است متفاوت باشد. ولی مفهوم دقیق آن به‌صورت زیر است.

فرض کنید $A_1, A_2, \ldots, A_n$ پیشامدهایی باشند که حتماً یکی از آنها رخ می‌دهد، یعنی $\bigcup A_i = S$ همچنین فرض کنید فقط یکی از A_iها بتواند رخ دهد، یعنی این پیشامدها دوبه‌دو ناسازگار باشند، یعنی به‌ازای هر $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \varnothing$ با این شرایط برای هر پیشامد دلخواه

A دستور زیر را داریم:

$$P(A) = P(A_1)\times P(A \mid A_1) + P(A_2)\times P(A \mid A_2) + \text{K} + P(A_n)\times P(A \mid A_n)$$

اگر بخواهیم با توضیحات قبل آن را بیان کنیم، می‌گوییم ممکن است دانش‌آموز کلاس A_1 انتخاب شود و احتمال شاگرد اوّل بودن کلاس A_1 را در نظر می‌گیریم و آنها را در هم ضرب می‌کنیم و ممکن است از کلاس A_2 انتخاب شود و احتمال شاگرد اوّل بودن کلاس A_2 را در نظر می‌گیریم و آنها را در هم ضرب می‌کنیم و....

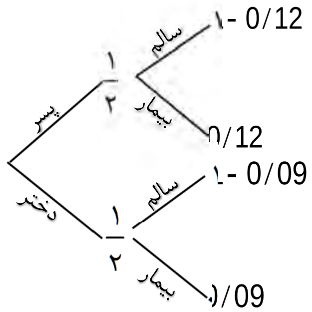
مثال 58) **فرض کنید انتقال نوعی بیماری ارثی از والدین به فرزند پسر 0/12 و به فرزند دختر 0/09 باشد والدینی که حامل این بیماری هستند انتظار فرزندی را دارند. مطلوب است احتمال آن که این فرزند سالم باشد.**

پاسخ: می‌دانیم فرزندی که به دنیا خواهد آمد یا پسر است یا دختر و شانس آنها با هم برابر است پس اگر پسر بودن فرزند را با E_1 و دختر بودن آن را با E_2 نشان دهیم اوّلاً $P(E_1) = P(E_2) = \frac{1}{2}$ ثانیاً E_1 و E_2 ناسازگارند و حتماً یکی از آنها رخ می‌دهد. می‌خواهیم سالم بودن فرزند را حساب کنیم آن را با E نشان می‌دهیم.

$$P(E) = P(E_1)\times P(E \mid E_1) + P(E_2)P(E \mid E_2) = P(E_1)\times P\ (\text{سالم بودن پسر}) + P(E_2)P\ (\text{سالم بودن دختر})$$

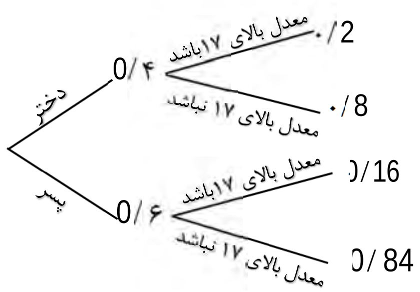
$$= \frac{1}{2}\times(1-0/12) + \frac{1}{2}(1-0/09) = 0/44 + 0/455 = 0/895 \Rightarrow p(E) = 0/895$$

می‌توان مسئله را با نمودار درختی زیر حل کرد.



مثال 59) **فرض کنید 40 درصد دانشجویان دانشگاهی دختر باشند. اگر معدل 20% دخترها و 16% پسرها بالای 17 باشد، معدل چند درصد از دانشجویان بالای 17 است؟**

پاسخ: وقتی 40% دانشجویان دختر باشند در نتیجه 60% باقی مانده پسر خواهند بود با نمودار درختی مسئله را حل می‌کنیم.



$$\Rightarrow P\ (\text{معدل بالای } 17) = P\ (\text{دختر و بالای } 17) + P\ (\text{پسر و بالای } 17)$$

$$= 0/4\times 0/2 + 0/6\times 0/16 = 0/08 + 0/096 = 0/176$$

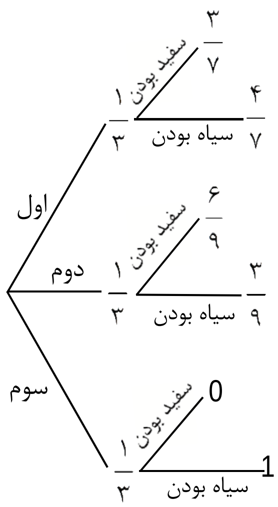
مثال 60) سه جعبه داریم که در جعبه اوّل 3 مهره‌ی سفید و 4 مهره سیاه و در جعبه‌ی دوم 6 مهره سفید و 3 مهره‌ی سیاه و در جعبه‌ی سوم تعدادی مهره‌ی سیاه نگهداری می‌شود. یکی از جعبه‌ها را به تصادف انتخاب کرده و از آن مهره‌ای به تصادف خارج می‌کنیم. احتمال اینکه این مهره سیاه باشد چقدر است؟

پاسخ: احتمال اینکه هر کدام از جعبه‌ها انتخاب شوند $\frac{1}{3}$ است.

احتمال سفید بودن یک مهره از جعبه اوّل $\frac{\binom{3}{1}}{\binom{7}{1}}=\frac{3}{7}$ و سیاه بودن یک مهره از جعبه اوّل $\frac{\binom{4}{1}}{\binom{7}{1}}=\frac{4}{7}$

احتمال سفید بودن یک مهره از جعبه دوم $\frac{\binom{6}{1}}{\binom{9}{1}}=\frac{6}{9}$ و سیاه بودن یک مهره از جعبه دوم $\frac{\binom{3}{1}}{\binom{9}{1}}=\frac{3}{9}$

احتمال سفید بودن از جعبه سوم صفر و سیاه بودن 1 است.

