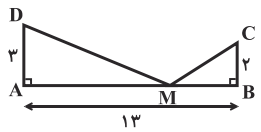
آزمون ۱ حسابان (۲)

زمان پیشنهادی: ۳۰ دقیقه

۱. [۱] نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x}$ را در امتداد محور xها، ۱۲ واحد در جهت مثبت و سپس در امتداد محور yها، ۲ واحد در جهت مثبت، انتقال می‌دهیم. فاصلهٔ نقطهٔ برخورد منحنی حاصل با نمودار تابع f از مبدأ مختصات، کدام است؟ (صفحه‌های ۱ تا ۱۲ کتاب درسی)

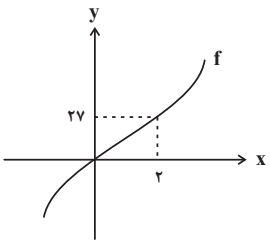
۱) $۴\sqrt{۱۵}$ ۲) $۶\sqrt{۷}$ ۳) $۴\sqrt{۱۷}$ ۴) $۶\sqrt{۱۰}$

۲. [۲] در شکل مقابل، فاصلهٔ نقطهٔ M از نقطهٔ A کدام می‌تواند باشد تا زاویهٔ $\widehat{CMD}$ برابر ۱۳۵° شود؟ (صفحه‌های ۴۲ تا ۴۴ کتاب درسی)



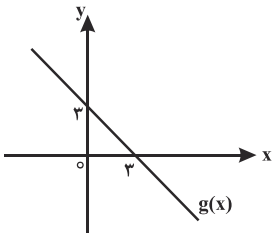
۱) ۸
۲) ۷
۳) ۶
۴) ۵

۳. [۳] در شکل زیر نمودار تابع f، تبدیل‌یافتهٔ نمودار تابع $y=x^۳$ است. دامنهٔ تابع $g(x)=\sqrt{۲۸f(x)-f^۲(x)}$ شامل چند عدد صحیح است؟ (صفحه‌های ۱ تا ۱۴ کتاب درسی)



۱) ۱
۲) ۳
۳) ۲
۴) ۴

۴. [۴] نمودار $g(x)=f(x)-۲$ به‌صورت مقابل است. مساحت ناحیهٔ محدود به نمودار $h(x)=۳f(۲x-۱)$ و محورهای مختصات چقدر است؟ (صفحه‌های ۱ تا ۱۲ کتاب درسی)



۱) ۱۵
۲) ۱۲
۳) ۱۸
۴) ۲۷

۵. [۵] کدام‌یک از موارد زیر در مورد تابع $f(x)=\begin{cases}|x+۱| & ;x\le -۱\\ -x^۲ & ;x\ge ۰\end{cases}$ درست است؟ (صفحه‌های ۱۵ تا ۱۸ کتاب درسی)

۱) صعودی است ولی اکیداً صعودی نیست.
۲) اکیداً صعودی است.
۳) نزولی است ولی اکیداً نزولی نیست.
۴) اکیداً نزولی است.

۶. [۶] تابع f اکیداً نزولی با دامنهٔ $\mathbb{R}$ و همچنین $f(۲)=۱$ است. دامنهٔ تابع $y=\sqrt{xf(x)-x-۲f(x)+۲}$ شامل چند عدد صحیح است؟ (صفحه‌های ۱۵ تا ۱۸ کتاب درسی)

۱) ۱
۲) ۲
۳) صفر
۴) بی‌شمار

۷. [۷] تابع $f(x)=\begin{cases}۲ & ;x<-۱\\ k & ;-۱\le x<۱\\ -x & ;x\ge ۱\end{cases}$ بر روی دامنه‌اش نزولی است. k چند مقدار صحیح می‌تواند داشته باشد؟ (صفحه‌های ۱۵ تا ۱۸ کتاب درسی)

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۸. [۸] اگر چند جمله‌ای $p(x)=x^۳+ax^۲-۳x-۲$ بر $x+۲$ بخش‌پذیر باشد، مجموع جواب‌های معادلهٔ $p(x)=۰$ کدام است؟ (صفحه‌های ۱۸ تا ۲۲ کتاب درسی)

۱) -۲ ۲) -۳ ۳) -۱ ۴) صفر

۹. [۹] اگر $f(x)$ تابعی متناوب با دورهٔ تناوب ۳ و در بازهٔ $[-۱,۲)$ به‌صورت $f(x)=-۲|x|+۱$ باشد، مقدار $f(۲۵)+f(۳۲)$ کدام است؟ (صفحه‌های ۲۴ تا ۲۹ کتاب درسی)

۱) -۲ ۲) -۴

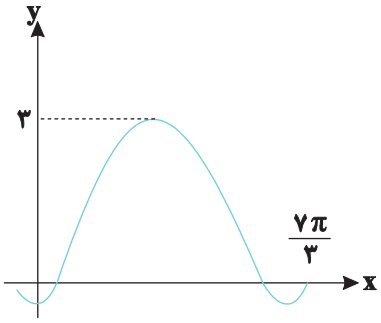
۳) -۶ ۴) صفر

۱۰. [۱۰] تابع $f(x)=\tan ۲x+\tan x$ روی کدام دامنه اکیداً صعودی است؟ (صفحه‌های ۲۴ تا ۳۴ کتاب درسی)

۱) $(۰,\frac{\pi}{۲})-\{\frac{\pi}{۴}\}$ ۲) $(-\frac{\pi}{۲},۰)-\{-\frac{\pi}{۴}\}$

۳) $(-\frac{\pi}{۴},\frac{\pi}{۴})$ ۴) $(\frac{\pi}{۴},\frac{۳\pi}{۴})$

۱۱. [۱۱] شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع با ضابطهٔ $y=a+b\sin(\frac{\pi}{۲}+x)$ است. مقدار b کدام است؟ (صفحه‌های ۲۴ تا ۲۹ کتاب درسی)



۱) ۲
۲) ۱
۳) -۱
۴) -۲

۱۲. [۱۲] تعداد جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $۴\sin(۳x)\cos(۳x)=۱$ در بازهٔ $[۰,\frac{\pi}{۲}]$، کدام است؟ (صفحه‌های ۳۵ تا ۴۴ کتاب درسی)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۱۳. [۱۳] مجموع جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\tan(۳x)\tan(x)=۱$ در بازهٔ $[\pi,۲\pi]$، کدام است؟ (صفحه‌های ۳۵ تا ۴۴ کتاب درسی)

۱) ۵π ۲) ۶π ۳) $\frac{۹\pi}{۲}$ ۴) $\frac{۱۱\pi}{۲}$

۱۴. [۱۴] حاصل $\lim_{x\to ۰}(\frac{۳x-۴}{x^۲-۲x}-\frac{x+۲}{x^۲+x})$ کدام است؟ (صفحه‌های ۵۱ تا ۵۸ کتاب درسی)

