بازه و معادلات و نامعادلات، ماتریس

۱- گزینه‌ی «۲» باید $y_{۱} > y_{۲}$ باشد، پس:

$$\sqrt{-x^{۲}+۴x+۵} > |x-۳|+۲$$

$$-x^{۲}+۴x+۵ \ge ۰ \Rightarrow x=-۱, x=۵ \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} -۱ \le x \le ۵$$

بنابراین با توجه به دامنه‌ی متغیر معادله و ریشه‌ی داخل قدر مطلق خواهیم داشت:

$$(۱)\quad -۱ \le x < ۳ \Rightarrow \sqrt{-x^{۲}+۴x+۵} > -x+۵ \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}} -x^{۲}+۴x+۵ > x^{۲}-۱۰x+۲۵$$

$$\Rightarrow x^{۲}-۷x+۱۰ < ۰ \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} ۲ < x < ۵ \xrightarrow{\text{اشتراک با بازه‌ی اصلی}} ۲ < x < ۳ \quad (\mathrm{I})$$

$$(۲)\quad ۳ \le x \le ۵ \Rightarrow \sqrt{-x^{۲}+۴x+۵} > x-۱ \Rightarrow -x^{۲}+۴x+۵ > x^{۲}-۲x+۱$$

$$\Rightarrow x^{۲}-۳x-۲ < ۰ \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} \frac{۳-\sqrt{۱۷}}{۲} < x < \frac{۳+\sqrt{۱۷}}{۲} \xrightarrow{\text{اشتراک با بازه‌ی اصلی}} ۳ \le x < \frac{۳+\sqrt{۱۷}}{۲} \quad (\mathrm{II})$$

$$\xrightarrow{\mathrm{II}\ ,\ \mathrm{I}} x \in \left(۲, \frac{۳+\sqrt{۱۷}}{۲}\right)$$

۲- گزینه‌ی «۳»

$$\frac{x+۱}{x}-\frac{x}{x-۱} \le ۲ \to \frac{x^{۲}-۱-x^{۲}}{x(x-۱)} \le ۲ \to ۲+\frac{۱}{x(x-۱)} \ge ۰ \to \frac{۲x^{۲}-۲x+۱}{x^{۲}-x} \ge ۰$$

$$۲x^{۲}-۲x+۱=۰ \to \begin{cases} \Delta=-۴<۰ \\ a=۲>۰ \end{cases} \to$$ عبارت همواره مثبت است.

$$x^{۲}-x=۰ \to \begin{cases} x=۰ \\ x=۱ \end{cases}$$

x	$-\infty$	۰		۱	$+\infty$
$۲x^{۲}-۲x+۱$	+		+		+
$x^{۲}-x$	+	۰	−	۰	+
$\frac{۲x^{۲}-۲x+۱}{x^{۲}-x}$	+	ت ن	−	ت ن	+

$\to x<۰$ یا $x>۱$

بنابراین مجموعه جواب نامعادله‌ی فوق دو عدد صحیح صفر و ۱ را شامل نمی‌شود.

۳- گزینه‌ی «۳»

$$x+۲y > x \Rightarrow ۲y > ۰ \Rightarrow y > ۰$$

$$۳-\frac{۱}{۳}y > \frac{۱}{۳}x \xrightarrow{\times ۳} ۹-y > x \Rightarrow ۹-x > y > ۰ \Rightarrow ۹-x > ۰ \Rightarrow x < ۹$$

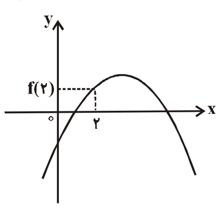
۴- گزینه‌ی «۴» در معادله‌ی $x^{۲}-۳x+۱=۰$ چون $\frac{c}{a}=۱$ است، پس دو جواب، معکوس هم هستند، پس $\alpha=\frac{۱}{\beta}$ و $\beta=\frac{۱}{\alpha}$. بنابراین:

$$(\alpha+\frac{۱}{\beta})^{۳}+(\beta+\frac{۱}{\alpha})^{۳}=(\alpha+\alpha)^{۳}+(\beta+\beta)^{۳}=۸\alpha^{۳}+۸\beta^{۳}=۸(\alpha^{۳}+\beta^{۳})=۸(S^{۳}-۳PS)=۸(۳^{۳}-۳(۱)(۳))=۱۴۴$$

۵- گزینه‌ی «۲»

$$\begin{cases} \frac{c}{a}=۲^{k}>۰ \\ \frac{-b}{a}=۵>۰ \end{cases}$$

با توجه به این‌که $a<۰$ است، بنابراین شکل تابع به فرم تقریبی زیر می‌شود.



بنابراین می‌توان نتیجه گرفت:

$$f(۲)>۰ \Rightarrow -۴+۱۰-۲^{k}>۰ \Rightarrow ۲^{k}<۶ \xrightarrow{k\in N} k=۱\,,\,۲$$

۶- گزینه‌ی «۴»

$۱+\sqrt{۱+x^۲}=\sqrt{۱+x} \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}} ۱+۱+x^۲+۲\sqrt{۱+x^۲}=۱+x \Rightarrow (x^۲-x+۱)+۲\sqrt{۱+x^۲}=۰$

عبارت $x^۲-x+۱$ همواره مثبت است $(\Delta<۰, a>۰)$، هم‌چنین $\sqrt{۱+x^۲}$ نیز همواره مثبت است. بنابراین تساوی فوق هیچ گاه نمی‌تواند برقرار باشد. چون مجموع دو عبارت مثبت هیچ گاه صفر نمی‌شود.