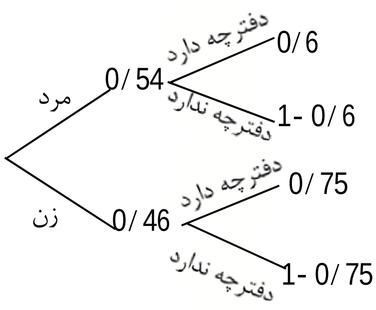


$$P\ (\text{سیاه بودن})=\frac{1}{3}\times\frac{4}{7}+\frac{1}{3}\times\frac{3}{9}+\frac{1}{3}\times 1=\frac{4}{21}+\frac{1}{9}+\frac{1}{3}=\frac{40}{63}$$

مثال 61) یک روستا 54 درصد جمعیّت را مردان و 46 درصد را زنان تشکیل می‌دهند. اگر 60 درصد مردان و 75 درصد زنان دفترچه سلامت داشته باشند، با کدام احتمال یک فرد انتخابی به تصادف از بین آنها، دفترچه سلامت دارد؟ (تجربی 90 خارج از کشور)

1) 0/658 2) 0/669 3) 0/685 4) 0/696

پاسخ: از نمودار درختی برای حل مسئله استفاده می‌کنیم.



$$P\ (\text{داشتن دفترچه سلامت})=0/\ 54\times 0/\ 6+0/\ 46\times 0/\ 75=0/\ 669$$

گزینه 2 صحیح است.

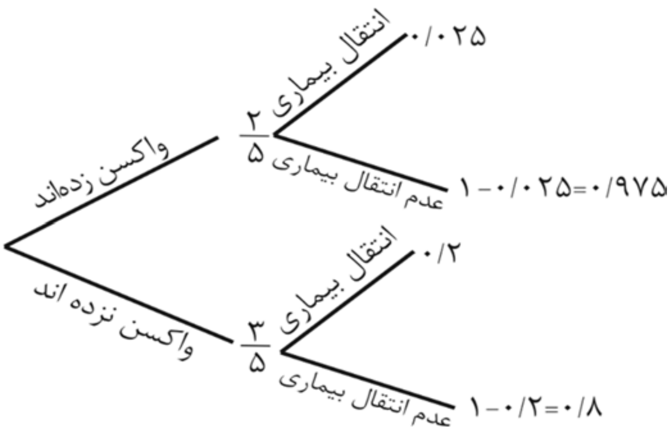
مثال 62) احتمال انتقال بیماری مسری به افرادی که واکسن زده‌اند 0/025 و احتمال انتقال به افراد دیگر 0/2 است $\frac{2}{5}$ کارگران یک کارگاه واکسن زده‌اند. اگر فرد حامل بیماری به تصادف با یکی از کارگران ملاقات کند، با کدام احتمال، این بیماری منتقل می‌شود؟ (تجربی 89)

1) 0/13 2) 0/14 3) 0/15 4) 0/16

پاسخ: چون $\frac{2}{5}$ کارگران واکسن زده‌اند لذا $\frac{3}{5}=1-\frac{2}{5}$ آنها واکسن نزده‌اند به کمک نمودار درختی آن را حل می‌کنیم.

$\Rightarrow$ P (انتقال بیماری) = P (واکسن زده و بیماری منتقل می‌شود) + P (واکسن نزده و بیماری منتقل می‌شود)

$$=\frac{2}{5}\times 0/025+\frac{3}{5}\times 0/2=\frac{50}{500}+\frac{6}{50}=\frac{13}{100}$$



گزینه 1 صحیح است.

مثال 63) در جعبه اوّل 4 مهره‌ی سفید و 3 مهره‌ی سیاه و در جعبه‌ی دوم 3 مهره سفید و 6 مهره سیاه موجود است. به تصادف یکی از جعبه‌ها را انتخاب کرده و دو مهره با هم از آن بیرون می‌آوریم با کدام احتمال هر دو مهره سفید است؟ (تجربی 92 خارج از کشور)

1) $\frac{31}{168}$ 2) $\frac{11}{56}$ 3) $\frac{17}{84}$ 4) $\frac{13}{56}$

پاسخ: احتمال سفید و سیاه بودن را برای هر یک از جعبه‌ها حساب می‌کنیم.

جعبه اوّل: در جعبه اوّل $3+4=7$ مهره وجود دارد چون دو مهره را با هم و یک‌جا خارج می‌کنیم لذا:

$$n(S)=\binom{7}{2}=\frac{7!}{2!(7-2)!}=\frac{7\times 6\times 5!}{2\times 5!}=21$$

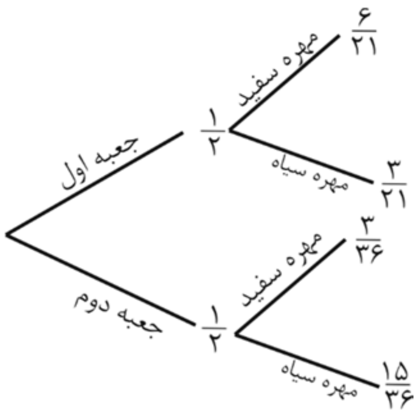
$$P(\text{سفید بودن})=\frac{\binom{4}{2}}{21}=\frac{6}{21} \quad \text{و} \quad P(\text{سیاه بودن})=\frac{\binom{3}{2}}{21}=\frac{3}{21}$$

جعبه دوم: در جعبه دوم $3+6=9$ مهره وجود دارد لذا:

$$n(S)=\binom{9}{2}=\frac{9!}{2!(9-2)!}=\frac{9\times 8\times 7!}{2\times 7!}=36$$

$$P\ (\text{سیاه بودن}) = \frac{\binom{6}{2}}{36} = \frac{15}{36} \qquad P\ (\text{سفید بودن}) = \frac{\binom{3}{2}}{36} = \frac{3}{36}$$

از نمودار درختی کمک می‌گیریم.



$$\Rightarrow P\ (\text{سفید بودن}) = \frac{1}{2}\times\frac{6}{21}+\frac{1}{2}\times\frac{3}{36} = \frac{1}{7}+\frac{1}{24} = \frac{31}{168}$$

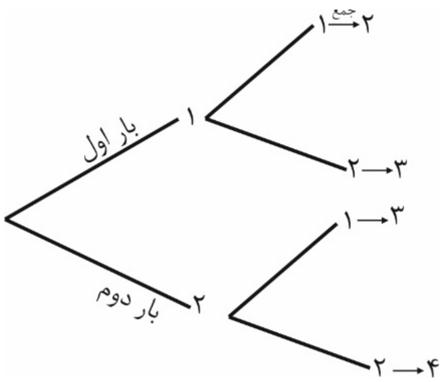
گزینه 1 صحیح است.