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) صفر ۴) $-\infty$

۱۵. [۱۵] اگر $\lim_{x\to ۱}\frac{x+۲}{x^۲+ax+b}=+\infty$ باشد، حاصل $\lim_{x\to ۲}\frac{x^۳-۳bx-۲}{x^۲+ax}$ کدام است؟ (صفحه‌های ۵۱ تا ۵۸ کتاب درسی)

۱) ۲ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{۹}{۲}$

۱۶. [۱۶] منحنی نمایش تابع $y=\frac{x^۲+۱}{x^۳+۲x+۳}$ در همسایگی مجانب قائم خود کدام است؟ (صفحه‌های ۵۵ تا ۵۸ کتاب درسی)

۱)
۲)
۳)
۴)

۱۷. [۱۷] اگر $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^m+x^۳}{px^n+mx^۳}=۳$ و $n\geq ۳$، حاصل $m+p-n$ کدام نمی‌تواند باشد؟ $(m,n\in\mathbb{N})$ (صفحه‌های ۵۹ تا ۶۶ کتاب درسی)

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) $-\frac{۷}{۳}$ ۴) $-\frac{۸}{۳}$

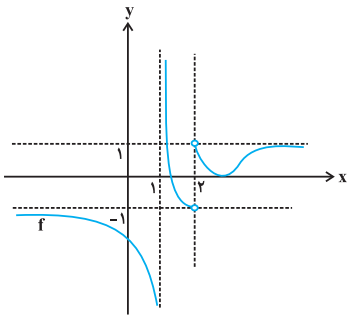
۱۸. [۱۸] حاصل $\lim\limits_{x\to(-۲)^-}\frac{[x]+۳}{x+۲}$ کدام است؟ (صفحه‌های ۵۱ تا ۵۸ کتاب درسی)

۱) $-\infty$ ۲) -۱ ۳) صفر ۴) ۱

۱۹. [۱۹] اگر تابع f با دامنهٔ $\mathbb{R}$ فقط مجانب افقی $y=y_۰$ را در $\pm\infty$ داشته باشد و داشته باشیم $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(۲f^۳(x)-f(x)\right)=۱$، مقدار $y_۰$ کدام است؟ (صفحه‌های ۵۹ تا ۶۹ کتاب درسی)

۱) صفر ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۱

۲۰. [۲۰] با توجه به نمودار تابع f، حاصل $\lim\limits_{x\to۲^+}[fofof(x)]$ کدام است؟ ([ ]، علامت جزء صحیح است) (صفحه‌های ۴۶ تا ۶۹ کتاب درسی)



۱) -۲
۲) -۱
۳) ۱
۴) صفر

آزمون ۱ هندسه (۳) زمان پیشنهادی: ۱۵ دقیقه

۲۱. [۲۱] اگر دو ماتریس $A=\begin{bmatrix}۲ & -۱\\ ۱ & ۲\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$، تعویض‌پذیر باشند، حاصل $b+c$ کدام است؟ (صفحه‌های ۱۷ تا ۲۱ کتاب درسی)

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) -۴

۲۲. [۲۲] اگر $A=\begin{bmatrix}۲ & -۱ & ۳\\ ۴ & ۰ & ۶\\ ۹ & ۲ & ۵\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۱ & -۱ & ۰\\ ۱ & ۰ & ۲\\ ۴ & ۲ & ۱\end{bmatrix}$ باشد، آنگاه درایهٔ سطر دوم و ستون سوم ماتریس $C=A^۲B$ کدام است؟ (صفحه‌های ۱۷ تا ۲۱ کتاب درسی)

۱) ۶۴ ۲) ۵۸ ۳) ۵۴ ۴) ۶۸

۲۳. [۲۳] اگر $A=\begin{bmatrix}۲ & ۴ & -۱\\ ۱ & -۲ & ۲\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۴ & ۲\\ ۰ & -۲\\ ۳ & x\end{bmatrix}$ باشد، آنگاه ماتریس AB به ازای چند مقدار x وارون‌پذیر نیست؟ (صفحه‌های ۱۷ و ۲۳ کتاب درسی)

۱) هیچ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

۲۴. [۲۴] مقدار x از معادلهٔ $\begin{bmatrix}۱ & x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{۲}{۵} & \frac{۳}{۵}\\ -\frac{۱}{۵} & \frac{۱}{۵}\end{bmatrix}^{-۱}\begin{bmatrix}۱\\ -۱\end{bmatrix}=۰$ کدام است؟ (صفحه‌های ۱۷ تا ۲۳ کتاب درسی)

۱) ۲ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۴ ۴) $\frac{۱}{۴}$

۲۵. [۲۵] اگر $A=[(i-j)^۲]_{۳\times۳}$ باشد، دترمینان ماتریس $B=\frac{۱}{۲}A$ کدام است؟ (صفحه‌های ۲۷ تا ۳۱ کتاب درسی)

۱) صفر ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۱ ۴) ۴

۲۶. [۲۶] اگر $A=\begin{bmatrix}۰ & ۳\\ ۰ & -۱\end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix}۲ & ۰\\ ۴ & -۲\end{bmatrix}$ و C یک ماتریس مربعی مرتبهٔ ۲ باشد به‌گونه‌ای که $AC=B+C$، آنگاه دترمینان ماتریس C کدام است؟ (صفحه‌های ۲۷ تا ۳۱ کتاب درسی)

۱) -۳ ۲) -۲ ۳) ۱ ۴) صفر

۲۷. [۲۷] اگر دستگاه معادلات $\begin{cases}k^۲x-۳y=-۲k+۳\\ ۳x+(k^۲-۱۰)y=۳\end{cases}$ بی‌شمار جواب داشته باشد، آنگاه مجموع مقادیر k کدام است؟ (صفحه‌های ۱۲ تا ۱۶ کتاب درسی)

۱) ۲ ۲) -۲ ۳) ۴ ۴) -۴

۲۸. [۲۸] وتر مشترک دایره به معادلهٔ $x^۲+y^۲=۱۷$، با دایرهٔ C گذرا بر نقطهٔ $(۶,-۱)$، بر خط به معادلهٔ $۲x-y=۳$ منطبق است. شعاع دایرهٔ C کدام است؟ (صفحه‌های ۴۰ تا ۴۶ کتاب درسی)

۱) ۳ ۲) $۲\sqrt{۲}$ ۳) $۲\sqrt{۳}$ ۴) ۴

۲۹. [۲۹] دو دایره به معادله‌های $x^۲+y^۲-۲x-۴y=a$ و $(x-۵)^۲=۴y-y^۲-۳$ مماس خارج‌اند. a کدام است؟ (صفحه‌های ۴۰ تا ۴۶ کتاب درسی)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) -۱ ۴) ۴

۳۰. [۳۰] دایره‌ای به مرکز $O(۲,۱)$ که از خط $۴x+۳y+۴=۰$ وتری به‌طول ۸ واحد جدا می‌کند، محور xها را در نقاط M و N قطع کرده است. طول پاره‌خط MN کدام است؟ (صفحه‌های ۴۰ تا ۴۶ کتاب درسی)

۱) $۲\sqrt{۶}$ ۲) $۲\sqrt{۳}$ ۳) $۴\sqrt{۶}$ ۴) $۴\sqrt{۳}$

آزمون ۱ ریاضیات گسسته

زمان پیشنهادی: ۱۵ دقیقه

۳۱. [۳۱] عکس کدام‌یک از قضایای شرطی زیر صحیح است؟ (صفحه‌های ۶ تا ۸ و ۱۳ و ۱۴ کتاب درسی)

۱) اگر عددی بر ۴۸ بخش‌پذیر باشد، آنگاه بر ۶ و ۸ بخش‌پذیر است.