۷- گزینه‌ی «۲»

چون عبارت همواره مثبت است باید داشته باشیم: $\left.\begin{matrix} a-۳>۰ \\ \Delta<۰ \end{matrix}\right\}$

$۱)\ a-۳>۰ \rightarrow a>۳$

$۲)\ (a-۳)^۲-۴\times ۵(a-۳)<۰ \rightarrow (a-۳)(a-۳-۲۰)<۰ \rightarrow ۳<a<۲۳ \xrightarrow{۱,۲} ۳<a<۲۳$

۸- گزینه‌ی «۳»

$۱)\ x\geq ۰ \rightarrow x^۲-۴x<۲x-۵ \rightarrow x^۲-۶x+۵<۰ \rightarrow ۱<x<۵ \xrightarrow{x\geq ۰} ۱<x<۵$

$۲)\ x<۰ \rightarrow -x^۲+۴x<۲x-۵ \rightarrow x^۲-۲x-۵>۰ \rightarrow x<۱-\sqrt{۶}$ یا $x>۱+\sqrt{۶} \xrightarrow{x<۰} x<۱-\sqrt{۶}$

$\xrightarrow{۲,۱} x<۱-\sqrt{۶}$ یا $۱<x<۵$

۹- گزینه‌ی «۴»

$(\mathrm{I})\ \ x(۴x-۱)\leq ۱/۵ \rightarrow ۴x^۲-x\leq \frac{۳}{۲} \rightarrow ۸x^۲-۲x-۳\leq ۰$

$\xrightarrow{\times ۲} ۱۶x^۲-۴x-۶\leq ۰ \rightarrow (۴x-۳)(۴x+۲)\leq ۰$

x		$-\frac{۱}{۲}$		$\frac{۳}{۴}$	
$P_۱$	+	∘	−	∘	+

$(\mathrm{II})\ \ |x|\leq ۱ \rightarrow -۱\leq x\leq ۱$

$\mathrm{I}\cap \mathrm{II}=\left[-\frac{۱}{۲},\frac{۳}{۴}\right]$

۱۰- گزینه‌ی «۳»

$\frac{۲x^۲-۲x+۶}{x^۲+۱}>۳ \xrightarrow{x^۲+۱>۰} ۲x^۲-۲x+۶>۳(x^۲+۱)$

$-x^۲-۲x+۳>۰ \Rightarrow x^۲+۲x-۳<۰ \Rightarrow x=۱\ ,\ \ x=-۳$

x	$-\infty$		-۳		۱		$+\infty$
عبارت		+	∘	−	∘	+	

$(a,b)=(-۳,۱)$

بنابراین بیش‌ترین مقدار $b-a=۱-(-۳)=۴$ می‌باشد.

۱۱- گزینه‌ی «۱»

از هر طرف مخرج مشترک می‌گیریم:

$\frac{\overbrace{x-(x+۱)}^{-۱}}{x(x+۱)}=\frac{\overbrace{(x+۲)-(x-۱)}^{۳}}{(x-۱)(x+۲)}$

با فرض $x\neq ۰, \pm ۱, -۲$، طرفین وسطین می‌کنیم:

$\Rightarrow -x^۲-x+۲=۳x^۲+۳x \Rightarrow ۴x^۲+۴x-۲=۰ \xrightarrow{\Delta>۰}$ دو جواب حقیقی دارد.

چون $\frac{c}{a}=-\frac{۱}{۲}<۰$ است، بنابراین معادله یک جواب مثبت و یک جواب منفی دارد که هیچ‌کدام از جواب‌ها ریشه‌ی مخرج نیستند.

۱۲- گزینه‌ی «۱»

$x=۳$ جواب معادله است. پس در معادله صدق می‌کند:

$\frac{a}{۳^۲+۲(۳)-۳}+\frac{a}{۲(۳)-۲}=\frac{۳-۱}{۳^۲+۳-۶} \Rightarrow \frac{a}{۱۲}+\frac{a}{۴}=\frac{۲}{۶} \xrightarrow{\times ۱۲} a+۳a=۴ \Rightarrow a=۱$

حال $a=۱$ را در معادله قرار داده و آن را حل می‌کنیم تا β به‌دست آید.

$\frac{۱}{(x+۳)(x-۱)}+\frac{۱}{۲(x-۱)}=\frac{x-۱}{(x+۳)(x-۲)}$

$\frac{۲+x+۳}{۲(x-۱)(x+۳)}=\frac{x-۱}{(x+۳)(x-۲)} \Rightarrow \frac{x+۵}{۲(x-۱)}=\frac{x-۱}{x-۲} \xrightarrow{x\neq ۱,۲,-۳}$

$$x^{۲}+۳x-۱۰=۲(x^{۲}-۲x+۱)\Rightarrow x^{۲}+۳x-۱۰=۲x^{۲}-۴x+۲\Rightarrow x^{۲}-۷x+۱۲=۰$$
$$\Rightarrow (x-۳)(x-۴)=۰\Rightarrow x=۳\ ,\ ۴$$

پس $\beta=۴$ است. بنابراین:

$$\beta^{۲}+\beta=۴^{۲}+۴=۲۰$$

۱۳- گزینه‌ی «۱»

$$A^{۳}+۳I=A^{۳}+\begin{bmatrix}۳&۰&۰\\۰&۳&۰\\۰&۰&۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴&۰&۰\\۰&-۵&۰\\۰&۰&۲/۸۷۵\end{bmatrix}$$

$$A^{۳}=\begin{bmatrix}۱&۰&۰\\۰&-۸&۰\\۰&۰&-۰/۱۲۵\end{bmatrix}\to A=\begin{bmatrix}۱&۰&۰\\۰&-۲&۰\\۰&۰&-\frac{۱}{۲}\end{bmatrix}$$

حاصل‌ضرب درایه‌های قطر اصلی $\to ۱\times(-۲)\times(-\frac{۱}{۲})=۱$

۱۴- گزینه‌ی «۲»

$$A^{۲}=\begin{bmatrix}۰&\tan x\\\cot x&۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۰&\tan x\\\cot x&۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\tan x\cot x&۰\\۰&\cot x\tan x\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱&۰\\۰&۱\end{bmatrix}=I$$

$\to A^{۲۰}=(A^{۲})^{۱۰}=(I)^{۱۰}=I=\begin{bmatrix}۱&۰\\۰&۱\end{bmatrix}\to$ مجموع درایه‌های قطر اصلی $=۱+۱=۲$

۱۵- گزینه‌ی «۲»

$$A^{۲}=\begin{bmatrix}-۱&۰\\۰&-۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۱&۰\\۰&-۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱&۰\\۰&۱\end{bmatrix}=I$$
$$A^{۳}=A.A^{۲}\Rightarrow A^{۳}=A.I\Rightarrow A^{۳}=A$$

بنابراین:

$$\begin{cases}A^{۱۰}=I\\A^{۲۱}=A\end{cases}\Rightarrow A^{۱۰}-A^{۲۱}=\begin{bmatrix}۱&۰\\۰&۱\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-۱&۰\\۰&-۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲&۰\\۰&۲\end{bmatrix}$$