متغیّر تصادفی:

اگر در آزمایشی، عددی به هر نتیجهٔ آزمایش نسبت دهیم این عدد را متغیّر تصادفی می‌نامیم و معمولاً با حروف بزرگ X, Y, K نشان می‌دهیم. به عنوان مثال تیم ملی فوتبال ایران را در نظر بگیرید. در حال حاضر افرادی مثل قوچان‌نژاد، سردار آزمون دژآگه و.... به این تیم دعوت شده‌اند به هر یک از این بازیکنان شماره خاصّی نسبت می‌دهند که در واقع ما آنها را با این شماره‌ها می‌شناسیم حال گزارشگر فوتبال وقتی بازی را گزارش می‌کند گاهی اوقات اسامی آنها را می‌گوید و گاهی نیز شماره آنها را این شماره‌ها در واقع متغیّر تصادفی هستند.

مثال 64) **بر روی یک طرف یک سکه عدد 1 و بر روی طرف دیگر آن عدد 2 نوشته شده است این سکه را دو بار می‌اندازیم متغیّر تصادفی را مجموع اعداد رو شده تعریف می‌کنیم این متغیّر تصادفی چه اعدادی را اختیار می‌کند.**

پاسخ:



$$X: 2, 3, 4$$

مثال 65) **خانواده‌ای دارای سه فرزند است متغیّر تصادفی را تعداد فرزندان دختر این خانواده تعریف می‌کنیم این متغیّر تصادفی چه مقادیری اختیار می‌کند.**

پاسخ: *خانواده‌ای که سه فرزند دارد حتماً تعداد دختر آن صفر یا 1 یا 2 یا 3 تا خواهد بود لذا:* $X: 0, 1, 2, 3$

توزیع احتمال:

منظور از توزیع احتمال آن است که تعیین کنیم احتمال چگونه روی مقادیری توزیع شده است. به الگوی زیر دقّت کنید.

X_i	X_1	X_2	$\dots$	X_n
P_i	P_1	P_2	$\dots$	P_n

این جدول دو ویژگی دارد:

الف) به ازای هر $1 \le i \le n$ داریم $0 \le P_i \le 1$

ب) مجموع تمام احتمال‌ها یک است یعنی: $P_1 + P_2 + \dots + P_n = 1$ یا $\sum_{i=1}^{n} P_i = 1$

مثال 66) کیسه‌ای شامل 4 مهره‌ی سفید و 5 مهره سیاه است 3 مهره با هم و به تصادف از کیسه خارج می‌کنیم. اگر X تعداد مهره‌های سفید خارج شده باشد، جدول توزیع احتمال X را بنویسید.

پاسخ: چون سه مهره خارج می‌کنیم پس تعداد مهره‌های سفید می‌تواند 0 یا 1 یا 2 یا 3 باشد یعنی متغیّر تصادفی می‌تواند اعداد $X = 0,1,2,3$ را اختیار کند. که باید احتمال هر یک را حساب کنیم:

$$P(X=0) = P(\text{هر سه مهره سیاه}) = \frac{\binom{4}{0}\times\binom{5}{3}}{\binom{9}{3}} = \frac{\frac{4!}{0!4!}\times\frac{5!}{3!(5-3)!}}{\frac{9!}{3!(9-3)!}} = \frac{\frac{5\times4\times3}{3\times2\times1}}{\frac{9\times8\times7}{3\times2\times1}} = \frac{5}{42}$$

$$P(X=1) = P(\text{یک مهره سفید و دو مهره سیاه}) = \frac{\binom{4}{1}\times\binom{5}{2}}{\binom{9}{3}} = \frac{\frac{4!}{1!\times(4-1)!}\times\frac{5!}{2!(5-2)!}}{\frac{9!}{3!(9-3)!}} = \frac{\frac{4\times3!}{3!}\times\frac{5\times4\times3!}{2\times3!}}{\frac{9\times8\times7\times6!}{3\times2\times6!}}$$

$$= \frac{4\times10}{3\times4\times7} = \frac{10}{21}$$

$$P(X=2) = P(\text{دو مهره سفید و یک مهره سیاه}) = \frac{\binom{4}{2}\times\binom{5}{1}}{\binom{9}{3}} = \frac{6\times5}{3\times4\times7} = \frac{5}{14}$$

$$P(X=3) = P(\text{هر سه مهره سفید}) = \frac{\binom{4}{3}}{\binom{9}{3}} = \frac{4}{3\times4\times7} = \frac{1}{21}$$

مقادیر محاسبه شده را در جدول زیر قرار می‌دهیم:

X_i	0	1	2	3
P_i	$\frac{5}{42}$	$\frac{10}{21}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{1}{21}$

مثال 67) با توجّه به جدول توزیع احتمال زیر، مقدار m را بیابید.

