

۹. گزینه ۱ (دستور، فارسی ۳، درس ۲، صفحه‌ی ۲۰)

گرفتن) در گزینه‌ی ۱ به معنی (تأثیر کردن و شعله‌ور شدن) به کار رفته، اما در گزینه‌های ۲، ۳ و ۴ به معنی (اخذ کردن) به کار رفته است. تشریح گزینه‌ها:

گزینه‌ی «۱»: عشق از خاکستر ما، رنگ آسمان را انتخاب کرد. شعله‌ی عشق، ابتدا در دل آدم اثر کرد.

گزینه‌ی «۲»: خط موی صورت اطراف لب تو را که هم‌چون لعل است پوشاند. شیطان، انگشتر پادشاهی سلیمان را از او گرفت.

گزینه‌ی «۳»: بی‌شرمی و بی‌حیایی کار خود را پیش می‌برد، هم‌چنان‌که شب‌نم، دامن گل را از دست بلبلان عاشق می‌گیرد.

گزینه‌ی «۴»: زلیخا با وصال یوسف، جانی دوباره یافت. هرآن‌که دامن برگزیدگان را گرفت، کاری بس مهم و برجسته انجام داد.

۱۰. گزینه ۳ (دستور، فارسی ۳، درس ۱، صفحه‌های ۱۵ و ۱۶)

حذف فعل به قرینه‌ی معنوی: به چشم‌های تو [قسم می‌خورم].

تشریح گزینه‌های دیگر:

گزینه‌ی «۱»: در مصراع دوم: ... گر دعاست یا دشنام [است] ← حذف به قرینه‌ی لفظی

گزینه‌ی «۲»: مصراع اول: کسان را درم داد و تشریف و اسب [داد] ← حذف به قرینه‌ی لفظی / مصراع دوم: طبیعی است اخلاق نیکو، نه کسب [است] ← حذف به قرینه‌ی لفظی

گزینه‌ی «۴»: حذفی صورت نگرفته است.

۱۱. گزینه ۱ (تاریخ ادبیات، فارسی ۱، ترکیبی)

«سفرنامه» از ناصر خسرو، «دیوار» اثر جمال میرصادقی و «گلستان» نثر آمیخته به نظم است.

۱۲. گزینه ۴ (حفظ شعر، فارسی ۱، درس ۱۳، صفحه‌های ۱۰۹ و ۱۱۰)

شکل درست بیت: «زکس جز خداوند شان بیم نیست/ به فرهنگشان حرف تسلیم نیست».

۱۳. گزینه ۲ (آرایه، فارسی ۲، درس ۳، صفحه‌ی ۳۲)

موسیقی برخاسته از واج آرایه «صامت‌ها» محسوس تر است.

در بیت گزینه‌ی «۲» دو صامت «د» و «ر» کلام را آهنگین کرده است.

۱۴. گزینه ۲ (آرایه، ترکیبی)

تشخیص و استعاره: آشفته بودن آب

مراعات نظیر: (جان و روان) - (قد و قامت)

تشبیه: من مانند آب

کنایه: «جان بر کف» کنایه از آماده بودن برای جان باختن است.

جناس: (دوان و روان) - (پا و تا)

۱۵. گزینه ۱ (آرایه، ترکیبی)

به آواز آمدن سنگ از داغ جگر سوز جان من: اغراق / تشبیه ندارد.

گزینه‌ی «۲»: عالم: مجاز از مردم عالم / لباس مرگ: استعاره (اضافه‌ی استعاره)

گزینه‌ی «۳»: اندر تلاطم بودن دریا ز شور او: حسن تعلیل / میان مصراع اول و دوم، آرایه‌ی موازنه برقرار است.

گزینه‌ی «۴»: متناقض‌نما: داد (عدالت) بودن خون ریختن / جناس: باد، داد، یاد

آزمون اول

ادبیات

۱. گزینه ۴ (لغت، فارسی ۱، واژه‌نامه)

افسر: تاج، دیهیم، کلاه پادشاهی / دشنه: خنجر / آخره: چنبره‌ی گردن، قوس زیر گردن

۲. گزینه ۱ (لغت، فارسی ۲، واژه‌نامه)

واژگانی که معنای آن‌ها، نادرست آمده است:

ب) مشیت: اراده، خواست / ج) منسک: جای عبادت حاجیان

۳. گزینه ۱ (لغت، فارسی ۳، واژه‌نامه)

تعبیر: بیان کردن، شرح دادن، بازگویی / قاش: قاج، قسمت برآمده‌ی جلوی زین؛ کوهه‌ی زین / بزم: محفل، ضیافت / شرزه: خشمگین، غضبناک

۴. گزینه ۴ (املاء، ترکیبی)

املا‌ی صحیح کلمات عبارت‌اند از: «گزارى، بی‌تأمل، قضا، صلاح»

حق‌گزارى: ادا کردن حق / تأمل: اندیشه کردن (تعمل: به کار پرداختن) / قضا: سرنوشت (غزا: جنگ و غذا: خوراک) / صلاح: درست (سلاح: ابزار جنگ)

۵. گزینه ۳ (املاء، ترکیبی)

غلط املا‌ی واژه‌ی «عظیمت» و صحیح آن «عزیمت» است.

عزیمت: آهنگ، قصد، نیت / عظیمت: عظیمة، مؤنث عظیم
تشریح گزینه‌های دیگر:

گزینه‌ی «۱»: حزم: دوراندیشی (با توجه به معنای جمله صحیح است: با این دوراندیشی، خرد و هوش تو پخته‌تر و سنجیده‌تر شد).
گزینه‌ی «۲»: حایل: مانع (با توجه به واژه‌ی «مانع» که پیش از آن آمده است، مشخص می‌شود).

گزینه‌ی «۴»: غرامت: تاوان، جریمه (معنای جمله: می‌دانستم که برای تو در این گفت‌وگو زبانی وجود ندارد).

۶. گزینه ۱ (دستور، فارسی ۱، درس ۸، صفحه‌ی ۶۶)

ترکیب‌های وصفی: ۱- نگار مهوش ۲- نگار خورشیدروی

ترکیب‌های اضافی: ۱- نگار من ۲- اشکم ۳- قصه‌ی طوفان ۴- چشم توجه: برای تشخیص ترکیب اضافی و ترکیب وصفی (وابسته‌های پسین) می‌توانید به انتهای ترکیب، فعل اسنادی «است» اضافه نمایید، در صورتی که معنا داشت ترکیب وصفی و اگر معنا نداشت ترکیب اضافی است.

نگار، مهوش است. ← ترکیب وصفی (معنا دارد). / نگار، من است (← ترکیب اضافی (معنا ندارد)).

۷. گزینه ۲ (دستور، فارسی ۲، درس ۳، صفحه‌ی ۳۲)

نقش‌های تبعی گزینه‌ها عبارت‌اند از:

گزینه‌ی «۱»: «خود»: بدل / گزینه‌ی «۳»: «روز»: معطوف

گزینه‌ی «۴»: «رسم»: معطوف

۸. گزینه ۱ (دستور، فارسی ۱، درس ۸، صفحه‌ی ۶۶)

در گزینه‌ی «۱»، «تعیین» هسته‌ی گروه اسمی و «ارزش» وابسته‌ی آن (مضاف‌الیه) است. هسته‌های گروه‌های اسمی سایر گزینه‌ها به ترتیب براین پایه‌اند:

گزینه‌ی «۲»: مجموعه / گزینه‌ی «۳»: رابطه / گزینه‌ی «۴»: واحد

توجه: «کوچک‌ترین» در گزینه‌ی «۴»، صفت پیشین (صفت عالی) است و هسته‌ی گروه اسمی نیست.

ریاضی

آزمون اول

(جبر و معادله)

گزینه ۳ .۱۰۰۶

$$(x+1)^2 = \frac{9x^2 + 6x + 1}{x+3}$$

$$\Rightarrow x^3 + 5x^2 + 7x + 3 = 9x^2 + 6x + 1$$

$$\Rightarrow x^3 - 4x^2 + x + 2 = (x-1)(x^2 - 3x - 2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x^2 - 3x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

با توجه به اینکه $-\frac{1}{2} < x = \frac{3 - \sqrt{17}}{2} < -1$ است، با جای گذاری آن در معادله

مشاهده می شود که عبارت سمت چپ مقداری مثبت اما عبارت سمت راست

مقداری منفی دارد؛ بنابراین $x = \frac{3 - \sqrt{17}}{2}$ قابل قبول نخواهد بود؛ در نتیجه

$$x=1 \text{ و } x = \frac{3 + \sqrt{17}}{2} \text{ جواب های معادله هستند.}$$

(تابع)

گزینه ۴ .۱۰۰۷

$$y = f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \Rightarrow D_f = \mathbb{R}, R_f = (-1, 1)$$

$$\Rightarrow y^2 = \frac{x^2}{1+x^2} \Rightarrow x^2 = \frac{y^2}{1-y^2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\Rightarrow D_{f^{-1}} = (-1, 1), R_{f^{-1}} = \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(\sin x) = \frac{\sin x}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^2 x}} = \frac{\sin x}{|\cos x|}$$

$$; x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$$

(تابع)

گزینه ۲ .۱۰۰۸

$$f(x) = (\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}})^2 - \frac{1}{x} + 3 = (\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}})^2 + \frac{11}{x}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} D_f = [0, +\infty) \\ R_f = [3, +\infty) \end{cases}$$

$$g^{-1}(x) = \frac{x+1}{2x-2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{x-1} \text{ و } D_{g^{-1}} = R_g = \mathbb{N}$$

دامنه $g^{-1}(x)$ ، اعداد حقیقی هستند که به ازای آن ها، مقدار g^{-1} عددی طبیعی شود.

$$\Rightarrow g^{-1}(f(x_0)) = \frac{1}{2} + \frac{1}{f(x_0)-1} = n \quad (n \in \mathbb{N}) \Rightarrow f(x_0) = 1 + \frac{1}{n - \frac{1}{2}}$$

عبارت $1 + \frac{1}{n - \frac{1}{2}}$ ، همواره در بازه $(1, 3]$ قرار می گیرد. از طرفی برد تابع

f ، بازه $[3, +\infty)$ است، بنابراین چون تابع f اکیداً یکنواست فقط یک مقدار برای x_0 پیدا می شود؛ بنابراین داریم:

$$\Rightarrow f(x_0) = 1 + \frac{1}{n - \frac{1}{2}} = 3 \Rightarrow n = g^{-1}(3) = 1 \Rightarrow D_{g^{-1} \circ f} = \{0\}$$

(مجموعه، الگو و دنباله)