مجموع درایه‌ها $=۲+۰+۰+۲=۴$

۱۶- گزینه‌ی «۲»

$$A^{۲}=\begin{bmatrix}۲&۱\\۳&۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲&۱\\۳&۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴+۳&۲+۰\\۶+۰&۳+۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۷&۲\\۶&۳\end{bmatrix}$$
$$A^{۲}-۲I=\begin{bmatrix}۷&۲\\۶&۳\end{bmatrix}-۲\begin{bmatrix}۱&۰\\۰&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۵&۲\\۶&۱\end{bmatrix}$$
$$|A^{۲}-۲I|=۵\times۱-۲\times۶=۵-۱۲=-۷$$

۱۷- گزینه‌ی «۴»

$$A-B=\begin{bmatrix}۲&-۲\\۳&۲\end{bmatrix}\to|A-B|=(۲)(۲)-(-۲)(۳)=۱۰$$
$$(A-B)^{-۱}=\frac{۱}{۱۰}\begin{bmatrix}۲&۲\\-۳&۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰/۲&۰/۲\\-۰/۳&۰/۲\end{bmatrix}$$

۱۸- گزینه‌ی «۳»

چون $A^{-۱}=A$، پس با ضرب A در دو طرف این تساوی، باید داشته باشیم $I=A^{۲}$، حال شرط $A^{۲}=I$ را بررسی می‌کنیم:

$$A^{۲}=\begin{bmatrix}a&۱\\-b&۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&۱\\-b&۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a^{۲}-b&a+۲\\(a+۲)(-b)&۴-b\end{bmatrix}\xrightarrow{A^{۲}=I}\begin{bmatrix}a^{۲}-b&a+۲\\(a+۲)(-b)&۴-b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱&۰\\۰&۱\end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow\begin{cases}a+۲=۰\\۴-b=۱\end{cases}\Rightarrow a=-۲\ ,\ b=۳\Rightarrow a+b=۱$$

توجه کنید a و b در درایه‌های ستون اول هم صدق می‌کنند و جواب مسأله‌اند.

۱۹- گزینه‌ی «۱»

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}_{B} \times A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{I}$$

$B.A = I \Rightarrow$ معکوس B است A

$$A = B^{-1} = \frac{1}{-5}\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

۲۰- گزینه‌ی «۳»

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$A^2 - 2A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 8 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow$ مجموع درایه‌ها $= (-1)+0+8+3 = 10$

۲۱- گزینه‌ی «۴» می‌دانیم $|A \times B| = |A| \times |B|$ بنابراین از دو طرف دترمینان می‌گیریم.

$$|A^2| \times \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -7 & 11 \\ -6 & 10 \end{vmatrix}$$

$$|A^2| \times (-2) = -4 \rightarrow |A|^2 = 2 \rightarrow |A| = \pm\sqrt{2} \rightarrow |A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

۲۲- گزینه‌ی «۳»

$$A \times B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow |A \times B| = (1)(2) - 0 = 2$$

$(A \times B)^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0/5 & 0/5 \end{bmatrix} \rightarrow$ مجموع درایه‌های قطر فرعی $= 0/5 + 0 = 0/5$

۲۳- گزینه‌ی «۳»

$$|(3A)(2A^{-1})| = |6A.A^{-1}| = 6^2\,|I| = 36 \times 1 = 36$$

۲۴- گزینه‌ی «۱»

$$\begin{bmatrix} 2x+y \\ 3x+3y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-1 \\ y-1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} 2x+y = x-1 \;\Rightarrow\; x+y=-1 \\ 3x+3y = y-1 \Rightarrow\; 3x+2y=-1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases} \Rightarrow 2x+5y = 2-10 = -8$$

۲۵- گزینه‌ی «۴» کافی است $AX = B$ را از چپ در A^{-1} ضرب کنیم.

$$A^{-1}AX = A^{-1}B \Rightarrow X = A^{-1}B \quad *$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{*} X = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

مثلثات

۲۶- گزینه‌ی «۳»

$\sin x > \sin^۳ x \rightarrow \sin x - \sin^۳ x > ۰ \rightarrow \sin x(۱-\sin^۲ x) > ۰ \rightarrow \sin x \cos^۲ x > ۰ \rightarrow \sin x > ۰ \rightarrow$ ربع اول یا دوم

$\cos x < \cos^۳ x \rightarrow \cos x - \cos^۳ x < ۰ \rightarrow \cos x(۱-\cos^۲ x) < ۰ \rightarrow \cos x \sin^۲ x < ۰ \rightarrow \cos x < ۰ \rightarrow$ ربع دوم یا سوم

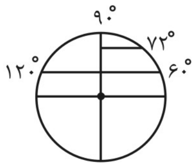
$\Rightarrow x$ ربع دوم $\Rightarrow (\frac{۳\pi}{۴}, \pi)$ بخشی از ربع دوم

۲۷- گزینه‌ی «۲»

نکته: $A + \frac{۱}{A} = -۲ \Rightarrow A = -۱$

لذا $\sin x = -۱ \rightarrow \cos x = ۰ \rightarrow (-۱)^۵ + (۰)^۲ = -۱$

۲۸- گزینه‌ی «۱»

$۷۲° \le x \le ۱۲۰° \Rightarrow$ 

$\Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۲} \le \sin x \le ۱ \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۲} \le A \le ۱$

۲۹- گزینه‌ی «۲»

$$\frac{\sin(۱۸۰° - ۲۵°) - \sin(۲۷۰° - ۲۵°)}{\cos(۳۶۰° - ۲۵°)} = \frac{\sin ۲۵° + \cos ۲۵°}{\cos ۲۵°} = \tan ۲۵° + ۱ = a + ۱$$

۳۰- گزینه‌ی «۲»

$$\alpha - \beta = \frac{۳\pi}{۲} \rightarrow \alpha = \beta + \frac{۳\pi}{۲} \rightarrow \sin\alpha = \sin(\beta + \frac{۳\pi}{۲}) \rightarrow \sin\alpha = -\cos\beta$$

$$\frac{۲\sin\alpha - ۳\cos\beta}{-۴\sin\alpha - \cos\beta} = \frac{۲\sin\alpha - ۳(-\sin\alpha)}{-۴\sin\alpha + \sin\alpha} = \frac{۵\sin\alpha}{-۳\sin\alpha} = -\frac{۵}{۳}$$