۲) اگر عددی بر ۴۸ بخش‌پذیر باشد، آنگاه بر ۸ و ۱۲ بخش‌پذیر است.

۳) اگر عددی بر ۴۸ بخش‌پذیر باشد، آنگاه بر ۴ و ۲۴ بخش‌پذیر است.

۴) اگر عددی بر ۴۸ بخش‌پذیر باشد، آنگاه بر ۶ و ۱۶ بخش‌پذیر است.

۳۲. [۳۲] اگر a، b و c اعدادی طبیعی باشند به طوری که $ac \mid b^۲$ و $a \mid b$، آنگاه کدام‌یک از روابط زیر همواره برقرار است؟ (صفحه‌های ۹ تا ۱۲ کتاب درسی)

۱) $c \mid b$ ۲) $b \mid c$ ۳) $c \mid a$ ۴) $c \mid ab$

۳۳. [۳۳] به ازای چند عدد طبیعی سه رقمی n، اعداد $۱۱n+۹$ و $۵n+۴$ نسبت به هم اول هستند؟ (صفحه‌های ۹ تا ۱۴ کتاب درسی)

۱) ۹۰ ۲) ۱۸۰ ۳) ۴۵۰ ۴) ۹۰۰

۳۴. [۳۴] باقی‌ماندهٔ تقسیم اعداد طبیعی a و $۳a$ بر عدد طبیعی b، به ترتیب برابر ۱۷ و ۶ است. b کدام است؟ (صفحه‌های ۱۴ تا ۱۷ کتاب درسی)

۱) ۳۹ ۲) ۴۲ ۳) ۴۵ ۴) ۴۸

۳۵. [۳۵] با توجه به رابطهٔ هم‌نهشتی $۴۱^{۱۷}\overset{۱۳}{\equiv}a$، عدد (-۵) در کدام دستهٔ هم‌نهشتی به پیمانهٔ ۱۳ قرار می‌گیرد؟ (صفحه‌های ۱۸ تا ۲۲ کتاب درسی)

۱) $[a+۱]_{۱۳}$ ۲) $[a+۲]_{۱۳}$ ۳) $[a+۳]_{۱۳}$ ۴) $[a+۴]_{۱۳}$

۳۶. [۳۶] کوچک‌ترین عدد طبیعی سه رقمی که در معادلهٔ $۷۳x \equiv ۲۱ \pmod{۲۳}$ صدق می‌کند، کدام است؟ (صفحه‌های ۱۸ تا ۲۲ کتاب درسی)

۱) ۱۰۳ ۲) ۱۰۸ ۳) ۱۰۷ ۴) ۱۰۹

۳۷. [۳۷] چند نقطه با مختصات طبیعی بر روی خط $۵۷x + ۲۱y = ۱۱۲۵$ وجود دارد؟ (صفحه‌های ۲۶ تا ۳۰ کتاب درسی)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۳۸. [۳۸] در یک گراف ساده، $q = ۳۲$ و $\Delta = ۴$ است. اگر مجموع درجات رئوس زوج این گراف برابر ۵۴ باشد، آنگاه تعداد رئوس درجهٔ فرد این گراف کدام نمی‌تواند باشد؟ (صفحه‌های ۳۵ تا ۳۹ کتاب درسی)

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

۳۹. [۳۹] G یک گراف سادهٔ ناهمبند از مرتبهٔ ۷ و اندازهٔ ۱۵ است. حداکثر طول مسیر در G کدام است؟ (صفحه‌های ۳۵ تا ۳۹ کتاب درسی)

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

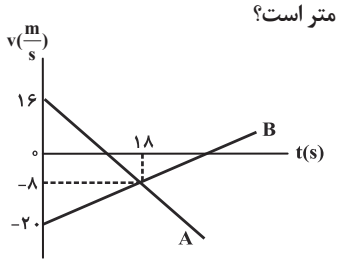
۴۰. [۴۰] اگر گراف G، ۴-منتظم و اندازهٔ گراف $\overline{G}$ برابر ۲۵ باشد، مرتبهٔ گراف G کدام است؟ (صفحه‌های ۳۵ تا ۳۹ کتاب درسی)

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۰

آزمون ۱ فیزیک (۳)

زمان پیشنهادی: ۴۵ دقیقه

۴۱. [۴۱] نمودار سرعت ـ زمان دو متحرک A و B که روی محور x حرکت می‌کنند، مطابق شکل زیر است. در مدتی که متحرک A در جهت محور x حرکت کرده است، بزرگی جابه‌جایی متحرک B چند متر است؟ (صفحه‌های ۱۵ تا ۱۷ کتاب درسی)



۱) ۱۸۶
۲) ۱۹۲
۳) ۲۰۰
۴) ۲۲۸

۴۲. [۴۲] معادلهٔ مکان – زمان متحرکی که روی محور x حرکت می‌کند، در SI به‌صورت $x = ۲t^۲ - ۸t - ۲۵$ است. کدام‌یک از گزینه‌های زیر در مورد حرکت این متحرک صحیح نیست؟ (صفحه‌های ۱۵ تا ۲۱ کتاب درسی)

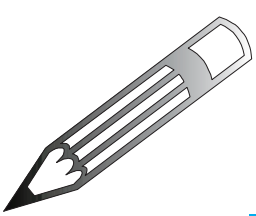
۱) بردار مکان متحرک دو بار تغییر جهت می‌دهد.
۲) حرکت متحرک ابتدا کندشونده و سپس تندشونده است.
۳) جهت حرکت متحرک در لحظهٔ $t = ۲s$ تغییر می‌کند.
۴) در بازهٔ زمانی $t_۱ = ۲s$ تا $t_۲ = ۷s$، متحرک در جهت محور x حرکت می‌کند.