گزینه ۲ .۱۰۰۱

جملات دنباله را با توجه به جمله عمومی آن می نویسیم:

$$a_n : \frac{1}{25}, \frac{1}{50}, \frac{1}{200}, \frac{1}{400}, \frac{1}{200}, \frac{1}{50}, \frac{1}{25}, \frac{1}{50}, \dots$$

با توجه به اینکه در جملات هفتم و هشتم دوباره جملات اول و دوم ظاهر شده اند؛ این دنباله مجموعه ای تکرارشونده از ۶ جمله اول آن است.

$$S_6 = a_1 + \dots + a_6 = \frac{37}{400} \text{ ابتدا مجموع این ۶ جمله را می یابیم:}$$

حال در ۹۸ جمله اول، ۱۶ بار این جمله ها تکرار می شوند و جملات ۹۷ و ۹۸ نیز برابر

$$S_{98} = 16 \left(\frac{37}{400} \right) + \frac{3}{50} = \frac{74}{50} + \frac{3}{50} = \frac{77}{50} \text{ هستند؛ بنابراین داریم:}$$

(مثلثات)

گزینه ۴ .۱۰۰۲

$$\cos \theta = -\frac{1}{6} \Rightarrow \sin \theta = \pm \frac{\sqrt{35}}{6}$$

$$\xrightarrow{\text{در ربع سوم}} \sin \theta = -\frac{\sqrt{35}}{6}$$

$$\Rightarrow \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{-\frac{\sqrt{35}}{6}}{-\frac{1}{6}} = \frac{\sqrt{35}}{1}$$

(معادله ها و نامعادله ها)

گزینه ۲ .۱۰۰۳

خط $y = 2x - 4$ و سهمی $y = (m+3)x^2 + mx$ باید یک نقطه تلاقی

داشته باشند. این یعنی معادله $(m+3)x^2 + mx = 2x - 4$ باید فقط یک جواب داشته باشد. بنابراین مقادیری از m قابل قبول اند که به ازای آن

$$\Delta \text{ ی معادله } (m+3)x^2 + (m-2)x + 4 = 0 \text{ برابر صفر باشد؛ داریم:}$$

$$\Delta = (m-2)^2 - 16(m+3) = m^2 - 20m - 44$$

$$= (m-22)(m+2) = 0 \Rightarrow m = 22 \text{ یا } m = -2$$

(معادله ها و نامعادله ها)

گزینه ۲ .۱۰۰۴

$$f(x) = x^2(x-4) - (x-4)$$

$$= (x^2-1)(x-4) = (x+1)(x-1)(x-4)$$

x	-1	1	4
$f(x)$	-	+	-
	ج	ج	ج

(۱) شرط: $x > -1$

(۲): $x < -1$ یا $1 < x < 4$

$$\xrightarrow{(1) \cap (2)} 1 < x < 4 \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=4 \end{cases} \Rightarrow b-a=3$$

(جبر و معادله)

گزینه ۲ .۱۰۰۵

$$S_{20} = 3S_{12} \Rightarrow \frac{20}{2}(2a_1 + 19d) = 3 \left[\frac{12}{2}(2a_1 + 11d) \right]$$

$$\Rightarrow 20a_1 + 190d = 36a_1 + 198d \Rightarrow 2a_1 + d = 0 \quad (1)$$

$$a_3 = 6 \Rightarrow a_1 + 2d = 6 \quad (2)$$

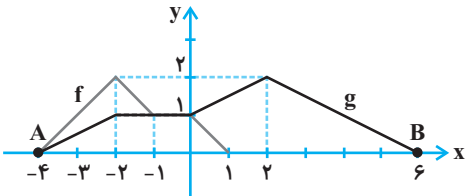
$$\xrightarrow{(1), (2)} a_1 = -2, d = 4 \Rightarrow a_{10} = a_1 + 9d = 34$$



$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = f(-1) = -a + b = 1 \quad (2)$$

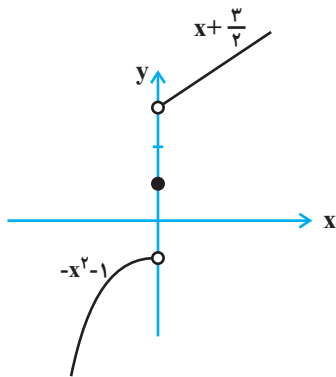
$$(1), (2) \rightarrow a = -\frac{1}{2}, b = \frac{1}{2}$$

(تابع)



با توجه به نمودارها، بیشترین فاصله دو نقطه از هم مربوط به نقاط A و B است. $|AB| = 10$.

(تابع)



با توجه به نمودار برای اینکه تابع اکیداً یکنوا باشد، باید $a \in [-1, \frac{3}{4})$ یعنی a اعداد صحیح -1، 0 و 1 را می تواند بپذیرد.

(تابع)

$$p(x) = (x+2)q_1(x) + 4$$

$$\Rightarrow p(-2) = 4 = -2k - 2 \Rightarrow k = -3$$

$$\Rightarrow p(x) = x^3 + x^2 - 3x + 2$$

$$p(x) = (x-1)(x+1)q_2(x) + \alpha x + \beta$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} p(1) = 1 = \alpha + \beta \\ p(-1) = 5 = -\alpha + \beta \end{aligned} \right\} \Rightarrow \alpha = -2, \beta = 3$$

$$\Rightarrow r(x) = -2x + 3$$

(مثلات)

$$f(x) = 0 \Rightarrow \sin 2x = \cos \delta x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x + \delta x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \\ 2x - \delta x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

X های مثبت را به ترتیب کوچک به بزرگ می نویسیم: $\frac{\pi}{14}, \frac{5\pi}{14}, \frac{\pi}{2}, \frac{9\pi}{14}, \frac{13\pi}{14}, \dots$

سومین جواب مثبت یعنی $\frac{\pi}{2}$ ، طول نقطه A است.

(توانیمایی و لگاریتمی)

گزینه ۳ ۱۰۰۹

$$\log_3(x^2 - 1) = \log_3^2 + \log_3(x+2) = \log_3^2(x+2)$$

$$\Rightarrow x^2 - 1 = 3x + 9 \Rightarrow x^2 - 3x - 10 = 0$$

$$\Rightarrow (x-5)(x+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 5 \end{cases} \text{ غ ق}$$

$$\Rightarrow \log_4^{5-3} = \log_4^2 = \frac{1}{2} \log_4^2 = \frac{1}{2}$$

(مثلات)

گزینه ۲ ۱۰۱۰

مساحت قطاعی با زاویه θ رادیان از دایره ای با شعاع r:

$$S(\theta) = \frac{1}{2} \theta r^2, \quad 80^\circ = \frac{4}{9} \pi \text{ rad}$$

$$\Rightarrow \text{مساحت سایه خورده} = \frac{1}{2} \left(\frac{4}{9} \pi \right) (9^2 - 3^2) = 16\pi$$

(حد و پیوستگی)

گزینه ۴ ۱۰۱۱

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt{\cos 3x}}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{(1 - \cos x)(\sqrt{\cos x} + \sqrt{\cos 3x})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \cos x - 4 \cos^3 x}{(1 - \cos x)(\sqrt{\cos x} + \sqrt{\cos 3x})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \cos x (1 - \cos x)(1 + \cos x)}{(1 - \cos x)(\sqrt{\cos x} + \sqrt{\cos 3x})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \cos x (1 + \cos x)}{\sqrt{\cos x} + \sqrt{\cos 3x}} = \frac{4 \times 2}{2} = 4$$

فکته

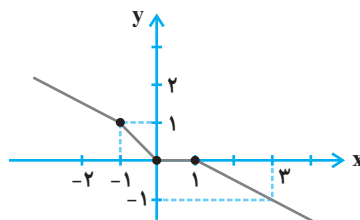
$$\cos 3x = \cos(2x + x) = \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x$$

$$= (2 \cos^2 x - 1) \cos x - 2 \sin^2 x \cos x$$

$$= 2 \cos^3 x - \cos x - 2(1 - \cos^2 x) \cos x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$$

(حد و پیوستگی)

گزینه ۲ ۱۰۱۲



با توجه به شکل، هنگامی f در \mathbb{R} پیوسته است که ضابطه بالایی، قسمتی از خطی باشد که دو نقطه $(-1, 0)$ و $(0, -1)$ را به هم وصل می کند. بنابراین داریم:

$$m = \frac{1-0}{-1-1} = -\frac{1}{2} \Rightarrow y - 0 = -\frac{1}{2}(x-1)$$

$$\Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \xrightarrow{x=3} y = -\frac{1}{2}(3) + \frac{1}{2} = -1$$

تذکر: راه حل کوتاه تر این سؤال، بررسی پیوستگی در نقاط $x=1$ و $x=-1$ است. زیرا هر دو ضابطه در دامنه هایشان پیوسته هستند.

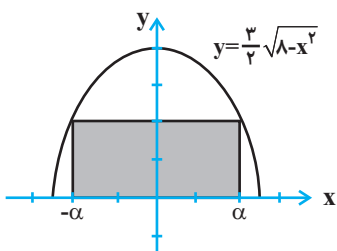
$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) = a + b = 0 \quad (1)$$



(کاربردهای مشتق)

گزینه ۴ .۱۰۲۲

نمودار این تابع، بخشی از یک بیضی قائم است.



$$S(\alpha) = 3\alpha\sqrt{8-\alpha^2} \Rightarrow S'(\alpha) = \frac{24-6\alpha^2}{\sqrt{8-\alpha^2}}$$

$$S'(\alpha) = 0 \xrightarrow{\alpha > 0} \alpha = 2$$

$\alpha > 0$	۲
$S'(\alpha)$	+ -
	↗ ↘
	ماکزیمم نسبی

$$\Rightarrow S(2) = 12 = \text{بیشترین مساحت}$$

(کاربردهای مشتق)

گزینه ۱ .۱۰۲۳

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$$

$$f'(x) \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{x^2} \leq 1 \Rightarrow x^2 \geq 1 \Rightarrow x \geq 1 \text{ یا } x \leq -1 \quad (1)$$

$$f''(x) = \frac{2}{x^3} \Rightarrow f''(x) < 0 \Rightarrow x < 0 \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1),(2)} x \in (-\infty, -1]$$

$$(-\infty, -1) \subseteq (-\infty, -1]$$

(کاربردهای مشتق)

گزینه ۱ .۱۰۲۴

نمودار تابع درجه سوم، نسبت به نقطه عطفش متقارن است؛ یعنی اگر نقاط متقارنی (نسبت به عطف) روی نمودار تابع درجه سوم یافت شود، نقطه میان این نقاط متقارن (مرکز تقارن)، باید نقطه عطف نمودار تابع باشد. بنابراین برای اینکه شرط مورد نظر در سؤال برقرار باشد، خط $y = cx + d$ باید از نقطه عطف نمودار تابع f بگذرد؛ زیرا در سه جمله متوالی یک دنباله حسابی، دو جمله کناری نسبت به جمله میانی متقارن هستند؛ یعنی اگر α ، β و γ سه جمله متوالی باشند، داریم:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 9x + c \Rightarrow \text{نقطه عطف} = (1, c + 7)$$

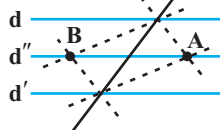
$$; (1, c + d) \in y = cx + d$$

$$\Rightarrow c + d = c + 7 \Rightarrow d = 7$$

(ترسیمهای هندسی و استدلال)

گزینه ۳ .۱۰۲۵

نقاطی از صفحه که از دو خط d و d' به یک فاصله باشند، روی خط d'' موازی با این دو خط و دقیقاً وسط آنها قرار دارند.