۳۱- گزینه‌ی «۴»

$$\frac{\sin x \cos x}{\frac{۱}{\cos^۲ x}} - \frac{\sin x \cos x}{\frac{۱}{\sin^۲ x}} = a\sin(\pi + ۴x) \rightarrow \sin x \cos^۳ x - \sin^۳ x \cos x = -a\sin ۴x$$

$$\rightarrow \sin x \cos x(\cos^۲ x - \sin^۲ x) = -a\sin ۴x \rightarrow \frac{۱}{۲}\sin ۲x \cos ۲x = -a\sin ۴x \rightarrow \frac{۱}{۴}\sin ۴x = -a\sin ۴x \rightarrow a = \frac{-۱}{۴}$$

۳۲- گزینه‌ی «۱»

$$۵۰° = ۴۰° + ۱۰° \Rightarrow \begin{cases} \sin ۵۰° = \sin ۴۰° \cos ۱۰° + \cos ۴۰° \sin ۱۰° \\ \cos ۵۰° = \cos ۴۰° \cos ۱۰° - \sin ۴۰° \sin ۱۰° \end{cases} \Rightarrow A = \frac{\cos ۴۰° \sin ۱۰°}{\cos ۴۰° \cos ۱۰°} = \tan ۱۰° = a$$

این مسئله با تبدیل ضرب به جمع هم قابل حل می‌باشد.

۳۳- گزینه‌ی «۴»

$$\frac{\sin^۲ ۲\alpha(۱ + \tan^۲ \alpha)}{۴} + \frac{۱}{۱ + \cot^۲(\frac{\pi}{۲} - \alpha)} = \frac{(۲\sin\alpha\cos\alpha)^۲(\frac{۱}{\cos^۲\alpha})}{۴} + \frac{۱}{۱ + \tan^۲\alpha} = \sin^۲\alpha + \cos^۲\alpha = ۱$$

۳۴- گزینه‌ی «۴»

$\pi < a < ۲\pi \rightarrow \frac{\pi}{۲} < \frac{a}{۲} < \pi \rightarrow \frac{a}{۲} \in$ ناحیه‌ی دوم

$$\sqrt{\frac{۲\sin a - ۲\sin a\cos a}{۲\sin a + ۲\sin a\cos a}} = \sqrt{\frac{۲\sin a(۱-\cos a)}{۲\sin a(۱+\cos a)}} = \sqrt{\frac{۲\sin^۲\frac{a}{۲}}{۲\cos^۲\frac{a}{۲}}}$$

$$\sqrt{\tan^۲\frac{a}{۲}} = \left|\underbrace{\tan\frac{a}{۲}}_{\text{منفی}}\right| = -\tan\frac{a}{۲}$$

۳۵- گزینه‌ی «۳»

کافی است به جای x، صفر قرار دهیم.

$$\frac{A}{۱} - ۰ = ۱ + ۰ \rightarrow A = ۱$$

۳۶- گزینه‌ی «۴»

صورت کسر $A=\sin 40^\circ-\tan 60^\circ\cos 40^\circ=\sin 40^\circ-\frac{\sin 60^\circ}{\cos 60^\circ}\cos 40^\circ$

صورت کسر $A=\frac{\sin 40^\circ\cos 60^\circ-\sin 60^\circ\cos 40^\circ}{\cos 60^\circ}=\frac{\sin(40^\circ-60^\circ)}{\frac{1}{2}}=-2\sin 20^\circ=-2(2\sin 10^\circ\cos 10^\circ)=-4\sin 10^\circ\cos 10^\circ$

کسر کلی $=\frac{-4\sin 10^\circ\cos 10^\circ}{\cos 10^\circ}=-4\sin 10^\circ=4\cos 100^\circ$

۳۷- گزینه‌ی «۲»

$$\frac{\cos 2a\cos a+\sin 2a\sin a}{\sin a.\cos a}=\frac{\cos(2a-a)}{\sin a.\cos a}=\frac{1}{\sin a}$$

۳۸- گزینه‌ی «۳»

$$\tan(x+\frac{\pi}{4})=\frac{\tan x+\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan x.\tan\frac{\pi}{4}}=\frac{\tan x+1}{1-\tan x}=\frac{\frac{\sin x}{\cos x}+1}{1-\frac{\sin x}{\cos x}}=\frac{\frac{\sin x+\cos x}{\cos x}}{\frac{\cos x-\sin x}{\cos x}}=\frac{a}{-b}$$

۳۹- گزینه‌ی «۴»

می‌دانیم: $\sin x.\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x \ , \ 2\cos^2 x-1=\cos 2x$

$$\frac{1}{2}\sin 2x(\cos 2x)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\sin 4x=\frac{1}{4}\times\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{8}$$

۴۰- گزینه‌ی «۲»

می‌دانیم: $12^\circ+33^\circ=45^\circ\xrightarrow{\text{از دو طرف tan می‌گیریم}}\tan(12^\circ+33^\circ)=\tan 45^\circ\rightarrow\frac{\tan 12^\circ+\tan 33^\circ}{1-\tan 12^\circ\tan 33^\circ}=1$

$$\Rightarrow\tan 12^\circ+\tan 33^\circ=1-\tan 12^\circ\tan 33^\circ\rightarrow\tan 12^\circ+\tan 33^\circ+\tan 12^\circ\tan 33^\circ=1$$

۴۱- گزینه‌ی «۴»

$$f(\frac{4}{3})=0\rightarrow y=a\cos(\frac{\pi(\frac{4}{3})}{b})+1=0\xrightarrow{a=-2}\cos(\frac{4\pi}{3b})=\frac{1}{2}\rightarrow\frac{4\pi}{3b}=\frac{\pi}{3}\rightarrow b=4$$

$$T=\frac{2\pi}{|\frac{\pi}{b}|}=8$$

۴۲- گزینه‌ی «۲»

می‌دانیم: $1-\cos 2a=2\sin^2 a$

لذا: $\frac{\cos 20^\circ}{\sin 20^\circ}\times 2\sin^2 20^\circ=2\sin 20^\circ\cos 20^\circ=\sin 40^\circ$

۴۳- گزینه‌ی «۲»

$$\sin^6 x+\cos^6 x=1-3\sin^2 x\cos^2 x\Rightarrow\frac{1}{4}=1-3\sin^2 x\cos^2 x\rightarrow\sin^2 x\cos^2 x=\frac{1}{4}\rightarrow|\sin x\cos x|=\frac{1}{2}$$