۴۳. [۴۳] متحرکی با شتاب ثابت در حال حرکت بر مسیری مستقیم است. اگر اندازهٔ جابه‌جایی متحرک در دو ثانیهٔ سوم حرکت برابر با صفر باشد، کدام گزینه دربارهٔ حرکت این متحرک درست است؟ (صفحه‌های ۲ تا ۵ و ۱۵ تا ۲۱ کتاب درسی)

۱) حرکت متحرک در این بازه، کندشونده بوده است.
۲) جهت بردار شتاب در لحظهٔ $t = ۵s$ تغییر کرده است.
۳) تندی متوسط در این بازهٔ زمانی با بزرگی سرعت متوسط در بازهٔ زمانی $t_۱ = ۴s$ تا $t_۲ = ۵s$ برابر است.
۴) بردار مکان این متحرک در لحظهٔ $t = ۵s$ تغییر جهت می‌دهد.

۴۴. [۴۴] اتومبیلی با سرعت ثابت $۷۲\frac{km}{h}$ بر روی مسیری مستقیم در حال حرکت است. ناگهان مانعی را در فاصلهٔ ۱۷۲ متری خود می‌بیند و با شتاب ثابت $۲\frac{m}{s^۲}$ ترمز می‌کند. اگر مدت زمان واکنش راننده ۰/۶ ثانیه باشد. اتومبیل در فاصلهٔ چند متری از مانع می‌ایستد؟ (صفحه‌های ۱۵ تا ۲۱ کتاب درسی)

۱) ۶۰ ۲) ۲۸/۸ ۳) ۷۲ ۴) ۱۶۰



پاسخنامه‌ی تشریحی آزمون‌ها

پاسخ‌نامه آزمون ۱ حسابان (۲)

۱. گزینه ۳

با توجه به انتقال‌های موردنظر داریم:

$$f(x)=\sqrt{x} \xrightarrow[\text{مثبت‌xها}]{\text{۱۲ واحد در جهت}} f(x-۱۲)=\sqrt{x-۱۲}$$

$$\xrightarrow[\text{مثبت yها}]{\text{۲ واحد در جهت}} f(x-۱۲)+۲=\sqrt{x-۱۲}+۲$$

حال نقطهٔ برخورد دو نمودار را به‌دست می‌آوریم:

$$f(x-۱۲)+۲=f(x) \Rightarrow \sqrt{x-۱۲}+۲=\sqrt{x}$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} x-۱۲+۴+۴\sqrt{x-۱۲}=x \Rightarrow \sqrt{x-۱۲}=۲$$

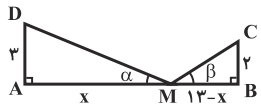
$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} x-۱۲=۴ \Rightarrow x=۱۶, f(۱۶)=۴$$

فاصلهٔ نقطه $(۱۶,۴)$ از مبدأ مختصات برابر است با:

$$\sqrt{۱۶^۲+۴^۲}=\sqrt{۴^۲(۴^۲+۱)}=۴\sqrt{۱۷}$$

(تابع)

۲. گزینه ۴



در شکل بالا برای اینکه زاویهٔ $\widehat{CMD}$ برابر ۱۳۵° گردد، $\alpha+\beta$ باید برابر با ۴۵° باشد.

$$\alpha+\beta=۴۵^\circ$$

$$\Rightarrow \tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{۱-\tan\alpha\tan\beta} \Rightarrow ۱=\frac{\frac{۳}{x}+\frac{۲}{۱۳-x}}{۱-\frac{۶}{x(۱۳-x)}}$$

$$\Rightarrow ۱=\frac{۳۹-x}{۱۳x-x^۲-۶} \Rightarrow x^۲-۱۴x+۴۵=۰ \Rightarrow (x-۵)(x-۹)=۰$$

$$\Rightarrow x=۵ \text{ یا } x=۹$$

(مثلثات)

۳. گزینه ۲

نمودار تابع f، انتقال یافتهٔ $y=kx^۳$ ، ۲ واحد به راست و ۲۷ واحد به بالاست.

$$f(x)=k(x-۲)^۳+۲۷ \xrightarrow{(۰,۰)\in f} -۸k+۲۷=۰ \Rightarrow k=\frac{۲۷}{۸}$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{۲۷}{۸}(x-۲)^۳+۲۷$$

حال سراغ دامنه تابع g می‌رویم:

$$D_g=۲۸f(x)-f^۲(x)\geq ۰ \Rightarrow ۰\leq f(x)\leq ۲۸$$

با توجه به نمودار مشخص است: $f(x)\geq ۰ \Rightarrow x\geq ۰$

اما برای حل نامعادلهٔ $f(x)\leq ۲۸$، کافی است محل برخورد $f(x)$ و خط $y=۲۸$ را بیابیم.

$$\frac{۲۷}{۸}(x-۲)^۳+۲۷=۲۸ \Rightarrow \frac{۲۷}{۸}(x-۲)^۳=۱$$

$$\Rightarrow (x-۲)^۳=\frac{۸}{۲۷} \Rightarrow (x-۲)=\frac{۲}{۳} \Rightarrow x=\frac{۸}{۳}$$

$$\Rightarrow ۰\leq x\leq \frac{۸}{۳} \xrightarrow{x\in\mathbb{Z}} ۰,۱,۲$$

(تابع)

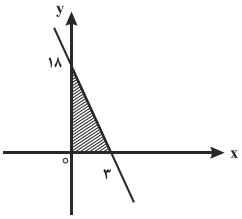
۴. گزینه ۴

تابع $g(x)$ یک خط با شیب (-۱) و عرض از مبدأ $+۳$ است؛ بنابراین:

$$g(x)=-x+۳ \Rightarrow f(x)=-x+۵$$

$$h(x)=۳\left[-(۲x-۱)+۵\right]=-۶x+۱۸$$

شکل زیر، نمودار $h(x)$ را نمایش می‌دهد:

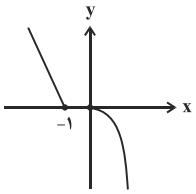


$$\Rightarrow S=\text{مساحت مثلث هاشور خورده}: \frac{۱}{۲}(۳)(۱۸)=۲۷$$

(تابع)

۵. گزینه ۳

ابتدا نمودار f را رسم می‌کنیم:



با توجه به نمودار، واضح است که تابع f نزولی است. از طرفی چون $f(-۱)=f(۰)=۰$، تابع f اکیداً نزولی نمی‌باشد.

(تابع)

۶. گزینه ۱

$$x>۲ \xrightarrow{f\text{ اکیداً نزولی}} f(x)<f(۲) \Rightarrow f(x)<۱ \Rightarrow f(x)-۱<۰$$

$$x<۲ \xrightarrow{f\text{ اکیداً نزولی}} f(x)>f(۲) \Rightarrow f(x)>۱ \Rightarrow f(x)-۱>۰$$

$$x=۲ \Rightarrow f(x)=f(۲)=۱ \Rightarrow f(x)-۱=۰$$

x		۲	
x−۲	−	۰	+
f(x)−۱	+	۰	−
(f(x)−۱)(x−۲)	−	۰	−

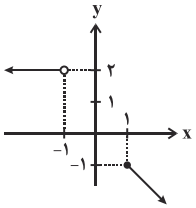
$$\Rightarrow D_y=\{۲\}$$

دامنهٔ تابع y، فقط شامل عدد صحیح ۲ است، پس فقط یک عضو صحیح دارد.