از طرفی نقاطی که از دو خط متقاطع d و d' به یک فاصله باشند، روی نیمساز زاویه‌های بین این دو خط و نقاطی که از دو خط متقاطع d و d' به یک فاصله باشند، روی نیمساز زاویه‌های بین آنها قرار دارند.

(مثلثات)

گزینه ۳ .۱۰۱۷

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \frac{1 - \tan \alpha}{1 + \tan \alpha} = \frac{1}{5} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \tan(2\alpha) = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{5}{9}} = \frac{12}{5} = 2 \frac{2}{5}$$

(جدهای ناشناهی - حد در بی‌نهایت)

گزینه ۱ .۱۰۱۸

$$h(x) = f(x) - g(x) = \frac{x+11}{(x-4)(x+1)} - \frac{3}{x-4}$$

$$\Rightarrow h(x) = \frac{-2(x-4)}{(x-4)(x+1)} \Rightarrow h(x) = -\frac{2}{x+1}$$

خط $x = -1$ مجانب قائم و خط $y = 0$ مجانب افقی تابع $h(x)$ است. پس نقطه تلاقی مجانب‌های نمودار تابع $f - g$ برابر با $(-1, 0)$ است.

(مشتق)

گزینه ۱ .۱۰۱۹

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\cos^2 \frac{\pi}{4}}{1 + \sin^2 \frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

$$f'(x) = \frac{-\sin 2x(1 + \sin^2 x) - \sin 2x \cos^2 x}{(1 + \sin^2 x)^2} = \frac{-2 \sin 2x}{(1 + \sin^2 x)^2}$$

$$\Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{9} \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{4}\right) - 2f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{4}{9}$$

(مشتق)

گزینه ۲ .۱۰۲۰

با توجه به نمودار، واضح است که $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$ است. یعنی $x = 0$ مجانب قائم نمودار و در نتیجه ریشه مضاعف مخرج تابع است. بنابراین

$$\Rightarrow f(x) = \frac{ax+3}{x^2} \quad \text{b} = 0$$

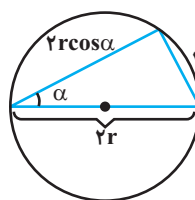
از طرفی خط مماس بر نمودار تابع در $x = 3$ افقی است؛ یعنی $f'(3) = 0$ است. برای مشتق تابع f داریم:

$$f'(x) = \frac{ax^2 - 2x(ax+3)}{x^4} = -\frac{ax+6}{x^3}$$

$$f'(3) = 0 \Rightarrow a(3) + 6 = 0 \Rightarrow a = -2$$

(کاربردهای مشتق)

گزینه ۴ .۱۰۲۱



$$\text{مساحت مثلث} = \frac{1}{2} (2r \cos \alpha)(2r \sin \alpha)$$

$$\frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{2} \rightarrow S(\alpha) = r^2 \sin 2\alpha$$

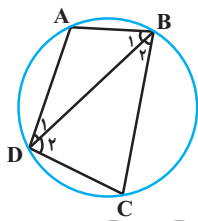
$$\xrightarrow{r=1} S(\alpha) = \sin 2\alpha \Rightarrow S'(\alpha) = 2 \cos 2\alpha$$

$$15^\circ = \frac{\pi}{12} \text{ رادیان} \Rightarrow 15^\circ = \text{آهنگ لحظه‌ای تغییر در } S'(\frac{\pi}{12}) = \sqrt{3}$$

اگر d بر صفحه P عمود نباشد و با آن متقاطع باشد، از نقطه تقاطع آن با صفحه، خط d' را عمود بر صفحه رسم می‌کنیم. صفحه گذرنده از d و d' تنها صفحه‌ای است که شامل خط d بوده و بر صفحه P عمود است. اگر d با صفحه P متقاطع نباشد و با آن موازی باشد نیز اگر از نقطه‌ای دلخواه روی خط d ، خط d' را عمود بر صفحه P رسم می‌کنیم، صفحه گذرنده از d و d' تنها صفحه‌ای است که شامل خط d بوده و بر صفحه P عمود است.

(دایره)

گزینه ۴. ۱۰۲۹



هر چه وتر بزرگ‌تر باشد، به مرکز دایره نزدیک‌تر است. بنابراین AB کوچک‌ترین ضلع و BC بزرگ‌ترین ضلع چهارضلعی است.

در نتیجه کمان AB کوچک‌ترین و کمان BC بزرگ‌ترین کمان دایره است و داریم:

$$\text{گزینه ۱: } \widehat{BC} > \widehat{AD} \Rightarrow \widehat{AB} + \widehat{BC} > \widehat{AB} + \widehat{AD}$$

$$\Rightarrow \frac{\widehat{AB} + \widehat{BC}}{2} > \frac{\widehat{AB} + \widehat{AD}}{2} \Rightarrow \widehat{D} > \widehat{C}$$

$$\text{گزینه ۲: } \widehat{CD} > \widehat{AB} \Rightarrow \widehat{AD} + \widehat{CD} > \widehat{AD} + \widehat{AB}$$

$$\Rightarrow \frac{\widehat{AD} + \widehat{CD}}{2} > \frac{\widehat{AD} + \widehat{AB}}{2} \Rightarrow \widehat{B} > \widehat{C}$$

$$\text{گزینه ۳: } \widehat{BC} > \widehat{AD} \Rightarrow \widehat{BC} + \widehat{CD} > \widehat{AD} + \widehat{CD}$$

$$\Rightarrow \frac{\widehat{BC} + \widehat{CD}}{2} > \frac{\widehat{AD} + \widehat{CD}}{2} \Rightarrow \widehat{A} > \widehat{B}$$

اما رابطه گزینه «۴» همواره برقرار نیست. به عنوان مثال نقض، فرض کنید $\widehat{AB} = 60^\circ$ ، $\widehat{BC} = 140^\circ$ ، $\widehat{CD} = 70^\circ$ و $\widehat{AD} = 90^\circ$ باشند. در این صورت داریم:

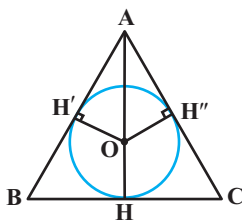
$$\widehat{B} = \frac{\widehat{AD} + \widehat{CD}}{2} = \frac{90^\circ + 70^\circ}{2} = 80^\circ$$

$$\widehat{D} = \frac{\widehat{AB} + \widehat{BC}}{2} = \frac{60^\circ + 140^\circ}{2} = 100^\circ$$

یعنی $\widehat{B} < \widehat{D}$ است.

(دایره)

گزینه ۲. ۱۰۳۰



مطابق شکل $OH = OH' = OH'' = 3$ و در نتیجه $OA = 5$ است.

$$\begin{aligned} \triangle OAH' : AH'^2 &= OA^2 - OH'^2 = 25 - 9 \\ \Rightarrow AH'^2 &= 16 \Rightarrow AH' = 4 \end{aligned}$$

حال اگر $BH = HC = x$ فرض شود، با توجه به آن که مماس‌های رسم شده از یک نقطه بر دایره، برابر یکدیگرند، داریم:

$$AH'' = AH' = 4$$

$$BH' = BH = CH = CH'' = x$$

اگر S مساحت مثلث و P نصف محیط مثلث باشد، آنگاه:

$$r = \frac{S}{P} \Rightarrow 3 = \frac{\frac{1}{2} \times 8 \times 2x}{4 + 2x} \Rightarrow 12 + 6x = 8x \Rightarrow 2x = 12$$

بنابراین طول قاعده مثلث متساوی الساقین ABC ، برابر ۱۲ است.

مطابق شکل نقاط A و B تنها جواب‌های مسئله است، زیرا مثلاً اگر نقطه A محل تلاقی نیمساز زاویه منفرجه بین دو خط d و Δ با خط d'' باشد، آنگاه این نقطه چون روی خط d'' واقع است، پس از d و d' به یک فاصله بوده و چون روی نیمساز زاویه بین دو خط d و Δ قرار دارد، پس از d و Δ نیز به یک فاصله است، پس لزوماً از d' و Δ نیز به یک فاصله بوده و روی نیمساز زاویه بین آن دو واقع است.