X_i	1	2	3	4
P_i	4m	9m	m	16m

پاسخ: باید مجموع احتمال‌ها یک باشد یعنی:

$$4m+9m+m+6m=1\Rightarrow 30m=1\Rightarrow m=\frac{1}{30}$$

مثال 68) در آزمایشگاهی 6 موش سیاه و 4 موش سفید موجود است. به‌طور تصادفی 2 موش از بین آنها خارج می‌کنیم. X تعداد موش‌های سفید خارج شده است. بیشترین مقدار در توزیع احتمال آن کدام است؟ (تجربی 91)

1) $\frac{2}{5}$ 2) $\frac{7}{15}$ 3) $\frac{8}{15}$ 4) $\frac{3}{5}$

پاسخ: متغیّر تصادفی را تعداد موش‌های سفید خارج شده تعریف می‌کنیم لذا: $X:0,1,2$

$$P(X=0)=\frac{\binom{4}{0}\binom{6}{2}}{\binom{10}{2}}=\frac{1\times 15}{45}=\frac{15}{45}\quad,\quad P(X=1)=\frac{\binom{4}{1}\binom{6}{1}}{\binom{10}{2}}=\frac{4\times 6}{45}=\frac{24}{45}$$

$$p(X=2)=\frac{\binom{4}{2}\binom{6}{0}}{\binom{10}{2}}=\frac{6\times 1}{45}=\frac{6}{45}$$

با توجّه به مقادیر به‌دست آمده $p(X=1)=\frac{24}{45}=\frac{8}{15}$ بیشترین مقدار را دارد.

گزینه 3 صحیح است.

توزیع دو جمله‌ای

آزمایشی فقط با دو نتیجه را در نظر می‌گیریم که نتیجه هر آزمایش مستقل از نتیجه سایر آزمایش‌هاست نتیجه‌ای از آزمایش که مورد نظر ما است «پیروزی» در نظر گرفته و آن را با p نشان می‌دهیم و نتیجه‌ای که مورد نظر ما نیست «شکست» نامیده و با q نشان می‌دهیم طوری که $p+q=1$ یا $q=1-p$ حال اگر این آزمایش n بار تکرار شود احتمال اینکه k بار پیروزی حاصل شود به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$p(x=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

مثال 69) اگر 40 درصد ژن‌های تعیین کننده عامل RH خون منفی باشند، مطلوب است احتمال آن که در یک کلاس 30 نفری 8 نفر دارای خونی با RH منفی باشند.

پاسخ: می‌دانیم $\frac{16}{100}=0/4\times 0/6=($ منفی $RH)$ P لذا:

$$P(X=8)=\binom{30}{8}(0/16)^8(1-0/16)^{30-8}$$

تذکر: اگر احتمال پیروزی و شکست با هم برابر باشند یعنی $p=q=\frac{1}{2}$ باشد در آن صورت احتمال k بار پیروزی به‌صورت زیر قابل محاسبه است.

$$p(X=k)=\binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(1-\frac{1}{2}\right)^{n-k}=\binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}=\binom{n}{k}\times\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{\binom{n}{k}}{2^n}$$

مثال 70) احتمال درمان یک بیماری با دارویی خاص برابر 0/7 است. اگر 5 بیمار همانند دارو را مصرف کنند احتمال آن که:

الف) 3 نفر درمان شوند چقدر است؟ ب) 3 یا 2 نفر درمان شوند چقدر است؟

پاسخ: متغیر تصادفی را تعداد افراد درمان شده در نظر می‌گیریم. و احتمال پیروزی برابر است با $P=0/7$

$$\text{الف)}\ P(X=3)=\binom{5}{3}(0/7)^3(1-0/7)^{5-3}=\binom{5}{3}(0/7)^3(0/3)^2=\frac{5!}{3!(5-3)!}\times(0/7)^3\times(0/3)^2$$

$$=10\times(0/7)^3\times(0/3)^2$$

$$\text{ب)}\ P(X=2)+p(X=3)=\binom{5}{2}(0/7)^2(1-0/7)^3+\binom{5}{3}(0/7)^3(1-0/7)^{5-3}=10\times(0/7)^2\times(0/3)^3$$

$$+10\times(0/7)^3\times(0/3)^2$$

مثال 71) از نوعی بذر 80% آنها جوانه می‌زنند. اگر 3 بذر کاشته شود با کدام احتمال لااقل دو بذر جوانه می‌زنند؟

پاسخ: پیروزی یعنی جوانه زدن بذر لذا p=%80 حداقل دو بذر جوانه بزند پس می‌تواند دو یا سه بذر جوانه بزند.

$$p(X=2)+p(X=3)=\binom{3}{2}\left(\frac{80}{100}\right)^2\left(1-\frac{80}{100}\right)^{3-2}+\binom{3}{3}\left(\frac{80}{100}\right)^3\left(1-\frac{8}{100}\right)^{3-3}$$

$$=3\times\left(\frac{8}{10}\right)^2\times\left(\frac{2}{10}\right)^1+1\times\left(\frac{8}{10}\right)^3\times\left(\frac{2}{10}\right)^0=3\times\frac{64}{100}\times\frac{2}{10}+1\times\frac{512}{1000}\times1=0/896$$

مثال 72) بیست درصد افراد یک جامعه به بیماری قلبی مبتلا هستند. اگر سه نفر به تصادف از این جامعه انتخاب شوند احتمال آن که دو نفر مبتلا به بیماری باشد و یک نفر نباشد چند برابر این است که هر سه نفر مبتلا باشند؟

پاسخ: احتمال پیروزی برابر است $p=\frac{20}{100}=\frac{1}{5}$ لذا:

$$p\ (\text{دو نفر مبتلا باشد})=\binom{3}{2}\times(0/2)^2\times(0/8)^{3-2}=3\times(0/2)^2\times(0/8)=3\times\frac{4}{100}\times\frac{8}{10}=\frac{96}{1000}$$

$$p\ (\text{سه نفر مبتلا باشد})=\binom{3}{3}\times(0/2)^3(1-0/2)^{3-3}=1\times\frac{8}{1000}\times1=\frac{8}{1000}$$

$$\frac{\frac{96}{1000}}{\frac{8}{1000}}=\frac{96}{8}=12$$

نسبت این دو عدد برابر است با:

مثال 73) تابع توزیع احتمال متغیّر تصادفی X متناظر با 7 برآمد به‌صورت زیر آمده است.