(تابع)

۷. گزینه ۴

کافی است نمودار f را رسم کنیم:



با توجه به نمودار برای این که f نزولی باشد، باید k در بازهٔ $[-۱,۲]$ قرار داشته باشد. پس k می‌تواند اعداد صحیح -۱، ۰، ۱ و ۲ را بپذیرد.

(تابع)

۸. **گزینه ۳**

باقی‌ماندهٔ تقسیم $p(x)$ بر $x+۲$ برابر صفر است:

$$p(-۲)=۰ \Rightarrow -۸+۴a-۳(-۲)-۲=۴a-۴=۰ \Rightarrow a=۱$$

$$\Rightarrow p(x)=x^۳+x^۲-۳x-۲=(x+۲)(x^۲-x-۱)$$

$$\xrightarrow{p(x)=۰} \begin{cases} x+۲=۰ \Rightarrow x=-۲ \\ x^۲-x-۱=۰ \Rightarrow x=\frac{۱\pm\sqrt{۵}}{۲} \end{cases}$$

مجموع جواب‌های معادله برابر است با:

$$-۲+\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}+\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲}=-۱$$

(بخش‌پذیری و تقسیم)

۹. **گزینه ۱**

با توجه به این‌که $f(x+nT)=f(x)$ که در آن T دورهٔ تناوب و $n\in\mathbb{Z}$ است، داریم:

$$\begin{cases} f(۲۵)=f(۱+۳\times۸)=f(۱)=-۲+۱=-۱ \\ f(۳۲)=f(-۱+۳\times۱۱)=f(-۱)=-۲+۱=-۱ \end{cases}$$

$$f(۲۵)+f(۳۲)=-۱-۱=-۲$$

(مثلثات)

۱۰. **گزینه ۳**

اگر دو تابع f و g در فاصلهٔ I اکیداً صعودی باشند، تابع $f+g$ نیز در این بازه اکیداً صعودی است.

می‌دانیم تابع $f_۱(x)=\tan x$ در بازهٔ $I_۱=(-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲})$ اکیداً صعودی است. هم‌چنین نمودار تابع $f_۲(x)=\tan ۲x$ با استفاده از انقباض افقی نمودار تابع $f_۱(x)=\tan x$ با نسبت $\frac{۱}{۲}$ به دست می‌آید. پس نمودار تابع $f_۲(x)=\tan ۲x$ در بازهٔ $I_۲=(-\frac{\pi}{۴},\frac{\pi}{۴})$ اکیداً صعودی است. پس تابع $f(x)=\tan ۲x+\tan x$ در بازهٔ $I_۱\cap I_۲=(-\frac{\pi}{۴},\frac{\pi}{۴})$ اکیداً صعودی است.

(مثلثات)

۱۱. **گزینه ۴**

با ساده کردن ضابطهٔ داده شده داریم: $y=a+b\cos x$

با توجه به نمودار داریم:

$$a+|b|=۳ \Rightarrow \text{بیش‌ترین مقدار تابع}=۳$$

نمودار سؤال، نمودار تابع کسینوسی است که نسبت به محور xها قرینه شده است.

$$\xrightarrow{b<۰} a-b=۳ \qquad (۱)$$

نقطه $(\frac{۷\pi}{۳},۰)$ روی نمودار قرار دارد.

$$\Rightarrow f(\frac{۷\pi}{۳})=۰ \Rightarrow a+b\cos(\frac{۷\pi}{۳})=a+b\cos(۲\pi+\frac{\pi}{۳})$$

$$=a+b\cos\frac{\pi}{۳}=a+\frac{b}{۲}=۰ \qquad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱),(۲)} a=۱\ ,\ b=-۲$$

(مثلثات)

۱۲. **گزینه ۳**

با توجه به اتحاد $۲\sin\alpha\cos\alpha=\sin ۲\alpha$ داریم:

$$۴\sin(۳x)\cos(۳x)=۱ \Rightarrow ۲\sin ۲(۳x)=۱$$

$$\Rightarrow ۲\sin ۶x=۱ \Rightarrow \sin ۶x=\frac{۱}{۲}=\sin\frac{\pi}{۶}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۶x=۲k\pi+\frac{\pi}{۶} \Rightarrow x=\frac{k\pi}{۳}+\frac{\pi}{۳۶} \\ ۶x=۲k\pi+\pi-\frac{\pi}{۶} \Rightarrow x=\frac{k\pi}{۳}+\frac{۵\pi}{۳۶} \end{cases} ;k\in\mathbb{Z}$$

در بازهٔ $[۰,\frac{\pi}{۲}]$، جواب‌های $\frac{\pi}{۳۶},\frac{۵\pi}{۳۶},\frac{۱۳\pi}{۳۶},\frac{۱۷\pi}{۳۶}$ قابل‌قبول است.

(مثلثات)

۱۳. **گزینه ۲**

$$\tan ۳x=\frac{۱}{\tan x}=\cot x=\tan(\frac{\pi}{۲}-x)$$

$$\Rightarrow ۳x=k\pi+\frac{\pi}{۲}-x \Rightarrow ۴x=k\pi+\frac{\pi}{۲}$$

$$\Rightarrow x=\frac{k\pi}{۴}+\frac{\pi}{۸}$$

جواب‌های $\frac{۹\pi}{۸}$، $\frac{۱۱\pi}{۸}$، $\frac{۱۳\pi}{۸}$ و $\frac{۱۵\pi}{۸}$ در بازهٔ $[\pi,۲\pi]$ قرار دارند که مجموع آن‌ها برابر ۶π است.