(تالس و تشابه)

گزینه ۱. ۱۰۲۶

$$\begin{aligned} \triangle ABD : BD^2 &= AB^2 + AD^2 \\ \Rightarrow BD^2 &= 9 + 16 = 25 \Rightarrow BD = 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \triangle ABD : AD^2 &= BD \cdot DH \Rightarrow 9 = 5 \cdot DH \\ \Rightarrow DH &= \frac{9}{5} \Rightarrow BH = 5 - \frac{9}{5} = \frac{16}{5} \end{aligned}$$

$$\triangle ABD : AH^2 = BH \cdot DH = \frac{16}{5} \times \frac{9}{5} = \frac{144}{25} \Rightarrow AH = \frac{12}{5}$$

$$\triangle ADF : AD^2 = AH \cdot AF \Rightarrow 9 = \frac{12}{5} \times AF \Rightarrow AF = \frac{15}{4}$$

دو مثلث قائم‌الزاویه CBE و ADF هم‌نهشت هستند، پس طول ارتفاع وارد بر وتر در این دو مثلث برابر است. یعنی $DH = BH'$ و در نتیجه داریم:

$$HH' = 5 - 2 \times \frac{9}{5} = \frac{7}{5}$$

$$S_{AECF} = \frac{15}{4} \times \frac{7}{5} = 5 \frac{7}{4}$$

(چند ضلعی‌ها)

گزینه ۱. ۱۰۲۷

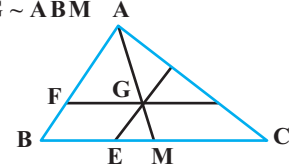
اگر میانه AM را رسم کنیم، داریم:

$$\triangle ABM : GE \parallel AB \Rightarrow \triangle ABM \sim \triangle GEM$$

$$\frac{MG}{MA} = \frac{1}{3} = \text{نسبت تشابه} \Rightarrow \frac{S_{\triangle GEM}}{S_{\triangle ABM}} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$$

$$\begin{aligned} \triangle ABM : GF \parallel BM &\Rightarrow \triangle AFG \sim \triangle ABM \\ \frac{AG}{AM} = \frac{2}{3} &= \text{نسبت تشابه} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{\triangle AFG}}{S_{\triangle ABM}} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$$



$$\frac{S_{\triangle BEGF}}{S_{\triangle ABM}} = 1 - \frac{S_{\triangle GEM}}{S_{\triangle ABM}} - \frac{S_{\triangle AFG}}{S_{\triangle ABM}} = 1 - \frac{1}{9} - \frac{4}{9} = \frac{4}{9}$$

$$\frac{S_{\triangle BEGF}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{S_{\triangle BEGF}}{S_{\triangle ABM}} \times \frac{S_{\triangle ABM}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{4}{9} \times \frac{1}{2} = \frac{2}{9}$$

(تجسم فضایی)

گزینه ۱. ۱۰۲۸

صفحه Q بر صفحه P عمود است؛ هرگاه شامل خطی عمود بر صفحه P باشد. بنابراین اگر d بر صفحه P عمود باشد، هر صفحه Q که شامل d باشد، بر صفحه P عمود است و در این حالت بی‌شمار صفحه Q داریم.

۱۰۳۱. گزینه ۳

(تبدیل‌های هندسی)

تحت یک تجانس مستقیم به مرکز O و نسبت ۳ ، نقاط A' و A ، O روی یک خط راست قرار دارند به گونه‌ای که A' و A در یک طرف O قرار می‌گیرند. مطابق شکل داریم:



$$\frac{OA'}{OA} = 3 \xrightarrow{OA = \sqrt{5}} OA' = 3\sqrt{5}$$

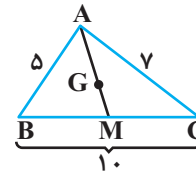
$$\Rightarrow AA' = 3\sqrt{5} - \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$$

همچنین تحت این تجانس، شعاع دایره C' ، برابر شعاع دایره C است، بنابراین $r' = 3$ می‌باشد. با فرض $r = 1$ داریم:

$$\begin{aligned} \text{طول مماس مشترک خارجی} &= \sqrt{AA'^2 - (r - r')^2} \\ &= \sqrt{(2\sqrt{5})^2 - (1 - 3)^2} = \sqrt{20 - 4} = \sqrt{16} = 4 \end{aligned}$$

۱۰۳۲. گزینه ۱ (روابط طولی در مثلث)

طبق قضیه میانه‌ها در مثلث ABC داریم:



$$\begin{aligned} AB^2 + AC^2 &= 2AM^2 + \frac{BC^2}{2} \\ \Rightarrow 25 + 49 &= 2AM^2 + \frac{100}{2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow AM^2 = 12 \Rightarrow AM = 2\sqrt{3}$$

فاصله محل هم‌رسی میانه‌ها از وسط هر ضلع، برابر $\frac{1}{3}$ طول میانه نظیر آن ضلع است، بنابراین داریم:

$$GM = \frac{1}{3}AM = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

۱۰۳۳. گزینه ۴ (ماتریس)

طبق تعریف ماتریس A داریم:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6 & -12 & 18 \\ -6 & 12 & -18 \\ 6 & -12 & 18 \end{bmatrix} = 6A$$

$$A^4 = (A^2)^2 = (6A)^2 = 36A^2 = 36 \times 6A = 216A$$

۱۰۳۴. گزینه ۲ (ماتریس)

$$A^2 - A = -I \xrightarrow{\times A} A(A^2 - A) = -AI$$

$$\Rightarrow A^3 - A^2 = -A \Rightarrow A^3 = A^2 - A \Rightarrow A^3 = -I$$

$$\Rightarrow |A^3| = |-I| \Rightarrow |A|^3 = (-1)^3 |I| = -1 \Rightarrow |A| = -1$$

۱۰۳۵. گزینه ۱ (مقاطع مخروطی)

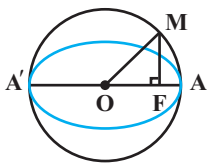
با توجه به آن که خط به معادله $3x + 2y = a$ بر خط مماس بر دایره عمود است و محل تلاقی آنها روی محیط دایره است. پس این خط قائم بر دایره بوده و در نتیجه از مرکز دایره عبور می‌کند.

$$x^2 + y^2 - 2x + y = 1 \xrightarrow{\text{معادله استاندارد دایره}} (x-1)^2 + (y + \frac{1}{2})^2 = \frac{9}{4}$$

$$\xrightarrow{\text{مرکز}} O(1, -\frac{1}{2})$$

$$\xrightarrow{\text{جابجایی مرکز دایره در معادله خط}} 3(1) + 2(-\frac{1}{2}) = a \Rightarrow a = 2$$

۱۰۳۶. گزینه ۱ (مقاطع مخروطی)



$$AF = 1 \Rightarrow a - c = 1 (*)$$

طول قطر دایره برابر طول قطر بزرگ بیضی

است، پس $OM = a$ است. در مثلث

قائم‌الزاویه OFM داریم:

$$MF^2 = OM^2 - OF^2 = a^2 - c^2$$

$$\Rightarrow a^2 - c^2 = 16 \Rightarrow (a-c)(a+c) = 16 \xrightarrow{(*)} a+c = 16$$

$$\begin{cases} a-c=1 \\ a+c=16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{17}{2} \\ c = \frac{15}{2} \end{cases} \Rightarrow e = \frac{c}{a} = \frac{15}{17}$$

۱۰۳۷. گزینه ۳ (مقاطع مخروطی)

با توجه به معادله خط هادی، سهمی افقی است و محور تقارن آن موازی محور x ها است. بنابراین با توجه به این که هر پرتو گذرنده از نقطه $(3, 2)$ موازی با محور تقارن سهمی باز می‌تابد، پس نقطه $(3, 2)$ کانون سهمی و دهانه سهمی رو به راست است. در نتیجه داریم:

$$F(a+h, k) = (3, 2) \Rightarrow \begin{cases} a+h=3 \\ k=2 \end{cases}$$

$$-a+h=-1 \quad (\text{خط هادی سهمی})$$

$$\begin{cases} a+h=3 \\ -a+h=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ h=1 \end{cases}$$

بنابراین $S(1, 2)$ رأس و $a=2$ فاصله کانونی سهمی است.

$$\text{معادله سهمی: } (y-2)^2 = \lambda(x-1) \xrightarrow{y=0} 4 = \lambda x - \lambda$$

$$\Rightarrow \lambda x = 12 \Rightarrow x = \frac{12}{\lambda}$$

۱۰۳۸. گزینه ۲ (بردارها)

تنها در صورتی می‌توان برداری عمود بر هر سه بردار \vec{a} ، \vec{b} و \vec{c} پیدا کرد که این سه بردار در یک صفحه قرار داشته باشند. شرط هم صفحه بودن سه بردار \vec{a} ، \vec{b} و \vec{c} آن است که $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 0$ باشد. داریم:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ m & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

طبق دستور ساروس برای محاسبه دترمینان ماتریس 3×3 داریم:

$$\Rightarrow (-2 + 4m + 2) - (2m - 4 + 2) = 0$$

$$\Rightarrow 2m + 2 = 0 \Rightarrow 2m = -2 \Rightarrow m = -1$$

۱۰۳۹. گزینه ۲ (بردارها)

ابتدا با کمک ضرب خارجی دو بردار \vec{AB} و \vec{AC} ، مساحت مثلث ABC را محاسبه می‌کنیم.

$$\begin{aligned} \vec{AB} &= (2, -2, -3) \\ \vec{AC} &= (2, 0, 3) \\ \vec{AB} \times \vec{AC} &= (-6, -12, 4) \end{aligned}$$



(احتمال)

گزینه ۴ .۱۰۴۳

تعداد پیروزی‌های این تیم در مسابقات انجام شده، عددی بین صفر و ۴ است. بنابراین داریم:

$$P(0) + P(1) + P(2) + P(3) + P(4) = 1$$

$$\Rightarrow \frac{\binom{4}{0}}{A} + \frac{\binom{4}{1}}{A} + \frac{\binom{4}{2}}{A} + \frac{\binom{4}{3}}{A} + \frac{\binom{4}{4}}{A} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{A} + \frac{4}{A} + \frac{6}{A} + \frac{4}{A} + \frac{1}{A} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{16}{A} = 1 \Rightarrow A = 16$$

$$P(\{3, 4\}) = P(3) + P(4) = \frac{4}{16} + \frac{1}{16} = \frac{5}{16}$$

(احتمال)

گزینه ۳ .۱۰۴۴

$$P(\{b, c\}) = P(\{a, b, c\}) - P(a) = \frac{2}{3} - \frac{1}{4} = \frac{5}{12}$$

$$P(\{b, c, e\} | \{a, b, c\}) = \frac{P(\{b, c, e\} \cap \{a, b, c\})}{P(\{a, b, c\})}$$

$$= \frac{P(\{b, c\})}{P(\{a, b, c\})} = \frac{\frac{5}{12}}{\frac{2}{3}} = \frac{5}{8}$$

(احتمال)

گزینه ۱ .۱۰۴۵

$$P(A \cap B) = \frac{2}{5} P(A \cap B') \Rightarrow 5P(A \cap B) = 2P(A - B)$$

$$\Rightarrow 5P(A \cap B) = 2(P(A) - P(A \cap B))$$

$$\Rightarrow 2P(A) = 7P(A \cap B) \Rightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{2}{7} \Rightarrow P(B | A) = \frac{2}{7}$$

(آمار توصیفی)

گزینه ۲ .۱۰۴۶

اگر داده‌های جامعه اول را با x_i و داده‌های جامعه دوم را با y_i نمایش دهیم، آنگاه داریم:

$$\sigma_x^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n_1} \Rightarrow 12/6 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{12}$$

$$\Rightarrow \sum (x_i - \bar{x})^2 = 151/2$$

$$\sigma_y^2 = \frac{\sum (y_i - \bar{y})^2}{n_2} \Rightarrow 7/2 = \frac{\sum (y_i - \bar{y})^2}{24}$$

$$\sum (y_i - \bar{y})^2 = 172/8$$

با توجه به آن که $\bar{x} = \bar{y}$ ، پس واریانس کل داده‌ها برابر است با:

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2 + \sum (y_i - \bar{y})^2}{n_1 + n_2} = \frac{224}{36} = 9$$

و در نتیجه انحراف معیار داده‌ها برابر $\sigma = 3$ است.