۴۴- گزینه‌ی «۱»

$$x=(\frac{x}{2}+\frac{y}{4})+(\frac{x}{2}-\frac{y}{4})\Rightarrow\tan x=\frac{\tan(\frac{x}{2}+\frac{y}{4})+\tan(\frac{x}{2}-\frac{y}{4})}{1-\tan(\frac{x}{2}+\frac{y}{4})\tan(\frac{x}{2}-\frac{y}{4})}\Rightarrow\tan x=\frac{-\frac{1}{4}+\frac{2}{3}}{1-(-\frac{1}{4})(\frac{2}{3})}=\frac{\frac{5}{12}}{\frac{14}{12}}=\frac{5}{14}$$

۴۵- گزینه‌ی «۴»

$$\sin x\cos\frac{\pi}{6}+\cos x\sin\frac{\pi}{6}+\sin x\cos\frac{\pi}{6}-\cos x\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow 2\sin x\cos\frac{\pi}{6}=\frac{1}{3}\Rightarrow\sqrt{3}\sin x=\frac{1}{3}\Rightarrow\sin x=\frac{1}{3\sqrt{3}}$$

$$\cos 2x=1-2\sin^2 x=1-\frac{2}{27}=\frac{25}{27}$$

۴۶- گزینه‌ی «۴»

$$\tan x+\cot x=\frac{2}{\sin 2x}=\frac{2}{\frac{1}{3}}=6$$

$$\tan^2 x+\cot^2 x=(\tan x+\cot x)^2-2\tan x\cot x=6^2-2(1)=34$$

$$\tan^3 x+\cot^3 x=(\tan x+\cot x)(\tan^2 x+\cot^2 x-\tan x\cot x)=6(34-1)=198\Rightarrow\frac{\tan^2 x+\cot^2 x}{\tan^3 x+\cot^3 x}=\frac{34}{198}=\frac{17}{99}$$

۴۷- گزینه‌ی «۴» توجه:

$$\cot x-\tan x=\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{\cos^۲ x-\sin^۲ x}{\sin x\cos x}=\frac{\cos ۲x}{\frac{۱}{۲}\sin ۲x}=۲\cot ۲x$$

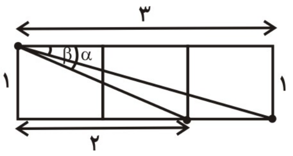
$$\underbrace{\cot x-\tan x}_{۲\cot ۲x}-۲\tan ۲x-۴\tan ۴x-۸\tan ۸x=۲(۲\cot ۴x)-۴\tan ۴x-۸\tan ۸x=۸\cot ۸x-۸\tan ۸x$$

$$=۱۶\cot ۱۶x\xrightarrow{x=\frac{\pi}{۹۶}}۱۶\times\cot\frac{\pi}{۶}=۱۶\sqrt{۳}$$

۴۸- گزینه‌ی «۱»

$$(-\sin x)(-\sin x)=\cos^۲(\pi+\frac{\pi}{۶})\Rightarrow \sin^۲ x=\frac{۳}{۴}\rightarrow \sin x=\pm\frac{\sqrt{۳}}{۲}\Rightarrow x=\frac{\pi}{۳}\,,\,\frac{۲\pi}{۳}\,,\,\frac{۴\pi}{۳}\,,\,\frac{۵\pi}{۳}$$

۴۹- گزینه‌ی «۱» با توجه به شکل زیر سینوس و کسینوس زوایای α و β را به‌دست می‌آوریم:



$$\sin\alpha=\frac{۱}{\sqrt{۵}}\qquad \cos\alpha=\frac{۲}{\sqrt{۵}}$$

$$\sin\beta=\frac{۱}{\sqrt{۱۰}}\qquad \cos\beta=\frac{۳}{\sqrt{۱۰}}$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\frac{۶}{۵\sqrt{۲}}-\frac{۱}{۵\sqrt{۲}}=\frac{۵}{۵\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

۵۰- گزینه‌ی «۳» **نکته:** معادله‌ی $a\tan x+b\cot x=c$ وقتی دارای جواب است که: $c^۲\geq ۴ab$

$$\text{لذا}:\ (k+۱)^۲\geq ۴\times۱\times۱\rightarrow |k+۱|\geq ۲\begin{cases}\rightarrow k+۱\geq ۲\rightarrow k\geq ۱\\ \rightarrow k+۱\leq -۲\rightarrow k\leq -۳\end{cases}$$

تابع

۵۱- گزینه‌ی «۲»

$$۲=۲\Rightarrow m^۲=m+۲\rightarrow m^۲-m-۲=۰\Rightarrow\begin{cases}m=-۱\\ m=۲\quad \text{غیرقابل قبول}\end{cases}$$

زیرا: $m=۲\rightarrow (۲,۳),(۲,۴)\in f$ تابع نیست. f

۵۲- گزینه‌ی «۳» اگر $f(x)$ تابع باشد باید $\log(۲-x^۲)=۰$ باشد، بنابراین:

$$\log(۲-x^۲)=۰\rightarrow \log(۲-x^۲)=\log ۱\rightarrow ۲-x^۲=۱\rightarrow x=\pm۱$$

بنابراین تابع f شامل دو زوج مرتب است. $\rightarrow f=\{(-۱\,,\,\sin(۱))\,,\,(۱\,,\,\sin(۱))\}$

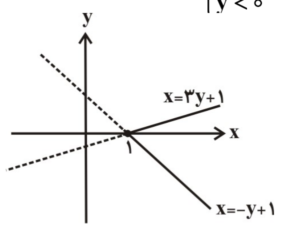
۵۳- گزینه‌ی «۳» برای رد گزینه‌های ۲ و ۴ از اتحاد مربع دو جمله‌ای کمک می‌گیریم و مثال نقض ارائه می‌کنیم:

$$x^۲+y^۲+۲y=۱\Rightarrow x^۲+y^۲+۲y+۱=۲\Rightarrow x^۲+(y+۱)^۲=۲\xrightarrow{\text{مثال نقض}}x=۰\Rightarrow y+۱=\pm\sqrt{۲}$$

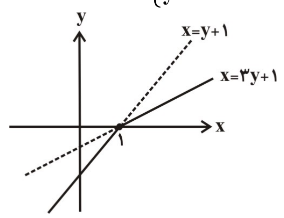
$$x^۲+y^۲+۲x=۱\Rightarrow y^۲+(x+۱)^۲=۲\xrightarrow{\text{مثال نقض}}x=-۱\Rightarrow y=\pm\sqrt{۲}$$