a را به‌دست آورید.

$$\begin{cases}p(X=i)=\dfrac{1}{i^2+i} & 1\le i\le 5\\[2mm] p(X=j)=\dfrac{j-4}{a} & j=6,7\end{cases}$$

پاسخ: به جای i و j مقدار قرار داده که باید مجموع همه آنها یک شود:

$$\frac{1}{1^2+1}+\frac{1}{2^2+2}+\frac{1}{3^2+3}+\frac{1}{4^2+4}+\frac{1}{5^2+5}+\frac{6-4}{a}+\frac{7-4}{a}=1$$

$$\frac{50}{60}+\frac{5}{a}=1\Rightarrow\frac{5}{a}=1-\frac{5}{6}\Rightarrow\frac{5}{a}=\frac{1}{6}\Rightarrow\boxed{a=30}$$

مثال 74) **در یک خانواده 4 فرزندی، با کدام احتمال، 2 فرزند پسر یا 3 فرزند دختر است؟** (تجربی 90)

1) $\frac{3}{8}$ 2) $\frac{9}{16}$ 3) $\frac{5}{8}$ 4) $\frac{3}{4}$

پاسخ: دو پیشامد ناسازگارند از طرفی پیشامدها توزیع دو جمله‌ای هستند که $p=q=\frac{1}{2}$ است.

$$p\,(\text{دختر } 3 \text{ یا پسر } 2)=p\,(\text{پسر } 2)+p\,(\text{دختر } 3)$$

$$=\frac{\binom{4}{2}}{2^4}+\frac{\binom{4}{3}}{2^4}=\frac{6+4}{16}=\frac{10}{16}=\frac{5}{8}$$

گزینه 3 صحیح است.

مثال 75) **پدر و مادری هر یک دارای یک ژن رنگ چشم مغلوب (b) و یک ژن رنگ چشم غالب (B) اند و $p(B)=3p(b)$. اگر این پدر و مادر دارای سه فرزند باشند، با کدام احتمال فقط یکی از فرزندان دارای ژن رنگ چشم مغلوب است؟** (تجربی 86 خارج از کشور)

1) $\frac{9}{64}$ 2) $\frac{9}{32}$ 3) $\frac{27}{64}$ 4) $\frac{9}{16}$

پاسخ: باید $p(B)+p(b)=1$ شود با جایگذاری داریم $3p(b)+p(b)=1$ در نتیجه $4p(b)=1$ لذا: $p(b)=\frac{1}{4}$

از آنجا $p(B)=3\times\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

$$p(X=1)=\binom{3}{1}\times\left(\frac{1}{4}\right)^1\left(1-\frac{1}{4}\right)^{3-1}=\binom{3}{1}\times\left(\frac{1}{4}\right)^1\times\left(\frac{3}{4}\right)^2=3\times\frac{1}{4}\times\frac{9}{16}=\frac{27}{64}$$

گزینه 3 صحیح است.

مثال 76) **دانش‌آموزی به 5 پرسش 5 گزینه‌ای به تصادف پاسخ می‌دهد، با کدام احتمال فقط به یک پرسش پاسخ صحیح داده است؟**

1) 0/2048 2) 0/4096 3) 0/512 4) 0/7144

پاسخ: شانس صحیح بودن هر پرسش $p=\frac{1}{5}$ است چون پنج گزینه‌ای است حال اگر به پنج پرسش پاسخ دهد، احتمال صحیح بودن یکی از آنها برابر است با:

$$p(X=1)=\binom{5}{1}\left(\frac{1}{5}\right)^1\left(1-\frac{1}{5}\right)^{5-1}=5\times\frac{1}{5}\times\left(\frac{4}{5}\right)^4=\frac{256}{625}=0/4096$$

گزینه 2 صحیح است.

آزمون

1- از بین 5 دانش‌آموز ریاضی و 4 دانش‌آموز تجربی، به چند طریق می‌توان 4 نفر را انتخاب کرد به‌طوریکه تعداد دانش‌آموزان ریاضی و دانش‌آموزان تجربی انتخاب شده با هم برابر نباشند؟

1) 60　2) 66　3) 72　4) 78

2- در پرتاب دو تاس، اگر متغیّر تصادفی X برابر با مجموع دو عدد ظاهر شده باشد، آنگاه کدام‌یک از پیشامدهای زیر بیشترین احتمال را دارد؟

1) $X \geq 10$　2) $X \leq 5$　3) X مضرب 3 باشد　4) X مضرب 4 باشد

3- در پرتاب دو تاس سالم اگر دو عدد رو شده متمایز باشند، احتمال این که مجموع اعداد رو شده بیشتر از 5 نباشد کدام است؟

1) $\frac{4}{15}$　2) $\frac{2}{15}$　3) $\frac{1}{6}$　4) $\frac{1}{9}$

4- A, B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S هستند. به‌طوریکه $B \subset A$ اگر: $p(A) = 0/4$, $p(B) = 0/25$ آنگاه $\frac{p(A' \mid B')}{p(A \cap B)}$ کدام است؟

1) 2/5　2) 4　3) 2　4) 3/2

5- در دو پرتاب همزمان سه تاس سالم، احتمال آن که سه عدد متوالی رو شود کدام است؟

1) $\frac{1}{6}$　2) $\frac{4}{63}$　3) $\frac{1}{9}$　4) $\frac{1}{36}$

6- یک خانواده دارای 4 فرزند است، اگر دو تا از فرزندان این خانواده پسر باشند، آنگاه احتمال آن که فرزندان دختر پشت سر هم به دنیا آمده باشند کدام است؟

1) $\frac{1}{2}$　2) $\frac{1}{3}$　3) $\frac{1}{4}$　4) $\frac{1}{6}$

7- در یک خانواده‌ی سه فرزندی، می‌دانیم یکی از فرزندان پسر است، با کدام احتمال دو فرزند دیگر، دختر هستند؟