(مثلثات)

۱۴. **گزینه ۱**

$$\lim_{x\to۰}(\frac{۳x-۴}{x^۲-۲x}-\frac{x+۲}{x^۲+x})$$

$$=\lim_{x\to۰}\frac{۳x^۲-x-۴-x^۲+۴}{x(x-۲)(x+۱)}=\lim_{x\to۰}\frac{۲x^۲-x}{x(x-۲)(x+۱)}$$

$$=\lim_{x\to۰}\frac{۲x-۱}{(x-۲)(x+۱)}=\frac{-۱}{(-۲)(۱)}=\frac{۱}{۲}$$

(حدهای نامتناهی)

۱۵. **گزینه ۴**

$$\lim_{x\to۱}\frac{x+۲}{x^۲+ax+b}=+\infty$$

چون حد صورت برابر ۳ است، برای اینکه حاصل حد $+\infty$ باشد، باید $x=۱$ ریشهٔ مضاعف مخرج باشد.

$$\Rightarrow x^۲+ax+b=(x-۱)^۲$$

$$x^۲+ax+b=x^۲-۲x+۱$$

$$\Rightarrow a=-۲\ ,\ b=۱$$

$$\lim_{x\to۲}\frac{x^۳-۳x-۲}{x^۲-۲x}=\lim_{x\to۲}\frac{(x-۲)(x^۲+۲x+۱)}{x(x-۲)}$$

$$=\lim_{x\to۲}\frac{(x+۱)^۲}{x}=\frac{۹}{۲}$$

(حدهای نامتناهی)

۱۶. **گزینه ۳**

قابل مشاهده است که عبارت مخرج به ازای $x=-۱$ برابر صفر است؛ یعنی بر $x+۱$ بخش‌پذیر است؛ بنابراین داریم:

$$x^3+2x+3=(x+1)\left(x^2-x+3\right)$$

$$\Rightarrow y=\frac{x^2+1}{(x+1)\left(x^2-x+3\right)}$$

هم‌چنین چون معادلهٔ $x^2-x+3=0$ ریشهٔ حقیقی ندارد، این تابع فقط مجانب قائم $x=-1$ را دارد. باتوجه به اینکه عبارت صورت تابع همواره مثبت است داریم:

$$\Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{x^2+1}{x^3+2x+3}=\dfrac{\text{عدد مثبت}}{0^+}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to(-1)^-}\dfrac{x^2+1}{x^3+2x+3}=\dfrac{\text{عدد مثبت}}{0^-}=-\infty\end{cases}$$

پس این تابع در سمت راست مجانب خود به $+\infty$ و در سمت چپ آن به $-\infty$ میل می‌کند. بنابراین گزینهٔ «۳» صحیح است.

(حدهای نامتناهی)

۱۷. **گزینه ۲**

اگر $n>3$ باشد، الزاماً $m>3$ و $m=n$ خواهد بود و داریم:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^m}{px^n}=3\xrightarrow{m=n}\frac{1}{p}=3\Rightarrow p=\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow m+p-n=(m-n)+p=0+\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$$

اگر $n=3$ باشد، باید دو حالت $m=3$ و $m<3$ را بررسی کنیم:

$$n=3,m=3\Rightarrow\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3}{(p+3)x^3}=3\Rightarrow\frac{2}{p+3}=3$$

$$\Rightarrow p+3=\frac{2}{3}\Rightarrow p=-\frac{7}{3}\Rightarrow m+p-n=3-\frac{7}{3}-3=-\frac{7}{3}$$

$$n=3,m<3\Rightarrow\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{(p+m)x^3}=3\Rightarrow\frac{1}{p+m}=3$$

$$\Rightarrow p+m=\frac{1}{3}\Rightarrow m+p-n=\frac{1}{3}-3=-\frac{8}{3}$$

توجه کنید که حالت $n=3$ و $m>3$ امکان‌پذیر نیست.

(حد در بی‌نهایت)

۱۸. **گزینه ۳**

x از مقادیر کم‌تر از -2 به -2 نزدیک می‌شود. بنابراین:

$$\lim_{x\to(-2)^-}\frac{[x]+3}{x+2}=\frac{-3+3}{(-2)^-+2}=\frac{\text{صفر مطلق}}{\text{صفر حدی}}=0$$

(حد در بی‌نهایت)

۱۹. **گزینه ۴**

وقتی تابع f با دامنهٔ $\mathbb{R}$ فقط یک مجانب افقی داشته باشد یعنی $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=y_0$. حال طبق قضایای حد در بی‌نهایت داریم: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(2f^3(x)-f(x)\right)=2y_0^3-y_0=1$

پس باید معادلهٔ $2y_0^3-y_0-1=0$ را حل کنیم. چون مجموع ضرایب در این معادله برابر صفر است، $y_0=1$ یکی از ریشه‌های آن است.

این معادله ریشهٔ دیگری ندارد؛ بنابراین $y_0=1$ جواب صحیح خواهد بود.

(حد در بی‌نهایت)

۲۰. **گزینه ۱**

با توجه به شکل داریم: $x\to2^+\Rightarrow f(x)\to1^-$

$$\Rightarrow f(f(x))\to-\infty\Rightarrow f(f(f(x)))\to(-1)^-$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to2^+}[fofof(x)]=[(-1)^-]=-2$$

(حدهای نامتناهی و حد در بی‌نهایت)

پاسخ‌نامه آزمون ۱ هندسه (۳)

۲۱. **گزینه ۱**

$$AB=BA\Rightarrow\begin{bmatrix}2&-1\\1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&-1\\1&2\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}2a-c&2b-d\\a+2c&b+2d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2a+b&-a+2b\\2c+d&-c+2d\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow 2a-c=2a+b$$

$$\Rightarrow -c=b\Rightarrow b+c=0$$

(ماتریس و اعمال روی ماتریس‌ها)

۲۲. **گزینه ۲**

$$C=A^2B\Rightarrow c_{23}=\underset{\text{سطر دوم }A}{A_2}\ .A.\ \underset{\text{ستون سوم }B}{B_3}$$

$$=\begin{bmatrix}4&0&6\end{bmatrix}\underbrace{\begin{bmatrix}2&-1&3\\4&0&6\\9&2&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\2\\1\end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix}1\\6\\9\end{bmatrix}}=58$$

(ماتریس و اعمال روی ماتریس‌ها)

۲۳. **گزینه ۲**

$$AB=\begin{bmatrix}2&4&-1\\1&-2&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4&2\\0&-2\\3&x\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&-x-4\\10&2x+6\end{bmatrix}$$

ماتریس AB در صورتی وارون‌پذیر نیست که دترمینان آن برابر صفر باشد. داریم:

$$|AB|=5(2x+6)-10(-x-4)=20x+70=0$$

$$\Rightarrow x=\frac{-7}{2}$$

بنابراین ماتریس AB تنها به‌ازای یک مقدار x، وارون‌پذیر نیست.