در مورد گزینه‌های (۱) و (۳) می‌توانیم نمودار روابط را رسم کنیم:

$$\text{«۱» گزینه‌ی}: x=y+۲|y|+۱\Rightarrow\begin{cases}y\geq ۰ & : & x=۳y+۱\\ y<۰ & : & x=-y+۱\end{cases}$$



$$\text{«۳» گزینه‌ی}: x=۲y+|y|+۱\Rightarrow\begin{cases}y\geq ۰ & : & x=۳y+۱\\ y<۰ & : & x=y+۱\end{cases}$$



۵۴- گزینه‌ی «۱»

$$[x]+۲\neq ۰\Rightarrow [x]\neq -۲\Rightarrow x\notin[-۲,-۱)$$

۵۵- گزینه‌ی «۳» با توجه به این که $f(x)$ یک تابع ثابت است، لذا $h(x)=g(x)-۱۶$ از درجه‌ی ۲ خواهد بود. از طرفی دامنه‌ی $f(x)$ عبارت است از $R-\{-۲,۲\}$، بنابراین اعداد ۲ و ۲- صفرهای تابع $h(x)=g(x)-۱۶$ هستند و داریم:

$$h(x)=g(x)-۱۶=k(x-۲)(x+۲)=k(x^۲-۴)\Rightarrow g(x)-۱۶=kx^۲-۴k\xrightarrow{g(۰)=۰}k=۴\Rightarrow g(x)=۴x^۲$$

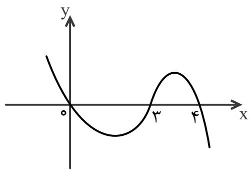
$$\Rightarrow h(x)=g(x)-۱۶=۴(x^۲-۴)$$

از طرفی $f(x)$ برابر با یک مقدار ثابت مانند c است. پس:

$$f(x)=\frac{۲x^۲+ax+b}{۴(x^۲-۴)}=c\Rightarrow ۲x^۲+ax+b=۴cx^۲-۱۶c$$

$$\Rightarrow\begin{cases}c=\frac{۱}{۲}\\ a=۰\\ b=-۱۶c=-۱۶(\frac{۱}{۲})=-۸\end{cases}\Rightarrow f(x)=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\frac{f(b)}{g(a)-۲}=\frac{f(-۸)}{g(۰)-۲}=\frac{\frac{۱}{۲}}{-۲}=-\frac{۱}{۴}$$

۵۶- گزینه‌ی «۴» برای رسم نمودار $f(x)$ باید نمودار $f(x+۱)$ را یک واحد به راست منتقل کنیم.



$$xf(x)\geq ۰\rightarrow\left.\begin{cases}x\geq ۰\ ,\ f(x)\geq ۰\rightarrow x\in[۳\ ,\ ۴]\\ x\leq ۰\rightarrow f(x)\leq ۰\rightarrow x\in\{۰\}\end{cases}\right\}\xrightarrow{\cup}D=[۳\ ,\ ۴]\cup\{۰\}$$

۵۷- گزینه‌ی «۲»

$$\begin{cases}۱-\log(x+۱)\geq ۰\rightarrow\log(x+۱)\leq ۱\rightarrow x+۱\leq ۱۰\rightarrow x\leq ۹\\ x+۱>۰\rightarrow x>-۱\end{cases}\xrightarrow{\cap}-۱<x\leq ۹$$

۵۸- گزینه‌ی «۲»

$$-۲x+۱=-۹\rightarrow x=۵$$

$$x=۵\rightarrow y=-۳f(-۹)+۴=-۳(۳)+۴=-۵$$

۵۹- گزینه‌ی «۲»

$$\begin{cases}D_f=\{۲,۳,۰,۵\}\\ D_g=\{۳,۲,۰,۱\}\end{cases}\rightarrow D_f\cap D_g=\{۰,۲,۳\}$$

$$f+۱=۰\rightarrow f=-۱\rightarrow\{۲\}\Rightarrow D_{\frac{۲g}{f+۱}}=\{۰,۳\}$$

$$\frac{۲g}{f+۱}=\{(۰,\frac{۲(-۲)}{۳+۱})(۳,\frac{۲(۴)}{۳+۱})\}=\{(۰,-۱)(۳,۲)\}$$

برد $=\{-۱,۲\}\rightarrow$ مجموع $=۱$

۶۰- گزینه‌ی «۳»

$$D_f:\begin{cases}۱)\ ۴x-x^۲\geq ۰\rightarrow x(۴-x)\geq ۰\rightarrow ۰\leq x\leq ۴\\ ۲)\ x\neq ۰\end{cases}\xrightarrow{۱,۲}۰<x\leq ۴$$

یعنی اگر x ورودی تابع f باشد، باید $۰<x\leq ۴$. حال اگر $۶-۲x$ ورودی تابع f باشد، باید:

$$۰<۶-۲x\leq ۴\rightarrow -۶<-۲x\leq -۲\rightarrow ۱\leq x<۳$$

۶۱- گزینه‌ی «۲»

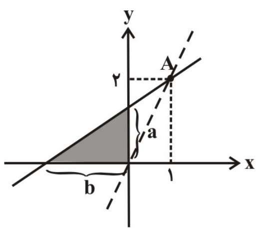
$$f([f(x)])=۲\rightarrow[f(x)]=۰\rightarrow ۰\leq f(x)<۱\rightarrow -۴\leq x<-۲\ \text{ یا }\ ۲<x\leq ۴$$

۶۲- گزینه‌ی «۱»

$$x=\sqrt{۲}\rightarrow f(۲)+۳f(۲)=۴-(\sqrt{۲})^۲\Rightarrow ۴f(۲)=۲\rightarrow f(۲)=\frac{۱}{۲}\Rightarrow f(x^۲)+۳(\frac{۱}{۲})=۴-x^۲\Rightarrow f(x^۲)=\frac{۵}{۲}-x^۲$$

$$\begin{cases}x=\sqrt{۳}\rightarrow f(۳)=\frac{۵}{۲}-۳=\frac{-۱}{۲}\\ x=\sqrt{۵}\rightarrow f(۵)=\frac{۵}{۲}-۵=\frac{-۵}{۲}\end{cases}\Rightarrow(-\frac{۱}{۲})-۳(-\frac{۵}{۲})=-\frac{۱}{۲}+\frac{۱۵}{۲}=۷$$

۶۳- گزینه‌ی «۱» با توجه به شکل، برای این که در ناحیه‌ی دوم، مثلثی ایجاد شود، باید شیب خط مثبت بوده و از ۲ کوچک‌تر باشد، در غیر این صورت، در ربع دوم مثلثی با محورهای مختصات ایجاد نمی‌شود، پس $۰<m<۲$.