1) $\frac{3}{8}$　2) $\frac{3}{7}$　3) $\frac{4}{7}$　4) $\frac{5}{8}$

8- سکه‌ای را بارها پرتاب می‌کنیم. احتمال اینکه چهارمین خط در دوازدهمین پرتاب ظاهر شود، چقدر است؟

1) $\binom{12}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{12}$　2) $\binom{11}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{12}$　3) $\binom{11}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{11}$　4) $\binom{12}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{11}$

9- دو تاس را با هم پرتاب می‌کنیم، اگر مجموع اعداد روشده، زوج باشد، احتمال آن که هر دو زوج باشند کدام است؟

1) $\frac{1}{2}$　2) $\frac{1}{4}$　3) $\frac{1}{3}$　4) $\frac{1}{6}$

10- در یک روز زمستان، احتمال سرماخوردگی هر دانش‌آموز، 20 درصد است، دو دانش‌آموز را به تصادف انتخاب می‌کنیم احتمال این که حداقل یکی سرما خورده باشد کدام است؟

1) 40 درصد　2) 24 درصد　3) 30 درصد　4) 36 دصد

11- در ظرفی شش مهره با شماره‌های $1,2,3,4,5,6$ ریخته شده‌اند، دو مهره با هم بیرون می‌آوریم، با کدام احتمال شماره‌های این دو مهره اعداد متوالی‌اند؟

1) $\frac{1}{3}$ 2) $\frac{2}{5}$ 3) $\frac{3}{5}$ 4) $\frac{2}{3}$

12- تعداد مسافرین در یک هتل 72 نفرند که 23 تای آنها تاجر و 12 نفر برای اوّلین بار سفر کرده‌اند. 8 نفر از این تاجرین برای اوّلین بار سفر کرده‌اند. اگر فردی به تصادف از بین آنها انتخاب شود، با کدام احتمال این فرد نه تاجر است و نه برای اوّلین بار سفر کرده است؟

1) $\frac{5}{7}$ 2) $\frac{3}{8}$ 3) $\frac{5}{8}$ 4) $\frac{3}{7}$

13- احتمال انتقال بیماری مسری به افرادی که واکسن زده‌اند 0/025 و احتمال انتقال به افراد دیگر 0/2 است $\frac{2}{5}$ کارگران یک کارگاه واکسن زده‌اند، اگر فرد حامل بیماری به تصادف با یکی از کارگران ملاقات کند با کدام احتمال این بیماری منتقل می‌شود؟

1) 0/13 2) 0/14 3) 0/15 4) 0/16

14- دو تاس سالم را با هم پرتاب می‌کنیم تا برای اولین بار هر دو عدد رو شده زوج باشند، با کدام احتمال، حداکثر در سه پرتاب این نتیجه حاصل می‌شود؟

1) $\frac{27}{64}$ 2) $\frac{37}{64}$ 3) $\frac{19}{32}$ 4) $\frac{39}{64}$

15- تاسی را سه بار می‌اندازیم. احتمال آن که هر سه عدد رو شده متمایز باشند، چند برابر احتمال آن است که هر سه عدد رو شده مثل هم باشند؟

1) 35 2) 15 3) 10 4) 20

16- در آزمایشگاهی 6 موش سیاه و 4 موش سفید موجود است. به تصادف دو موش از بین آنها خارج می‌کنیم. X تعداد موش‌های سفید خارج شده است. بیشترین مقدار در توزیع احتمال آن کدام است؟

1) $\frac{2}{5}$ 2) $\frac{7}{15}$ 3) $\frac{8}{15}$ 4) $\frac{3}{5}$

17- آزمایشی فقط دو نتیجه شکست و پیروزی دارد. احتمال پیروزی $\frac{3}{4}$ است و X تعداد پیروزی‌ها در 16 بار تکرار این آزمایش است $p(0 \le X \le 16)$ کدام است؟

1) $\left(\frac{3}{4}\right)^{16}$ 2) $1-\left(\frac{1}{4}\right)^{16}$ 3) $2\binom{16}{8}\left(\frac{3}{4}\right)^{8}$ 4) 1

18- نوعی واکسن، با احتمال 90 درصد برای طیور تأثیر مثبت دارد. اگر 5 مورد از این واکسن به کار رود. با کدام احتمال فقط 3 مورد آن تأثیر مثبت خواهد داشت؟

1) %729 2) %811 3) %739 4) %813

19- احتمال انتقال ویروس، از فرد بیمار به افراد مستعد 0/1 است. اگر این بیمار با 4 فرد مستعد ملاقات کند با کدام احتمال 2 یا 3 نفر آنان مبتلا می‌شوند؟

1) %482 2) %522 3) %564 4) %594

20- هفتاد و پنج درصد محصولات کارخانه‌ای مرغوب‌اند با کدام احتمال از 4 کالای خریداری شده‌ی این کارخانه لااقل یک کالا مرغوب است؟

1) $\frac{251}{256}$ 2) $\frac{255}{256}$ 3) $\frac{127}{128}$ 4) $\frac{63}{64}$

پاسخ‌نامه

1- تمام حالت‌های انتخاب 4 دانش‌آموز از میان 9 دانش‌آموز (5 دانش‌آموز ریاضی و 4 دانش‌آموز تجربی) برابر است با:

$$\binom{9}{4}=\frac{9!}{4!(9-4)!}=\frac{9\times 8\times 7\times 6}{2\times 3\times 4}=126$$

تعداد حالت‌هایی که تعداد دانش‌آموزان انتخاب شده از هر دو گروه یکسان است. (2 دانش‌آموز ریاضی و 2 دانش‌آموز تجربی)

$$\binom{5}{2}\binom{4}{2}=10\times 6=60$$

پس در $126-60=66$ حالت، تعداد دانش‌آموزان انتخاب شده از هر دو گروه با هم برابر نیستند.

گزینه 2 صحیح است.