(آمار استنباطی)

گزینه ۴ .۱۰۴۷

میانگین قد دانش آموزان یک کلاس ممکن است تفاوت فاحشی با میانگین قد دانش آموزان مدرسه داشته باشد، به ویژه در صورت انتخاب یکی از کلاس‌های اول یا دوم و همچنین یکی از کلاس‌های پنجم یا ششم، میانگین به‌دست آمده با میانگین واقعی کاملاً متفاوت خواهد بود. بنابراین روش نمونه‌گیری در گزینه «۴» از نمونه‌گیری ایده‌آل فاصله دارد و ممکن است نتایج آن به سمتی خاص انحراف پیدا کند که در این صورت یک نمونه‌گیری اریب است.

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} |\overline{AB} \times \overline{AC}| = \frac{1}{2} \sqrt{(-6)^2 + (-12)^2 + 4^2} = \frac{1}{2} \sqrt{196}$$

$$= \frac{1}{2} \times 14 = 7$$

برای به‌دست آوردن طول ارتفاع وارد بر ضلع BC، کافی است طول این ضلع را پیدا کنیم. اگر AH ارتفاع وارد بر ضلع BC باشد، داریم:

$$BC = \sqrt{(3-3)^2 + (2-0)^2 + (3+3)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AH \times BC \Rightarrow 7 = \frac{1}{2} \times AH \times 2\sqrt{10}$$

$$\Rightarrow AH = \frac{7}{\sqrt{10}} = \frac{7\sqrt{10}}{10}$$

(مبانی ریاضیات)

گزینه ۴ .۱۰۴۰

$$\left. \begin{aligned} A \subseteq B \Rightarrow A \cap C \subseteq B \\ C \subseteq D \Rightarrow A \cap C \subseteq D \end{aligned} \right\} \Rightarrow A \cap C \subseteq B \cap D$$

گزینه «۱»:

$$\left. \begin{aligned} C \subseteq D \Rightarrow D' \subseteq C' \\ A \subseteq B \end{aligned} \right\} \Rightarrow A \cap D' \subseteq B \cap C'$$

گزینه «۲»:

$$\Rightarrow A - D \subseteq B - C$$

$$\left. \begin{aligned} A \subseteq B \Rightarrow A - B = \emptyset \\ C \subseteq D \Rightarrow C - D = \emptyset \end{aligned} \right\} \Rightarrow A - B \subseteq C - D$$

گزینه «۳»:

گزینه «۴»: رابطه $A - C \subseteq B - D$ لزوماً برقرار نیست. به عنوان مثال نقض داریم:

$$A = \{1\}, B = \{1, 2\}, C = \{3\}, D = \{1, 3\}$$

$$A - C = \{1\}, B - D = \{2\}$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود $A \subseteq B$ و $C \subseteq D$ است، ولی

$$A - C \not\subseteq B - D$$

(مبانی ریاضیات)

گزینه ۱ .۱۰۴۱

اگر تعداد اعضای مجموعه A را برابر n فرض کنیم، داریم:

$$\binom{2n}{2} = 5 \binom{n}{2} \Rightarrow \frac{2n(2n-1)}{2} = 5 \times \frac{n(n-1)}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{2n-1}{n-1} = \frac{5}{2} \Rightarrow 4n-2 = 5n-5 \Rightarrow n = 3$$

در این صورت تعداد زیرمجموعه‌های سه عضوی مجموعه A، برابر $\binom{3}{3} = 1$ است و تعداد زیرمجموعه‌های سه عضوی این مجموعه بعد از دو برابر شدن تعداد اعضا، برابر $\binom{6}{3} = 20$ است و در نتیجه تعداد این زیرمجموعه‌ها $20 - 1 = 19$ واحد افزایش می‌یابد.

(احتمال)

گزینه ۱ .۱۰۴۲

اگر پیشامد رو آمدن هر دو سکه را با A و پیشامد رو شدن عدد ۶ در پرتاب تاس را با B نمایش دهیم، آنگاه با توجه به مستقل بودن پیشامدهای

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

A و B داریم:

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{4} \times \frac{1}{6} = \frac{9}{24} = \frac{3}{8}$$

۱۰۴۸. گزینه ۲

(نظریه اعداد)

$$\begin{aligned} \Delta(a^2 + b^2 + c^2) &\geq 4(ab + bc + ca) \\ \Leftrightarrow \Delta a^2 + \Delta b^2 + \Delta c^2 &\geq 4ab + 4bc + 4ca \\ \Leftrightarrow \frac{\Delta}{4}a^2 + \frac{\Delta}{4}b^2 + \frac{\Delta}{4}c^2 &\geq ab + bc + ca \\ \Leftrightarrow (a^2 - ab + \frac{b^2}{4}) + (b^2 - bc + \frac{c^2}{4}) + (c^2 - ca + \frac{a^2}{4}) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow (a - \frac{b}{2})^2 + (b - \frac{c}{2})^2 + (c - \frac{a}{2})^2 &\geq 0 \end{aligned}$$

تمامی روابط بازگشت پذیر هستند، پس دو گزاره
 $\Delta(a^2 + b^2 + c^2) \geq 4(ab + bc + ca)$ و $(a - \frac{b}{2})^2 + (b - \frac{c}{2})^2 + (c - \frac{a}{2})^2 \geq 0$ هم ارز هستند.

۱۰۴۹. گزینه ۱

(نظریه اعداد)

اگر روز اول مهر را به عنوان مبدأ (صفر) در نظر بگیریم، آنگاه فاصله روز ۲۵ خرداد سال بعد از این روز برابر است با:

$$\begin{aligned} 29 + 4 \times 30 + 29 + \frac{2 \times 31}{2} + 25 &= 265 \\ \downarrow \quad \quad \quad \downarrow \quad \quad \quad \downarrow \\ \text{مهر} \quad \quad \quad \text{آبان تا} \quad \quad \quad \text{فروردین} \quad \quad \quad \text{خرداد} \\ \text{بهمین} \quad \quad \quad \text{اسفند} \quad \quad \quad \text{واردیبهشت} \end{aligned}$$

بنابراین اگر روز شنبه معادل ۶ فرض شود، طبق جدول زیر روز یکشنبه معادل صفر خواهد بود، یعنی روز اول مهر، روز یکشنبه بوده است.

شنبه	جمعه	پنجشنبه	چهارشنبه	سهشنبه	دوشنبه	یکشنبه
۶	۵	۴	۳	۲	۱	۰

۱۰۵۰. گزینه ۴

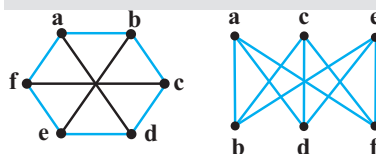
(نظریه اعداد)

$$\begin{aligned} 5^3 &= 125 \equiv 1 \Rightarrow 5^{3n} \equiv 1 \Rightarrow 5^{6n} \equiv 1 \\ 5^{3n+2} &\equiv 5^{3n} \times 5^2 \equiv 1 \times 25 \equiv -6 \\ 5^{6n+4} &\equiv 5^{6n} \times (5^2)^2 \equiv 1 \times (-6)^2 \equiv 36 \equiv 5 \\ 5^{6n+4} + 5^{3n+2} + 1 &\equiv 5 - 6 + 1 \equiv 0 \end{aligned}$$

بنابراین عبارت مورد نظر به ازای تمامی مقادیر n بر ۳۱ بخش پذیر است.

۱۰۵۱. گزینه ۴

(گراف و مدل سازی)



دو گراف فوق یکریخت هستند، پس کافی است تعداد دورهای به طول ۴ را در گراف سمت راست محاسبه کنیم. هر دور به طول ۴ در این گراف شامل ۲ رأس از بالا و ۲ رأس از پایین است، پس داریم:

$$4 \text{ رأس از پایین است، پس داریم: } = \binom{3}{2} \times \binom{3}{2} = 3 \times 3 = 9$$

۱۰۵۲. گزینه ۳

(گراف و مدل سازی)

تنها مجموعه‌های احاطه‌گر مینیمال این گراف، مجموعه‌های {b}، {f, c}، {f, d}، {a, e, c} و {a, e, d} هستند.

۱۰۵۳. گزینه ۲

(ترکیبیات)

اگر ۳ مهره سفید، ۲ مهره سیاه و یک مهره سبز خارج کرده باشیم، شرط مورد نظر سؤال برآورده نشده است. اما با انتخاب مهره هفتم یکی از سه

وضعیت (حداقل ۴ مهره سفید یا حداقل ۳ مهره سیاه یا حداقل ۲ مهره سبز) به وقوع پیوسته است.

۱۰۵۴. گزینه ۲

(ترکیبیات)

۱	۳	۲
۲	۱	۳
۳	۲	۱

مربع لاتین B تنها به صورت منحصر به فرد مقابل خواهد بود. برای این که دو مربع لاتین A و B متعامد باشند، لازم است که در مربع حاصل از ترکیب آنها، هیچ عدد دو رقمی تکراری وجود نداشته باشد. در واقع به دلیل وجود اعداد

دو رقمی ۲۲ و ۲۱ در سطر دوم، ستون اول و سطر سوم، ستون سوم، لزوماً باید در سطر اول، ستون دوم، عدد ۲۳ وجود داشته باشد، یعنی درایه نظیر آن در مربع لاتین B باید عدد ۳ باشد. حال با توجه به اینکه مربع B یک مربع لاتین است، سایر درایه‌های آن به صورت منحصر به فرد تعیین می‌شود و مربع به دست آمده برای B با مربع A متعامد نیز است، چون به ازای هر دو درایه یکسان از A، درایه‌های متناظرشان در B غیریکسان هستند.

۱۰۵۵. گزینه ۲

(شمارش)

مجموع ارقام یک عدد سه رقمی زمانی فرد است که یا هر سه رقم فرد باشند یا یک رقم فرد و دو رقم دیگر زوج باشند همچنین با انتخاب هر سه رقم، به تعداد ۳! عدد سه رقمی متمایز می‌توان نوشت. تعداد کل اعداد سه رقمی با شرط مورد

$$\left[\binom{5}{3} + \binom{5}{1} \times \binom{4}{2} \right] \times 3! = (10 + 5 \times 6) \times 6 = 240$$

نظر برابر است با:

آزمون اول

فیزیک

۱۰۵۶. گزینه ۳

(فیزیک و اندازه‌گیری)

چون برگه کاغذ نسبت به جرمش حجم قابل توجهی دارد، نیروهای مقاومت هوا و وزش نسیم، اثر قابل توجهی بر روی حرکت کاغذ دارند و نمی‌توان از آنها صرف نظر کرد یا کاغذ را به صورت یک جسم نقطه‌ای فرض کرد. از طرفی به دلیل جرم کم کاغذ، می‌توان از تغییر وزن کاغذ با تغییر فاصله از مرکز زمین صرف نظر کرد.