(وارون ماتریس و دترمینان)

۲۴. گزینه ۴

فرض کنید $A=\begin{bmatrix}\frac{۲}{۵} & \frac{۳}{۵}\\ -\frac{۱}{۵} & \frac{۱}{۵}\end{bmatrix}$ باشد. در این‌صورت داریم:

$$|A|=\frac{۲}{۵}\times\frac{۱}{۵}-\frac{۳}{۵}\times\left(-\frac{۱}{۵}\right)=\frac{۵}{۲۵}=\frac{۱}{۵}\Rightarrow\frac{۱}{|A|}=۵$$

$$A^{-۱}=۵\begin{bmatrix}\frac{۱}{۵} & -\frac{۳}{۵}\\ \frac{۱}{۵} & \frac{۲}{۵}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & -۳\\ ۱ & ۲\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}x & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & -۳\\ ۱ & ۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱\\ -۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۴\\ -۱\end{bmatrix}=۴x-۱=۰\Rightarrow x=\frac{۱}{۴}$$

(وارون ماتریس و دترمینان)

۲۵. گزینه ۳

$$A=[(i-j)^۲]_{۳\times۳}=\begin{bmatrix}۰ & ۱ & ۴\\ ۱ & ۰ & ۱\\ ۴ & ۱ & ۰\end{bmatrix}$$

طبق دستور ساروس برای محاسبهٔ دترمینان ماتریس‌های ۳×۳ داریم:

$$|A|=۰+۴+۴-(۰+۰+۰)=۸$$

$$|B|=|\frac{۱}{۲}A|=(\frac{۱}{۲})^۳|A|=\frac{۱}{۸}\times۸=۱$$

(وارون ماتریس و دترمینان)

۲۶. گزینه ۲

$$AC=B+C\Rightarrow AC-IC=B\Rightarrow(A-I)C=B$$

$$\Rightarrow|A-I||C|=|B|$$

$$A-I=\begin{bmatrix}۰ & ۳\\ ۰ & -۱\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۱ & ۳\\ ۰ & -۲\end{bmatrix}\Rightarrow|A-I|=۲$$

$$B=\begin{bmatrix}۲ & ۰\\ ۴ & -۲\end{bmatrix}\Rightarrow|B|=-۴$$

بنابراین:

$$|C|=\frac{|B|}{|A-I|}=-۲$$

(وارون ماتریس و دترمینان)

۲۷. گزینه ۲

دستگاه معادلات $\begin{cases}ax+by=c\\ a'x+b'y=c'\end{cases}$ زمانی بی‌شمار جواب دارد که شرط $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$ برقرار باشد. در دستگاه معادلات مورد نظر داریم:

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\Rightarrow\frac{k^۲}{۳}=\frac{-۳}{k^۲-۱۰}\Rightarrow k^۲(k^۲-۱۰)+۹=۰$$

$$\Rightarrow k^۴-۱۰k^۲+۹=۰$$

$$\Rightarrow(k^۲-۹)(k^۲-۱)=۰\Rightarrow\begin{cases}k^۲=۹\Rightarrow k=\pm۳\\ k^۲=۱\Rightarrow k=\pm۱\end{cases}$$

$$\frac{a}{a'}=\frac{c}{c'}\Rightarrow\frac{k^۲}{۳}=\frac{-۲k+۳}{۳}\Rightarrow k^۲=-۲k+۳$$

$$\Rightarrow k^۲+۲k-۳=۰\Rightarrow\begin{cases}k=۱\\ k=-۳\end{cases}$$

بنابراین دستگاه به ازای $k=۱$ و $k=-۳$ بی‌شمار جواب دارد. پس مجموع مقادیر k، برابر (-۲) است.

(وارون ماتریس و دترمینان)

۲۸. گزینه ۴

فرض کنید معادلهٔ دایرهٔ C به‌صورت $x^۲+y^۲+ax+by+c=۰$ باشد. برای یافتن معادلهٔ وتر مشترک دو دایره، معادلات دو دایره را برابر هم قرار می‌دهیم:

$$x^۲+y^۲+ax+by+c=x^۲+y^۲-۱۷$$

$$\Rightarrow ax+by=-c-۱۷$$

وتر مشترک دو دایره بر خط $۲x-y=۳$ منطبق است، پس داریم:

$$\frac{a}{۲}=\frac{b}{-۱}=\frac{-c-۱۷}{۳}\Rightarrow\begin{cases}a=-۲b\\ c=۳b-۱۷\end{cases}$$

نقطهٔ $(۶,-۱)$ روی دایره است، پس مختصات آن در معادلهٔ دایره صدق می‌کند:

$$x^۲+y^۲-۲bx+by+۳b-۱۷=۰$$

$$\xrightarrow{(۶,-۱)}۳۶+۱-۱۲b-b+۳b-۱۷=۰$$

$$\Rightarrow ۱۰b=۲۰\Rightarrow b=۲\Rightarrow\begin{cases}a=-۴\\ c=-۱۱\end{cases}$$

شعاع دایره : $R=\frac{\sqrt{a^۲+b^۲-۴c}}{۲}=\frac{\sqrt{۱۶+۴+۴۴}}{۲}=\frac{\sqrt{۶۴}}{۲}=۴$

(دایره)

۲۹. گزینه ۴

اگر R و R' شعاع‌های دو دایره و d طول خط‌المرکزین آن‌ها باشد، برای دو دایرهٔ مماس خارج داریم: $d=R+R'$

$$x^۲+y^۲-۲x-۴y-a=۰\Rightarrow(x-۱)^۲+(y-۲)^۲=a+۵$$

$$\Rightarrow O_۱(۱,۲)\ ,\ R_۱=\sqrt{a+۵}$$

$$(x-۵)^۲+y^۲-۴y=-۳\Rightarrow(x-۵)^۲+(y-۲)^۲=۱$$

$$\Rightarrow O_۲(۵,۲)\ ,\ R_۲=۱$$

$$d=O_۱O_۲=\sqrt{(۵-۱)^۲+(۲-۲)^۲}=۴$$

$$d=R_۱+R_۲\Rightarrow۴=۱+\sqrt{a+۵}\Rightarrow a=۴$$

(دایره)

۳۰. گزینه ۳

با توجه به شکل زیر داریم:

$$AH=BH=\frac{AB}{۲}=\frac{۸}{۲}=۴$$

$$OH=\frac{|۴\times۲+۳\times۱+۴|}{\sqrt{۴^۲+۳^۲}}=\frac{۱۵}{۵}=۳$$

$$\overset{\triangle}{OBH}:r^۲=OH^۲+HB^۲=۳^۲+۴^۲=۲۵$$

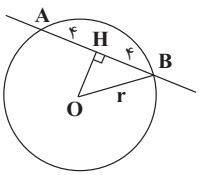
معادلهٔ دایره : $(x-۲)^۲+(y-۱)^۲=۲۵$

$$\xrightarrow{y=۰}(x-۲)^۲+(۰-۱)^۲=۲۵$$

$$\Rightarrow(x-۲)^۲=۲۴\Rightarrow x-۲=\pm۲\sqrt{۶}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x_M=۲+۲\sqrt{۶}\\ x_N=۲-۲\sqrt{۶}\end{cases}$$

$$\Rightarrow MN=(۲+۲\sqrt{۶})-(۲-۲\sqrt{۶})=۴\sqrt{۶}$$



(دایره)

پاسخ‌نامه آزمون ۱ ریاضیات گسسته

۳۱. گزینه ۴

برای برقراری عکس قضیه لازم است کوچک‌ترین مضرب مشترک دو عدد، برابر ۴۸ باشد که این موضوع فقط در گزینهٔ «۴» برقرار است. عدد ۲۴ مثال نقض گزینه‌های «۱»، «۲» و «۳» است.