2- ابتدا تعداد حالت‌های ممکن برای مجموع دو عدد رو شده در پرتاب دو تاس را در نظر می‌گیریم:

مجموع دو تاس X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
تعداد حالت‌ها	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1

گزینه 1 $p_1=\dfrac{3+2+1}{36}=\dfrac{6}{31}$

گزینه 2 $p_2=\dfrac{4+3+2+1}{36}=\dfrac{10}{36}$

گزینه 3 $p_3=\dfrac{2+5+4+1}{36}=\dfrac{12}{36}$

گزینه 4 $p_4=\dfrac{3+5+1}{36}=\dfrac{9}{36}$

$$\Rightarrow p_3>p_2>p_4>p_1$$

گزینه 3 صحیح است.

3- مجموع بیشتر از 5 نباشد یعنی مجموع 2 یا 3 یا 4 یا 5 باشد از طرفی اعداد رو شده متمایز هستند پس حالات مورد نظر به‌صورت زیر می‌توانند باشند:

$$\{(1,2),(2,1),(3,1),(1,3),(1,4),(4,1),(2,3),(3,2)\}$$

$$\Rightarrow n(A)=8$$

چون دو عدد متمایزند پس تعداد اعضای فضای نمونه‌ای برابر $5\times 6=30$ است.

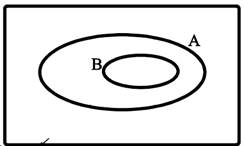
$$\Rightarrow p(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{8}{30}=\frac{4}{15}$$

گزینه 1 صحیح است.

4- با توجّه به شکل، اگر $B\subset A$، آنگاه $A'\cap B'=A'$, $A\cap B=B$ پس داریم:

$$p(A'\mid B')=\frac{p(A'\cap B')}{p(B')}=\frac{p(A')}{p(B')}=\frac{1-p(A)}{1-p(B)}=\frac{1-0/4}{1-0/25}=0/8$$

$$p(A\cap B)=p(B)=0/25\Rightarrow\frac{p(A'\mid B')}{p(A\cap B)}=\frac{0/8}{0/25}=3/2$$



گزینه 4 صحیح است.

5- برای آن که اعداد متوالی ظاهر شوند چهار حالت زیر را در نظر بگیرید:

$$(1,2,3),(2,3,4),(3,4,5),(4,5,6)$$

هر یک از این 4 حالت می‌تواند به !3 طریق به وسیله سه تاس به وجود آید. بنابراین:

$$n(A)=4\times 3!=24\ ,\ n(S)=6^3\Rightarrow p(A)=\frac{24}{6^3}=\frac{1}{9}$$

گزینه 3 صحیح است.

6- کل حالت‌های ممکن برای آن که 2 فرزند از میان 4 فرزند یک خانواده پسر باشند به قرار زیر است:

{(پ د پ د)، (د پ پ د)، (پ پ د د)، (د پ د پ)، (پ د د پ)، (د

$S=\{$(پ پ د

که از بین این حالت‌ها، در حالت‌هایی که زیر آنها خط کشیده شده است، فرزندان دختر پشت سر هم به دنیا آمده‌اند، بنابراین احتمال مورد نظر برابر است با:

$$\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

گزینه 1 پاسخ صحیح است.

7- فرزند پسر را با b و فرزند دختر را با g نشان می‌دهیم. چون می‌دانیم که یکی از فرزندان پسر است. فضای نمونه‌ای به‌صورت زیر است:

$$S=\{\underline{bgg}\,,\underline{gbg}\,,\underline{ggb}\,,bbg\,,bgb\,,gbb\,,bbb\}$$

در حالت‌هایی که زیر آنها خط کشیده شده است یکی از فرزندان پسر و دو فرزند

دیگر دختر هستند، پس سه حالت مطلوب است بنابراین: $p=\frac{3}{7}$

گزینه 2 صحیح است.

8- در 11 پرتاب باید 3 بار خط ظاهر شود، یعنی:

$$\binom{11}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{8}\times\frac{1}{2}=\binom{11}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{12}$$

احتمال خط بودن پرتاب 12ام.

گزینه 2 صحیح است.

9- اگر مجموع شماره‌ها زوج باشد باید هر دو زوج و یا هر دو فرد باشند، پس احتمال مطلوب برابر است با:

$$p=\frac{3\times 3}{(3\times 3)+(3\times 3)}=\frac{1}{2}$$

گزینه 1 صحیح است.

10- پیشامد آن که «حداقل یک دانش‌آموز سرماخورده باشد» با پیشامد آن که «هیچ‌کدام از دانش‌آموزان سرما نخورده باشند» متمم است بنابراین:

$$p=1-\binom{2}{0}\left(\frac{20}{100}\right)^{0}\left(\frac{80}{100}\right)^{2}=1-0/64=\%36$$

گزینه 4 صحیح است.

11- پیشامد متوالی بودن اعداد مهره‌ها، 5 عضو دارد:

$$A=\{(1,2),(2,3),(3,4),(4,5),(5,6)\}$$

$$p(A:\text{متوالی بودن دو عدد})=\frac{5}{\binom{6}{2}}=\frac{5}{15}=\frac{1}{3}$$

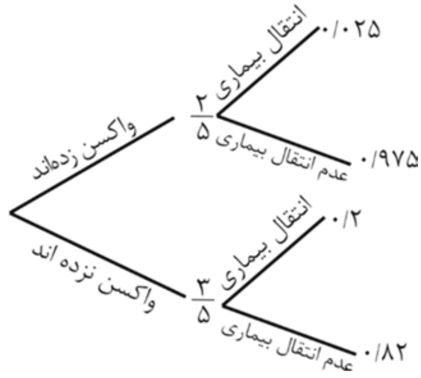
گزینه 1 صحیح است.

12- اگر تاجر بودن را با A و برای اوّلین بار سفر کردن را با B نمایش دهیم، سؤال احتمال پیشامد $(A\cup B)'$ را خواسته است.

$$p(A\cup B)'=1-p(A\cup B)$$
$$=1-\left[p(A)+p(B)-p(A\cap B)\right]$$
$$=1-\left[\frac{23}{72}+\frac{12}{72}-\frac{8}{72}\right]$$
$$=1-\frac{27}{72}=\frac{45}{72}=\frac{5}{8}$$

گزینه 3 صحیح است.