۱۰۵۷. گزینه ۱

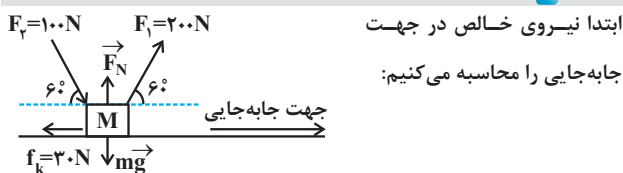
(فیزیک و اندازه‌گیری)

$\frac{1}{4}$ حجم مخلوط از مایع A و $\frac{3}{4}$ حجم مخلوط از مایع B است:

$$\rho \text{ مخلوط} = \frac{\frac{1}{4}V \times 1600 + \frac{3}{4}V \times 1200}{V} = 400 + 900 = 1300 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = 1300 \frac{\text{g}}{\text{L}}$$

۱۰۵۸. گزینه ۳

(کار، انرژی و توان)



ابتدا نیروی خالص در جهت

جاهه جایی را محاسبه می‌کنیم:

$$F = F_1 \cos 60^\circ + F_2 \cos 60^\circ - f_k$$

$$= 200 \times \frac{1}{2} + 100 \times \frac{1}{2} - 30 = 120 \text{ N}$$

و سپس کار نیروی خالص را محاسبه می‌کنیم:

$$W_f = Fd \cos \theta = 120 \times 5 \times 1 = 600 \text{ J}$$

۱۰۵۹. گزینه ۳

(ویژگی‌های فیزیکی مواد)

نیروی هم‌چسبی بین مولکول‌های آب سبب می‌شود تا ماهی بتواند از آن به عنوان وسیله‌ای جهت شکار استفاده کند.



$$= 0 / 18 \text{ cm} = 1 / 18 \text{ mm}$$

$$\Delta L = L_2 - L_1 \xrightarrow{\Delta L = 1/18 \text{ mm}} 1 / 18 \text{ mm} = L_2 - L_1$$

$$\xrightarrow{L_1 = 50 \text{ cm} = 500 \text{ mm}} 1 / 18 = L_2 - 500 \Rightarrow L_2 = 501 / 18 \text{ mm}$$

(ترمودینامیک) **گزینه ۴** ۱۰۶۵

با توجه به جرم مولی هلیوم و هیدروژن می‌دانیم: $2n_{\text{H}_2} + 4n_{\text{He}} = 80$
حال با استفاده از معادله حالت گاز داریم:

$$PV = nRT \Rightarrow 7 / 5 \times 10^5 \times 80 \times 10^{-3} = 300 \times 8 \times n$$

$$\Rightarrow n = 25 \Rightarrow \begin{cases} n_{\text{H}_2} + n_{\text{He}} = 25 \\ 2n_{\text{H}_2} + 4n_{\text{He}} = 80 \end{cases} \Rightarrow n_{\text{He}} = 15$$

$$\Rightarrow m_{\text{He}} = 4 \times 15 = 60 \text{ g}$$

$$\Rightarrow \text{درصد جرم هلیوم} = \frac{60}{80} = 75\%$$

(ترمودینامیک) **گزینه ۳** ۱۰۶۶

با توجه به اینکه فرایند هم حجم است پس:

$$\frac{P_2}{T_2} = \frac{P_1}{T_1} \Rightarrow \frac{1/25 P_1}{T_2} = \frac{P_1}{300} \Rightarrow T_2 = 375 \text{ K}$$

$$Q = nC_v \Delta T = 0 / 5 \times \left(\frac{5}{2} R\right) \times (375 - 300) = 0 / 5 \times 20 \times 75 = 750 \text{ J}$$

(ترمودینامیک) **گزینه ۱** ۱۰۶۷

رابطه انرژی درونی به صورت $\Delta U = nc_v \Delta T$ می‌باشد که ΔT از قانون گازهای کامل قابل محاسبه است پس با توجه به نمودار داریم:

$$PV = nRT \Rightarrow \frac{T_b}{T_a} = \frac{P_b V_b}{P_a V_a} \xrightarrow{\frac{P_b}{P_a} = \frac{V_a}{V_b}} \frac{T_b}{300} = \frac{(\frac{1}{5} P_a)(\frac{1}{5} V_a)}{P_a V_a} = \frac{1}{25}$$

$$\Rightarrow T_b = 768 \text{ K}$$

$$\Delta U = nc_v \Delta T \xrightarrow{c_v = \frac{5}{2} R} \Delta U = 0 / 5 \times \left(\frac{5}{2} \times 8\right) \times (768 - 300)$$

$$= 0 / 5 \times 20 \times 468 = 4680 \text{ J}$$

(الکتریسیته ساکن) **گزینه ۲** ۱۰۶۸

در شرایط عادی بار مثبت از کره باردار مثبت دور می‌شود. پس کار خود به خودی صورت گرفته است. یعنی شخص روی بار کار منفی انجام داده ($W < 0$) و میدان کار مثبت انجام داده است. ($W' > 0$) از طرفی چون جهت خطوط میدان از B به سمت A است پس $(\Delta V < 0) V_A - V_B < 0$

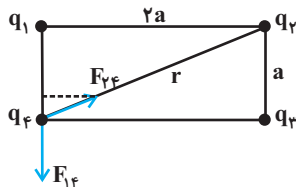
(الکتریسیته ساکن) **گزینه ۱** ۱۰۶۹

ابتدا فرض می‌کنیم q_1 و q_3 با q_4 همنام باشند. در این صورت قطعاً q_4 و q_2 مختلف علامه هستند و همچنین اگر q_1 و q_3 با q_4 ناهمنام باشند،

$$\text{قطعاً } q_2 \text{ و } q_4 \text{ همنامند. } \left(\frac{q_2}{q_1} < 0\right)$$

مسئله را در حالت اول (q_2 و q_4 ناهمنام) بررسی می‌کنیم.

$$\sum F = 0 \Rightarrow \sum F_y = 0$$



$$\Rightarrow F_{24} \times \frac{a}{r} = F_{14}$$

$$\Rightarrow \frac{kq_2 q_4}{r^2} \times \frac{a}{r} = \frac{kq_1 q_4}{a^2}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{q_2}{q_1} \right| = \left(\frac{r}{a}\right)^3$$

$$r = \sqrt{a^2 + (2a)^2} = \sqrt{5}a \Rightarrow \frac{q_2}{q_1} = -(\sqrt{5})^3 = -5\sqrt{5}$$

(ویژگی‌های فیزیکی مواد) **گزینه ۳** ۱۰۶۰

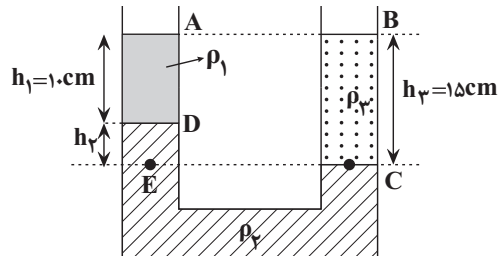
فشار در نقاط هم‌تراز یک مایع ساکن با هم برابرند. بنابراین:

$$\Rightarrow \rho_1 g h_1 + \rho_2 g h_2 = \rho_3 g h_3$$

$$\Rightarrow \rho_1 h_1 + \rho_2 h_2 = \rho_3 h_3$$

$$\Rightarrow \rho_1 \times 10 + \rho_2 \times 5 = \rho_3 \times 15$$

$$\Rightarrow 2\rho_1 + \rho_2 = 3\rho_3$$



(ویژگی‌های فیزیکی مواد) **گزینه ۳** ۱۰۶۱

با توجه به رابطه $A_1 v_1 = A_2 v_2$ تندی آب در دهانه کوچک‌تر لوله، بیش‌تر

است. بنابراین تندی آب در دهانه کوچک لوله برابر $25 \frac{m}{s}$ است.

$Av =$ آهنگ جریان آب ورودی

$$\frac{A = \pi r^2}{v = 25 \frac{m}{s}} \rightarrow 300 = 3 \times r^2 \times 25 \Rightarrow r = 2 \text{ m} \Rightarrow D = 4 \text{ m}$$

(دما و گرما) **گزینه ۴** ۱۰۶۲

با توجه به اطلاعات نمودار، گرمای لازم برای افزایش دمای جسم از -3°C تا

7°C برابر با 8 kJ است. پس با استفاده از رابطه $Q = mc\Delta T$ می‌توانیم

مقدار گرمای ویژه جسم را بیابیم:

$$Q = mc\Delta T \rightarrow 8000 = 2 \times c \times (7 - (-3)) \rightarrow c = 400 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$$

$$(\Delta T = 3 \text{ K}) \Rightarrow Q = 2 \times 400 \times 3 = 2400 \text{ J} = 2 / 4 \text{ kJ}$$

(دما و گرما) **گزینه ۲** ۱۰۶۳

ابتدا فرض می‌کنیم تمام یخ ذوب نشود، پس تمام گرمای فلز صرف ذوب

کردن یخ در دمای 0°C می‌شود.

$$m_{\text{یخ}} L_f = mc\Delta\theta \rightarrow m_{\text{یخ}} \times 336 \times 10^3 = 0 / 3 \times 420 \times 80$$

$$\rightarrow m_{\text{یخ}} = 3 \times 10^{-2} \text{ kg}$$

پس 30 g یخ ذوب می‌شود.