(استدلال ریاضی)

۳۲. گزینه ۲

برای اعداد طبیعی a، b و c، طبق فرض سؤال داریم:

$$\left.\begin{matrix} a \mid b \xrightarrow{\times c} ac \mid bc \\ b^2 \mid ac \end{matrix}\right\} \Rightarrow b^2 \mid bc \xrightarrow{+b} b \mid c$$

اعداد $a=1$، $b=2$ و $c=4$ مثال نقضی برای نادرستی سه گزینهٔ دیگر هستند.

(بخش‌پذیری در اعداد صحیح)

۳۳. گزینه ۴

اگر $d=(11n+9,5n+4)$ باشد، آنگاه داریم:

$$\left.\begin{matrix} d \mid 11n+9 \xrightarrow{\times 5} d \mid 55n+45 \\ d \mid 5n+4 \xrightarrow{\times 11} d \mid 55n+44 \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{تفاضل}} d \mid 1 \Rightarrow d=1$$

بنابراین به ازای هر مقدار طبیعی n، دو عدد $11n+9$ و $5n+4$ نسبت به هم اول هستند، یعنی به ازای تمامی ۹۰۰ عدد طبیعی سه‌رقمی، این دو عدد نسبت به‌هم اول‌اند.

(بخش‌پذیری در اعداد صحیح)

۳۴. گزینه ۳

مطابق فرض سؤال داریم:

$$\begin{cases} a = bq + 17,17 < b & (1) \\ 3a = bq' + 6,6 < b & (2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3a = b(3q) + 51 \\ 3a = bq' + 6 \end{cases} \Rightarrow b(3q) + 51 = bq' + 6$$

$$\Rightarrow b(q' - 3q) = 45 \Rightarrow b \mid 45 \xrightarrow{b>17} b = 45$$

(بخش‌پذیری در اعداد صحیح)

۳۵. گزینه ۲

$$41 \overset{13}{\equiv} 3 \times 13 + 2 \overset{13}{\equiv} 2 \Rightarrow 41^{17} \overset{13}{\equiv} 2^{17}$$

$$2^6 \overset{13}{\equiv} 64 \overset{13}{\equiv} -1 \xrightarrow{\text{به توان } 3} 2^{18} \overset{13}{\equiv} -1 \overset{13}{\equiv} 12$$

$$\xrightarrow[(2,13)=1]{+2} 2^{17} \overset{13}{\equiv} 6 \Rightarrow 41^{17} \overset{13}{\equiv} 6 \Rightarrow a = 6$$

$$-5 \overset{13}{\equiv} 8 = a + 2 \Rightarrow -5 \in [a+2]_{13}$$

(هم‌نهشتی در اعداد صحیح و کاربردها)

۳۶. گزینه ۱

$$73x \overset{23}{\equiv} 21 \Rightarrow 4x \overset{23}{\equiv} 44 \xrightarrow[(4,23)=1]{+4} x \overset{23}{\equiv} 11$$

پس باقی‌ماندهٔ تقسیم x بر ۲۳، برابر ۱۱ می‌باشد. بنابراین داریم:

$$x = 23k + 11 \xrightarrow[k=4]{\text{کوچک‌ترین عدد طبیعی سه‌رقمی}} x = 103$$

(هم‌نهشتی در اعداد صحیح و کاربردها)

۳۷. گزینه ۲

$$57x + 21y = 1125 \xrightarrow{+3} 19x + 7y = 375 \Rightarrow 19x \overset{7}{\equiv} 375$$

$$\Rightarrow -2x \overset{7}{\equiv} 4 \xrightarrow[(-2,7)=1]{+(-2)} x \overset{7}{\equiv} -2 \Rightarrow x = 7k - 2 \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$19(7k-2) + 7y = 375 \Rightarrow 7y = -133k + 413$$

$$\xrightarrow{+7} y = -19k + 59$$

$$\left.\begin{matrix} x > 0 \Rightarrow 7k - 2 > 0 \Rightarrow k > \frac{2}{7} \\ y > 0 \Rightarrow -19k + 59 > 0 \Rightarrow k < \frac{59}{19} \end{matrix}\right\} \Rightarrow 1 \le k \le 3$$

بنابراین ۳ نقطه با مختصات طبیعی بر روی این خط وجود دارد.

(هم‌نهشتی در اعداد صحیح و کاربردها)

۳۸. گزینه ۱

می‌دانیم مجموع درجات رئوس گراف، دو برابر تعداد یال‌های آن است. اگر مجموع درجات رئوس زوج را با A و مجموع درجات رئوس فرد گراف را با B نمایش دهیم، داریم:

$$2q = A + B \Rightarrow 64 = 54 + B \Rightarrow B = 10$$

با توجه به این که $\Delta = 4$ است، پس این گراف نمی‌تواند رأسی با درجهٔ بزرگ‌تر از ۴ داشته باشد، بنابراین رئوس فرد گراف فقط می‌توانند از درجهٔ ۱ یا ۳ باشند؛ زیرا در هیچ‌یک از حالت‌های وجود ۲ رأس از درجهٔ ۱، یک رأس درجه ۱ و یک رأس درجهٔ ۳ و یا ۲ رأس درجه ۳، مجموع درجات رئوس فرد برابر ۱۰ نمی‌شود.

اعداد گزینه‌های دیگر بر اساس حالت‌های زیر امکان‌پذیر هستند:

گزینهٔ «۲»: گراف سه رأس درجهٔ ۳ و یک رأس درجه ۱ داشته باشد.

گزینهٔ «۳»: گراف دو رأس درجهٔ ۳ و چهار رأس درجه ۱ داشته باشد.

گزینهٔ «۴»: گراف یک رأس درجهٔ ۳ و هفت رأس درجه ۱ داشته باشد.

(معرفی گراف)

۳۹. گزینه ۲

از آن‌جا که $\binom{6}{2} = 15$ و G گرافی ساده و ناهمبند از مرتبهٔ ۷ می‌باشد، پس G از یک گراف کامل K_6 و یک رأس تنها تشکیل شده است. هم‌چنین حداکثر طول مسیر درگراف K_p، برابر $p-1$ است، پس حداکثر طول مسیر در چنین گرافی برابر $6-1=5$ است.

(معرفی گراف)

۴۰. گزینه ۴

$$q(G) + q(\bar{G}) = q(K_p) \Rightarrow \frac{4p}{2} + 25 = \frac{p(p-1)}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{p(p-1)}{2} - \frac{4p}{2} = 25 \Rightarrow p(p-1) - 4p = 50$$

$$\Rightarrow p(p-5) = 50 = 10 \times 5 \Rightarrow p = 10$$

(معرفی گراف)