13- $\frac{2}{5}$ کارکنان واکسن زده‌اند، پس $\frac{3}{5}$ آنها واکسن نزده‌اند، به نمودار زیر توجّه کنید.



$$p(\text{انتقال بیماری})=p(\text{واکسن زده و منتقل شده})+p(\text{واکسن نزده و منتقل شده})$$

$$\frac{2}{5}\times 0/025+\frac{3}{5}\times 0/2=\frac{50}{5000}+\frac{6}{50}=\frac{13}{100}$$

گزینه 1 صحیح است.

14- ابتدا توجّه کنید که در هر بار پرتاب هر تاس، احتمال زوج آمدن عدد رو شده برابر $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$ است.

سه حالت مطلوب امکان‌پذیر است که با توجّه به مستقل بودن پرتاب تاس‌ها از هم، می‌توان نوشت:

1) در پرتاب اوّل هر دو تاس زوج بیایند:

$$p_1=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

2) در پرتاب دوم، برای اوّلین بار هر دو تاس زوج بیایند:

$$p_2=\underbrace{\left(1-\frac{1}{4}\right)}_{\text{پرتاب اول}}\underbrace{\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)}_{\text{پرتاب دوم}}=\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{3}{16}$$

3) در پرتاب سوم، برای اوّلین بار هر دو تاس زوج بیایند:

$$p_3=\underbrace{\left(1-\frac{1}{4}\right)}_{\text{پرتاب اول}}\underbrace{\left(1-\frac{1}{4}\right)}_{\text{پرتاب دوم}}\underbrace{\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)}_{\text{پرتاب سوم}}=\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{9}{64}$$

چون سه حالت بالا ناسازگارند، پس:

احتمال مورد نظر: $p=p_1+p_2+p_3=\frac{1}{4}+\frac{3}{16}+\frac{9}{64}$

$$=\frac{16}{64}+\frac{12}{64}+\frac{9}{64}=\frac{37}{64}$$

گزینه 2 صحیح است.

15- برای عدد رو شده در پرتاب اوّل، 6 حالت امکان‌پذیر است. اگر بخواهیم 3 عدد رو شده متمایز باشند برای عدد رو شده در پرتاب دوم 5 حالت و برای

عدد رو شده در پرتاب سوم 4 حالت قابل قبول است. پس طبق اصل ضرب در $n(S)=6\times5\times4$ حالت، 3 عدد رو شده متمایز هستند، از طرفی در 3 بار پرتاب یک تاس، طبق اصل ضرب فضای نمونه‌ای $n(S)=6^3$ عضو دارد پس:

$$p(A)=\frac{6\times5\times4}{6^3}$$

اگر B پیشامد «مساوی بودن هر سه عدد در 3 بار پرتاب یک تاس باشد» آنگاه:

$$B=\{(1,1,1)(2,2,2)\ldots(6,6,6)\}\Rightarrow n(B)=6$$

$$\Rightarrow p(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{6}{6^3}$$

$$\Rightarrow \frac{p(A)}{p(B)}=\frac{\frac{6\times5\times4}{6^3}}{\frac{6}{6^3}}=\frac{6\times5\times4}{6}=20$$

گزینه 4 صحیح است.

16) اگر متغیّر تصادفی X برابر با تعداد موش‌های سفید انتخاب شده از میان 4 موش سفید و 6 موش سیاه باشد آنگاه X می‌تواند مقادیر صفر، یک و دو را بپذیرد و داریم:

$$\mathrm{p}(X=x)=\frac{\binom{4}{X}\binom{6}{2-X}}{\binom{10}{2}}=\frac{\binom{6}{X}\binom{4}{2-X}}{45}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} p(X=0)=\dfrac{\binom{4}{0}\binom{6}{2}}{45}=\dfrac{15}{45}\\ p(X=1)=\dfrac{\binom{4}{1}\binom{6}{1}}{45}=\dfrac{24}{45}\\ p(X=2)=\dfrac{\binom{4}{2}\binom{6}{0}}{45}=\dfrac{6}{45}\end{cases}$$

با توجّه به مقادیر به‌دست آمده بیشترین مقدار در توزیع احتمال متغیّر تصادفی X برابر:

$$p(X=1)=\frac{24}{45}=\frac{8}{15}$$

گزینه 3 صحیح است.

17- همواره مجموع همه احتمال‌های پیشامدهای ممکن برابر یک است.

گزینه 4 صحیح است.

$$\binom{5}{3}(0/9)^3(1-0/9)^{5-3}=10\times\frac{9^3}{1000}\times\frac{1}{100}$$
$$=0/0729$$

18- گزینه 1 صحیح است.

19) $$p(X=2)+p(X=3)$$
$$=\binom{4}{2}(0/1)^2(0/9)^2+\binom{4}{3}(0/1)^3(0/9)^1$$
$$=6\times\frac{81}{10^4}+4\times\frac{9}{10^4}=\frac{486+36}{10000}=\frac{522}{10000}$$
$$=\%522$$

گزینه 2 صحیح است.

20- لااقل یک کالا مرغوب است یعنی یک کالا یا دو کالا یا سه کالا یا چهار کالا مرغوب است.

متمم این پیشامد آن است که هیچ‌کدام مرغوب نباشند. بنابراین از پیشامد متمم استفاده می‌کنیم.

$$p\ (\text{هیچ‌کدام مرغوب نباشند})=\binom{4}{0}(0/75)(1-0/75)^{4-0}$$
$$=1\times1\times(0/25)^4=\left(\frac{1}{4}\right)^4=\frac{1}{256}$$

$$p\ (\text{لااقل یک کالای مرغوب})=1-p\ (\text{هیچ مرغوب})$$
$$=1-\frac{1}{256}=\frac{255}{256}$$

گزینه 2 صحیح است.