برای محاسبه‌ی مساحت، ابتدا معادله خط گذرنده از $A(۱,۲)$ با شیب m را می‌نویسیم.

$$y-۲=m(x-۱)\Rightarrow y=mx+۲-m$$

برای محاسبه‌ی طول اضلاع a و b داریم:

$$x=۰\Rightarrow y=۲-m\Rightarrow a=۲-m>۰$$

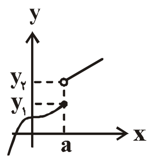
$$y=۰\Rightarrow x=\frac{m-۲}{m}<۰\Rightarrow b=\frac{۲-m}{m}>۰$$

پس مساحت مثلث برابر است با:
$$S=\frac{ab}{2}=\frac{(2-m)\times\frac{(2-m)}{m}}{2}=\frac{(m-2)^2}{2m}$$

۶۴- گزینه‌ی «۴»

$$fog(x)-gof(x)=5$$
$$(3(3-2x)+a)-(3-2(3x+a))=5$$
$$9-\cancel{6x}+a-3+\cancel{6x}+2a=5\rightarrow a=-\frac{1}{3}$$

۶۵- گزینه‌ی «۳»



نمودار تابع $f(x)$ برای یک $a>0$ دلخواه به‌صورت زیر است:

که در آن $y_1=a^3+2$ و $y_2=3a+4$. با توجه به شکل برد تابع برابر است با:

$R_f=(-\infty,a^3+2]\cup(3a+4,+\infty)$. بنابراین برای این‌که برد تابع برابر R باشد باید:

$$3a+4\le a^3+2\Rightarrow a^3-3a-2\ge 0\Rightarrow a^3-a-2a-2\ge 0$$
$$\Rightarrow a(a-1)(a+1)-2(a+1)\ge 0\Rightarrow (a+1)(a^2-a-2)\ge 0$$
$$\Rightarrow (a+1)^2(a-2)\ge 0\xrightarrow{(a+1)^2\ge 0}a\in[2,+\infty)\cup\{-1\}\Rightarrow \min\{a\}=-1$$

۶۶- گزینه‌ی «۳»

$$f(g(x))=-4x^2-8x-3\xrightarrow{x=-1}f(g(-1))=-4+8-3=1$$
$$f(x)=-x^2+2x\rightarrow f(g(-1))=-(g(-1))^2+2(g(-1))=1$$
$$\rightarrow g^2(-1)-2g(-1)+1=0\rightarrow (g(-1)-1)^2=0\rightarrow g(-1)=1$$

۶۷- گزینه‌ی «۲»

$$D_g: x\le 4\ ,\ D_f: x\ge 1$$
$$D_{fog}=\begin{cases}x\in D_g\\ g(x)\in D_f\end{cases}\Rightarrow D_{fog}=\begin{cases}x\le 4\\ \sqrt{4-x}\ge 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\le 4\\ x\le 3\end{cases}$$
$$D_{fog}=(-\infty,3]$$

۶۸- گزینه‌ی «۱»

$$f(g(x))=g^2(x)+2g(x)=x\Rightarrow g^2(x)+2g(x)-x=0\xrightarrow{g(x)=t}t^2+2t-x=0$$
$$\Rightarrow t=\frac{-2\pm\sqrt{4+4x}}{2}=-1\pm\sqrt{1+x}\Rightarrow g(x)=-1\pm\sqrt{1+x}$$

چون دامنه‌ی f برابر $(-\infty,-1]$ است، پس t و در نتیجه $g(x)$ باید کوچک تراز ۱- باشد پس $g(x)=-1-\sqrt{1+x}$ قابل قبول است.

۶۹- گزینه‌ی «۳»

با توجه به ضابطه‌ی $f(x)$ داریم $f(x)>0$ لذا:

$$f(f(x))=2$$

۷۰- گزینه‌ی «۴»

ابتدا باید تابع قدرمطلقی را برحسب ریشه‌های داخل قدرمطلق تعیین علامت کنیم تا بازه‌ای که تابع $f(x)$ در آن اکیداً نزولی است مشخص شود:

$$x\le -4\rightarrow f(x)=-2x+6+x+4+x=10$$
$$-4<x<3\rightarrow f(x)=-2x+6-x-4+x=-2x+2$$
$$x\ge 3\rightarrow f(x)=2x-6-x-4+x=2x-10$$
$$\rightarrow f(x)=\begin{cases}10 & x\le -4\\ -2x+2 & -4<x<3\\ 2x-10 & x\ge 3\end{cases}$$

با توجه به ضابطه‌ی $f(x)$ می‌توان گفت که تابع f در بازه‌ی $x\in(-4\,,3)$ با ضابطه‌ی $y=-2x+2$ اکیداً نزولی است. حال کافی است ضابطه‌ی معکوس آن را محاسبه کنیم. دقت شود که باید در این بازه، بُرد $f(x)$ محاسبه شده و به عنوان دامنه‌ی $f^{-1}(x)$ در نظر گرفته شود.

$$-2x+2=y\rightarrow -2x=y-2\rightarrow x=\frac{-1}{2}y+1\xrightarrow{\text{جای } x \text{ و } y \text{ عوض}}y=f^{-1}(x)=\frac{-1}{2}x+1$$

$$-4<x<3\xrightarrow{x-2}8>-2x>-6\xrightarrow{+2}10>-2x+2>-4\xrightarrow{\text{جای } x \text{ و } y \text{ عوض}}-4<x<10$$

بنابراین جواب وارون تابع $\frac{-1}{2}x+1$ با شرط $-4<x<10$ خواهد بود.