(دما و گرما) **گزینه ۳** ۱۰۶۴

برای به‌دست آوردن فاصله AB از رابطه انبساط طولی فلزات استفاده

$$\Delta L = L_1 \alpha \Delta T$$

می‌کنیم:

ضریب انبساط سطحی فلزات دو برابر ضریب انبساط طولی می‌باشد، در

$$\text{نتیجه: } 2\alpha = 3 / 6 \times 10^{-5} \text{ K}^{-1} \rightarrow \alpha = 1 / 12 \times 10^{-5} \text{ K}^{-1}$$

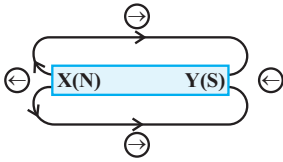
$$\Delta L = L_1 \alpha \Delta T \xrightarrow{\alpha = 1/12 \times 10^{-5} \text{ K}^{-1}} \Delta L = 50 \times 1 / 12 \times 10^{-5} (200 - 0)$$

$$P = \frac{V^2}{R} \Rightarrow \frac{P'}{P} = \left(\frac{V'}{V}\right)^2 \Rightarrow \frac{64}{100} = \left(\frac{V'}{200}\right)^2$$

$$\frac{1}{10} = \frac{V'}{200} \Rightarrow V' = 160V$$

$$\text{درصد تغییرات اختلاف پتانسیل} = \frac{\Delta V}{V} \times 100 = \frac{160 - 200}{200} \times 100 = -20\%$$

۱۰۷۵. گزینه ۱ (مغناطیس)



با توجه به عقربه‌های نشان داده شده، Y قطب S و X قطب N آهنرباست. پس می‌توانیم خطوط میدان را رسم کنیم.

جهت قرارگیری عقربه در جهت خطوط میدان خواهد بود.

۱۰۷۶. گزینه ۳ (مغناطیس)

ابتدا بردار سرعت و میدان را محاسبه می‌کنیم:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(1.0^5)^2 + (\sqrt{3} \times 1.0^5)^2} = \sqrt{1.0^{10} + 3 \times 1.0^{10}}$$

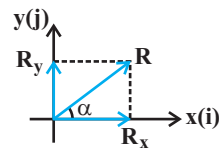
$$= 2 \times 1.0^5 \frac{m}{s}$$

$$B = \frac{1}{\gamma} \sqrt{3+1} = 1T$$

حال طبق رابطه نیروی وارد بر ذره در میدان مغناطیسی داریم:

$$F = |q| VB \sin \theta \Rightarrow F = 1/6 \times 10^{-19} \times 2 \times 1.0^5 \times 1 \times \sin \theta$$

طبق نمودار مقابل و براساس بردارهای



$$\vec{R} = R_x \vec{i} + R_y \vec{j}$$

یکه می‌دانیم:

پس برای به‌دست آوردن زاویه بین سرعت و میدان مغناطیسی کافی است $\tan \alpha$ آن‌ها را با هم مقایسه کنیم:

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} \Rightarrow \tan \alpha_1 = \frac{v_y}{v_x} = \frac{\sqrt{3} \times 1.0^5}{1.0^5} = \sqrt{3}$$

$$\vec{B} = B_x \vec{i} + B_y \vec{j} \Rightarrow \tan \alpha_2 = \frac{B_y}{B_x} = \frac{-1}{\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

می‌دانیم که اگر شیب دو خط قرینه و معکوس همدیگر باشد آن دو خط برهم عمود هستند پس می‌توانیم نتیجه بگیریم بردارهای \vec{B} و \vec{v} برهم عمود می‌باشند.

$$\vec{B} \perp \vec{v} \Rightarrow \theta = 90^\circ$$

$$F = 1/6 \times 10^{-19} \times 2 \times 1.0^5 \times 1 \times \sin 90^\circ = 3/2 \times 10^{-14} N$$

۱۰۷۷. گزینه ۱ (القای الکترومغناطیسی و جریان متناوب)

$$\text{قبل از بسته شدن کلید: } I_1 = \frac{\varepsilon}{R_{eq} + r} = \frac{18}{6} = 3A$$

$$U_1 = \frac{1}{\gamma} LI_1^2 = \frac{9}{2} L$$

$$\text{بعد از بسته شدن کلید: } I_2 = \frac{\varepsilon}{R_{eq} + r} = \frac{18}{4} = \frac{9}{2} A$$

۱۰۷۰. گزینه ۳ (الکتریسته ساکن)

برای کار میدان روی الکترون می‌توان طبق قضیه کار - انرژی جنبشی نوشت:

$$W_{\text{میدان}} = \Delta K = K_B - K_A$$

$$F \times d = \frac{1}{2} m v_B^2 - 0$$

$$\Rightarrow E |q| d \cos \theta = \frac{1}{2} m v_B^2 - 0$$

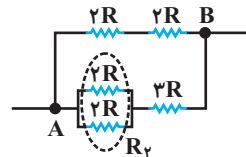
$$\Rightarrow 8 \times 10^2 \times 1/6 \times 10^{-19} \times 10^{-1} \times \cos \theta = \frac{1}{2} \times 9 \times 10^{-31} \times v_B^2$$

$$\Rightarrow 12/8 \times 10^{-18} = \frac{9}{2} \times 10^{-31} \times v_B^2$$

$$\Rightarrow \frac{256}{9} \times 10^{12} = v_B^2 \Rightarrow |v_B| = \frac{16}{3} \times 10^6 \frac{m}{s}$$

۱۰۷۱. گزینه ۳ (جریان الکتریکی و مدارهای جریان مستقیم)

مدار را به شکل زیر دوباره رسم می‌کنیم:



مقاومت معادل بین دو مقاومت موازی $2R$ ، R_p می‌باشد که از رابطه زیر قابل محاسبه

$$R_p = \frac{(2R)(2R)}{(2R) + (2R)} = R \quad \text{است:}$$

مقاومت‌های R_p و $2R$ با هم سری هستند و همچنین مقاومت‌های $2R$ شاخه

بالایی نیز با هم سری می‌باشند پس در نتیجه:

$$R_p = 2R + 2R = 4R$$

$$R_f = R_p + 2R = 4R$$

حال مقاومت‌های R_p و R_f با هم موازی می‌باشند، پس در نتیجه مقاومت معادل مدار برابر خواهد بود با:

$$R_{eq} = \frac{R_p \times R_f}{R_p + R_f} = \frac{4R \times 4R}{4R + 4R} = \frac{16R^2}{8R} = 2R$$

۱۰۷۲. گزینه ۲ (جریان الکتریکی و مدارهای جریان مستقیم)

با استفاده از قانون اهم مقدار مقاومت را محاسبه می‌کنیم:

$$IR = V \Rightarrow 1/2 \times R = 3 \Rightarrow R = 2/5 \Omega$$

حال با استفاده از عوامل مؤثر بر مقاومت الکتریکی جرم سیم قابل محاسبه می‌باشد:

$$R = \rho \frac{L}{A} = \rho \frac{L^2}{AL} = \rho \frac{L^2}{V} = \rho \frac{L^2}{\frac{m}{d}} = \rho \frac{L^2 d}{m} \quad (\text{چگالی سیم: } d)$$

$$\Rightarrow 2/5 = 1/8 \times 10^{-8} \times \frac{(25)^2 \times 8 \times 10^{-3}}{m}$$

$$\Rightarrow m = 3600 \times 10^{-5} \text{ kg} = 36 \text{ g}$$

۱۰۷۳. گزینه ۱ (جریان الکتریکی و مدارهای جریان مستقیم)

هنگامی که توان خروجی مولد به ازای ۲ مقاومت R_1 و R_2 یکسان است، مقاومت

$$r = \sqrt{2 \times 8} = 4 \Omega \quad \text{داخلی مولد از } r = \sqrt{R_1 R_2} \text{ قابل محاسبه است:}$$

$$I = \frac{\varepsilon}{r + R} \Rightarrow I = \frac{18}{4 + 5} = 2A$$

۱۰۷۴. گزینه ۱ (جریان الکتریکی و مدارهای جریان مستقیم)

مقادیری که روی لامپ نوشته شده، مقادیر اسمی هستند.

با توجه به انرژی مصرفی لامپ خواهیم داشت:

$$96 \times 10^3 = P' \times 25 \times 60 \Rightarrow \text{توان مصرفی } P' = 64W$$



$$fs \leq t \leq 1.0s \Rightarrow V_p = V_f = 16 + V_0$$

$$V_f = a_p t + V_p = -4 \times 6 + 16 + V_0 \Rightarrow V_f = V_0 - 8$$

$$\frac{\Delta x_1}{\Delta t_1} = \frac{V_1 + V_2}{2} \quad \frac{V_1 = V_0, V_2 = 16 + V_0}{\Delta t_1 = 4 - 0 = 4s} \rightarrow$$

$$\frac{\Delta x_1}{4} = \frac{16 + 2V_0}{2} \Rightarrow \Delta x_1 = 32 + 4V_0 \quad (1)$$

$$\frac{\Delta x_2}{\Delta t_2} = \frac{V_3 + V_4}{2} \quad \frac{V_3 = 16 + V_0, V_4 = V_0 - 8}{\Delta t_2 = 1.0 - 4 = 6s} \rightarrow$$

$$\frac{\Delta x_2}{6} = \frac{16 + V_0 + V_0 - 8}{2}$$

$$\Rightarrow \Delta x_2 = 6V_0 + 24 \quad (2)$$

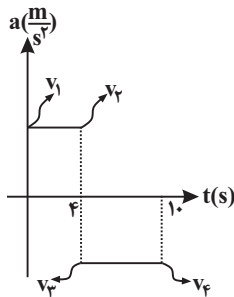
$$\Delta x_1 + \Delta x_2 = \Delta x \quad \text{کل}$$

$$\frac{\Delta x_{\text{کل}} = 156m}{(1), (2)} \rightarrow$$

$$32 + 4V_0 + 6V_0 + 24 = 156$$

$$\Rightarrow V_0 = 10 \frac{m}{s}$$

(حرکت بر خط راست)



گزینه ۳ ۱۰۸۳

در سقوط آزاد گلوله‌ها داریم $(v_0 = 0)$:

$$v^2 = 2g\Delta y, \Delta y = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow \left(\frac{v_A}{v_B}\right)^2 = \frac{gA}{gB} \Rightarrow \frac{v_A}{v_B} = \sqrt{4} = 2$$

$$\frac{1}{2}g_A t_A^2 = \frac{1}{2}g_B t_B^2 \Rightarrow \left(\frac{t_A}{t_B}\right)^2 = \frac{g_B}{g_A} \Rightarrow \frac{t_A}{t_B} = \frac{1}{2}$$

(دینامیک و حرکت دایره‌ای)

گزینه ۱ ۱۰۸۴

برای به دست آوردن شتاب گرانشی که روی ماهواره اثر می‌گذارد، داریم:

$$g = \frac{GM_e}{R^2} \rightarrow g' = \left(\frac{R_e}{R}\right)^2 \times g = \left(\frac{6400}{6400 + 1600}\right)^2 \times 10 = 6/4 \frac{m}{s^2}$$

از طرفی نیروی جانب مرکز ماهواره با $\frac{mv^2}{R}$ برابر است، پس:

$$mg' = \frac{mV^2}{R} \Rightarrow V^2 = (6400 + 1600) \times 10^3 \times 6/4$$

$$V^2 = 8 \times 6/4 \times 10^6$$

$$\Rightarrow K = \frac{1}{2}mV^2 = \frac{1}{2} \times 250 \times 8 \times 6/4 \times 10^6 = 6/4 \times 10^9 J = 6/4 GJ$$

(دینامیک و حرکت دایره‌ای)

گزینه ۲ ۱۰۸۵

اگر سرعت گلوله هنگام برخورد با زمین برابر V باشد:

$$\bar{F} = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{m\Delta v}{\Delta t} = \frac{m(v - 0)}{\Delta t}$$

با استفاده از رابطه مستقل از زمان می‌توانیم v را محاسبه کنیم:

$$2a\Delta x = V^2 - V_0^2 \Rightarrow 2 \times 10 \times 45 = V^2 - 0 \Rightarrow V = 30 \frac{m}{s}$$

$$\Rightarrow \bar{F} = \frac{m \times 30}{0/3} = 100 \cdot m = 100 \times (mg) \Rightarrow \frac{\bar{F}}{W} = 10$$

$$U_p = 2 \times \left(\frac{1}{2}L\left(\frac{I_p}{2}\right)^2\right) = \frac{11}{16}L$$

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{\frac{9}{2}L}{\frac{11}{16}L} = \frac{16 \times 9}{2 \times 11} = \frac{8}{9}$$

(القای الکترومغناطیسی و جریان متناوب)

گزینه ۱ ۱۰۷۸

می‌دانیم که N حلقه ۱ می‌باشد، پس در نتیجه:

$$\varepsilon = \frac{-\Delta\phi}{\Delta t} = -\frac{\Delta(AB)}{\Delta t} \Rightarrow \varepsilon = -A \frac{\Delta B}{\Delta t} = -\pi r^2 \frac{\Delta B}{\Delta t}$$

$$= -3 \times (0/1)^2 \frac{\Delta B}{\Delta t} = -0/3 \frac{\Delta B}{\Delta t}$$

$$0 < t < 0/1 \Rightarrow \varepsilon = -0/3 \times \frac{0/5}{0/1} = -0/15$$

$$0/1 < t < 0/2 \Rightarrow \varepsilon = -0/3 \times 0 = 0$$

$$0/2 < t < 0/3 \Rightarrow \varepsilon = -0/3 \times \frac{-0/5}{0/1} = 0/15$$

(حرکت بر خط راست)

گزینه ۳ ۱۰۷۹

متحرک در $t = 8s$ برای دومین بار تغییر جهت می‌دهد:

$$S_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} \Rightarrow S_{av} = \frac{15 + 15}{8} = \frac{30}{8} = 3/75 m/s$$

(حرکت بر خط راست)

گزینه ۲ ۱۰۸۰

با توجه به تعریف شتاب و اینکه هر دو متحرک با هم شروع به حرکت کردند، داریم:

$$V = at + V_0 \Rightarrow \begin{cases} 10 = at & \text{متحرک اول} \\ 22 = (a+1)\Delta t & \text{متحرک دوم} \end{cases} \Rightarrow 1/\Delta t = 12 \Rightarrow t = 8s$$

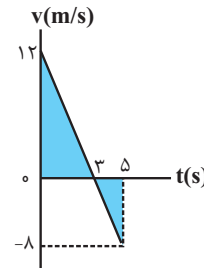
(حرکت بر خط راست)

گزینه ۴ ۱۰۸۱

برای یافتن مسافت طی شده مناسب‌ترین روش

رسم نمودار سرعت-زمان و استفاده از مساحت

زیر نمودار آن است:



$$x = -2t^2 + 12t - 40 \Rightarrow \begin{cases} a = -4 \frac{m}{s^2} \\ v_0 = 12 \frac{m}{s} \end{cases}$$

$$\Rightarrow v = at + v_0 \Rightarrow v = -4t + 12$$

t	0	3	5
v	12	0	-8

مسافت طی شده برابر مجموع قدر مطلق مساحت‌های زیر نمودار $v-t$ در بازه

$$d = |S_1| + |S_2| = \frac{3 \times 12}{2} + \frac{2 \times 8}{2} = 18 + 8 = 26m$$

(حرکت بر خط راست)

گزینه ۳ ۱۰۸۲

حرکت متحرک شامل دو بازه زمانی 0 تا $4s$ و $4s$ تا $10s$ با شتاب ثابت $4 \frac{m}{s^2}$

است. جابه‌جایی متحرک در هر کدام از این بازه‌های زمانی را به دست می‌آوریم.

$$\text{مطابق رابطه } \frac{V_1 + V_2}{2} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \text{ سرعت را در ابتدا و انتهای هر بازه به دست می‌آوریم:}$$

$$0 \leq t \leq 4s \Rightarrow V_1 = V_0, V_2 = a_1 t + V_0 = 4 \times 4 + V_0 = 16 + V_0$$

$$= \sqrt{\frac{1}{10}} \text{ m/s} = 10\sqrt{10} \text{ cm/s}$$

۱۰۸۹. گزینه ۱ (نوسان و موج)

دوره تناوب آونگ ساده $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ و $g \propto \frac{1}{r^2}$ است. با توجه به عدم تغییر l آونگ، $T \propto r$ خواهد شد، که در آن r فاصله نقطه قرارگیری آونگ از مرکز کره زمین است، با توجه به $N \propto \frac{1}{T}$

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{T_1}{T_2} = \frac{r_1}{r_2} \Rightarrow \frac{N_2}{100} = \frac{Re}{Re + \frac{16}{9}Re} = \frac{9}{25} \Rightarrow N_2 = 36$$

۱۰۹۰. گزینه ۲ (نوسان و موج)

$\beta = (10 \text{ dB}) \log \frac{I}{I_0} = 80 \Rightarrow I = 10^{-4} \frac{W}{m^2}$
شدت صوت از رابطه $I = \frac{P}{A}$ به دست می آید.

$$I = \frac{P}{A} \Rightarrow 10^{-4} = \frac{P}{4\pi \times (20)^2} \Rightarrow P = 0.48W = 480mW$$

$$\text{درصد جذب محیط} = \frac{500 - 480}{500} \times 100 = 4\%$$

۱۰۹۱. گزینه ۴ (نوسان و موج)

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \sqrt{\frac{FL}{m}} \quad \frac{m = \rho V}{V = \frac{\pi d^2}{4} L} \Rightarrow v = \frac{2}{d} \sqrt{\frac{F}{\rho}}$$

$$\Rightarrow v = \frac{2}{0.5 \times 10^{-3}} \times \sqrt{\frac{234}{3 \times 7 / 8 \times 10^3}} \Rightarrow v = 400 \frac{m}{s}$$

۱۰۹۲. گزینه ۲ (برهم کنشهای موج)

در امواج $\lambda \propto v$ است. با توجه به شکل زاویه تابش 53° است. به کمک قانون عمومی شکست داریم:

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{v_2}{v_1} = \frac{\sin \hat{r}}{\sin \hat{i}} \Rightarrow \frac{4}{6/4} = \frac{\sin \hat{r}}{\sin 53^\circ} \Rightarrow \sin \hat{r} = 0.5 \Rightarrow \hat{r} = 30^\circ$$

$$\hat{D} = 53^\circ - 30^\circ = 23^\circ$$

۱۰۹۳. گزینه ۴ (برهم کنشهای موج)

چون بسامد و طول کل ثابت است:

$$f = \frac{nv}{2L} \Rightarrow n_1 v_1 = n_2 v_2 \Rightarrow 3v_1 = 5v_2 \Rightarrow v_2 = \frac{3}{5} v_1$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{F_2}{\mu}} = \frac{3}{5} \sqrt{\frac{F_1}{\mu}} \Rightarrow F_2 = \frac{9}{25} F_1 \Rightarrow m_2 = \frac{9}{25} m_1$$

$$\text{درصد تغییرات} = \frac{9m_1 - m_1}{25m_1} \times 100 = -64\%$$

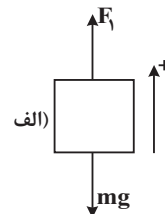
۱۰۹۴. گزینه ۱ (برهم کنشهای موج)

بسامد نور در محیطهای مختلف یکسان است:

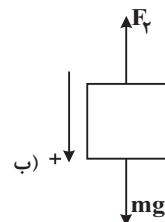
$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \times 10^8}{0.6 \times 10^{-6}} = 5 \times 10^{14} \text{ Hz}$$

۱۰۸۶. گزینه ۲ (دینامیک و حرکت دایره ای)

در حالت اول جهت مثبت را به سمت بالا و در حالت دوم جهت مثبت را به سمت پایین در نظر می گیریم و قانون دوم نیوتون را برای هر حالت می نویسیم.



$$\Rightarrow F_1 - mg = ma \quad \begin{matrix} a = 2 \frac{m}{s^2} \\ g = 10 \frac{N}{kg} \end{matrix} \rightarrow F_1 = m(g + a) = 12m \quad (1)$$



$$\Rightarrow mg - F_2 = ma' \quad \begin{matrix} a' = 2 \frac{m}{s^2} \\ g = 10 \frac{N}{kg} \end{matrix} \rightarrow F_2 = m(g - a') = 8m \quad (2)$$

$$(1) \text{ و } (2) \Rightarrow \frac{F_2}{F_1} = \frac{8m}{12m} = \frac{2}{3}$$

۱۰۸۷. گزینه ۲ (نوسان و موج)

$$x = A \cos(\omega t) \Rightarrow x = 0.2 \cos(\omega t)$$

$$t = \frac{5}{30} \text{ s} \Rightarrow x = -0.1 \Rightarrow -0.1 = 0.2 \cos\left(\frac{5}{30} \omega\right)$$

$$\cos\left(\frac{5}{30} \omega\right) = -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{5}{30} \omega = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \omega = 4\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2} \text{ s}$$

برای بیشترین سرعت متوسط باید بازه مکان متحرک حول مبدأ متقارن باشد، پس در نتیجه:

$$-A \quad (2) \quad (1) \quad +A$$

$$|v_{\text{max}}| = \frac{x_2 - x_1}{T} = \frac{0.2 \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) - 0.2 \cos\left(+\frac{\pi}{4}\right)}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

$$= \frac{0.2\sqrt{2}}{\frac{1}{4}} = \frac{4\sqrt{2}}{25} \text{ m/s}$$

۱۰۸۸. گزینه ۱ (نوسان و موج)

طبق رابطه انرژی مکانیکی نوسانگر داریم:

$$E = K + U \Rightarrow K = 20 - 15 = 5 \text{ mJ}$$

$$K = \frac{1}{2} m v^2 \Rightarrow 5 \times 10^{-3} = \frac{1}{2} \times 100 \times 10^{-3} \times v^2$$