۷۱- گزینه‌ی «۱»

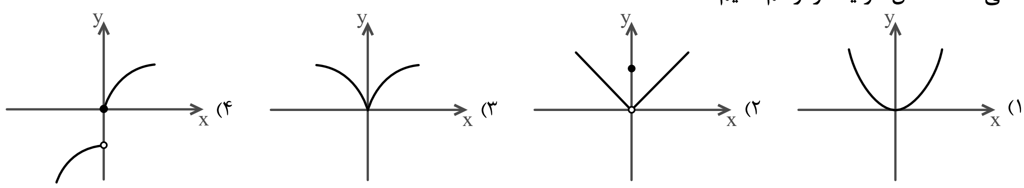
$$-\log_{۴}^{(۱-a)} = ۱+\log_{۴}^{a} \to \log_{۴}^{\frac{۱}{۱-a}} = \log_{۴}^{۴}+\log_{۴}^{a} \to \frac{۱}{۱-a}=۴a$$

$$۴a^{۲}-۴a+۱=۰ \to (۲a-۱)^{۲}=۰ \to a=\frac{۱}{۲}$$

$$a=\frac{۱}{۲} \to f=\left\{\left(\frac{۱}{۲},-\log_{۴}^{\frac{۱}{۲}}\right),(۳,۱),\left(\frac{۱}{۲},۱+\log_{۴}^{\frac{۱}{۲}}\right),(۲,۱)\right\}$$

پس به ازای $a=\frac{۱}{۲}$، f تابع است ولی یک به یک نیست و هیچ مقداری برای a به دست نمی‌آید.

۷۲- گزینه‌ی «۴» کافی است شکل هر یک را رسم کنیم.



ملاحظه می‌شود که فقط گزینه‌ی «۴» است که خطوط موازی محور x ها آن را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند.

۷۳- گزینه‌ی «۲» گزینه‌ای صحیح است که اگر جای x و y را عوض کنیم در نمودار $y=f(x)$ صدق کند. با امتحان گزینه‌ها، گزینه‌ی «۲» صحیح است.

$$\begin{array}{|l}۱\\۰\end{array} \to \begin{array}{|l}۰\\۱\end{array} \to ۱=۰+۰+۱$$

۷۴- گزینه‌ی «۱»

$$۳x-۱=y \to ۳x=y+۱ \to x=\frac{y+۱}{۳} \to g^{-۱}(x)=\frac{x+۱}{۳}$$

$$fog^{-۱}(x)=۲\left(\frac{x+۱}{۳}\right)+۱ \Rightarrow fog^{-۱}(x)=\frac{۲x}{۳}+\frac{۵}{۳}$$

۷۵- گزینه‌ی «۲»

$$g(x)=(x+۱)^{۲}$$

$$fog(۱-\sqrt{۲})+gof(۱-\sqrt{۲})=f(g(۱-\sqrt{۲}))+g(f(۱-\sqrt{۲}))=f((۱-\sqrt{۲}+۱)^{۲})+g(|\overbrace{۱-\sqrt{۲}}^{\text{منفی}}|)$$

$$=f(\underbrace{(۲-\sqrt{۲})^{۲}}_{\text{مثبت}})+g(\sqrt{۲}-۱)=|۶-۴\sqrt{۲}|+(\sqrt{۲}-۱+۱)^{۲}=۸-۴\sqrt{۲}=۴(۲-\sqrt{۲})$$

حد (تا آخر قضیه‌ی فشردگی)

۷۶- گزینه‌ی «۴»

$$\lim_{x\to۱}\frac{|f(x)-۲|}{۲f^{۲}(x)-۸}=\frac{۰}{۰} \Rightarrow \lim_{x\to۱}\frac{-(f(x)-۲)}{۲(f(x)-۲)(f(x)+۲)}=\lim_{x\to۱}\frac{-۱}{۲(f(x)+۲)}=\frac{-۱}{۲(۲+۲)}=\frac{-۱}{۸}$$

۷۷- گزینه‌ی «۱» می‌دانیم $\log_{x}^{۲}=\frac{۱}{\log_{۲}^{x}}$ پس:

$$\log_{۲}^{x}-\frac{۱}{\log_{۲}^{x}}=\frac{(\log_{۲}^{x})^{۲}-۱}{\log_{۲}^{x}}=\frac{(\log_{۲}^{x}-۱)(\log_{۲}^{x}+۱)}{\log_{۲}^{x}}$$

از طرفی:

$$\log_{۲}^{(\frac{x}{۲})^{۲}}=۲\log_{۲}^{\frac{|x|}{۲}} \xrightarrow{x>۰} ۲(\log_{۲}^{x}-\log_{۲}^{۲})=۲(\log_{۲}^{x}-۱)$$

داریم:

$$\lim_{x\to۲}\frac{\log_{۲}^{x}-\log_{x}^{۲}}{\log_{۲}^{(\frac{x}{۲})^{۲}}}=\lim_{x\to۲}\frac{(\log_{۲}^{x}-۱)(\log_{۲}^{x}+۱)}{۲(\log_{۲}^{x}-۱)\times\log_{۲}^{x}}=\lim_{x\to۲}\frac{\log_{۲}^{x}+۱}{۲\log_{۲}^{x}}=\frac{۱+۱}{۲\times۱}=۱$$

۷۸- گزینه‌ی «۴»

$$\lim_{x\to۱۵^{+}}f(x)=۳+(-۶)=-۳$$

$$\lim_{x\to۱۵^{-}}f(x)=۲+(-۵)=-۳$$

$$\Rightarrow(-۳)+(-۳)=-۶$$

۷۹- گزینه‌ی «۳»

$$۰ < x < \frac{۱}{۲۰} \to \frac{۱}{x} > ۲۰ \to \lim_{x\to(\frac{۱}{۲۰})^-} [۲۰^+] = ۲۰$$

۸۰- گزینه‌ی «۴»

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to(\frac{۱}{۲})^+} ax\left[\frac{۱}{x}\right] = \lim\limits_{x\to(\frac{۱}{۲})^+} a\left(\frac{۱}{۲}\right)\left[\frac{۱}{\left(\frac{۱}{۲}\right)^+}\right] = \frac{a}{۲}[۲^-] = \frac{a}{۲} \\ \lim\limits_{x\to(\frac{۱}{۲})^-} \cos\frac{\pi x}{۲} = \cos\frac{\pi}{۴} = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{a}{۲} = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow a = \sqrt{۲}$$

۸۱- گزینه‌ی «۴» با توجه به روابط مثلثاتی داریم:

$$f(x) = \cos^۲ x - \sin^۲ x = \cos ۲x$$

$$g(x) = \sin x \cos x = \frac{۱}{۲}\sin ۲x$$

با توجه به روابط بالا می‌توان نوشت:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۶}} f(x) = \cos\frac{۲\pi}{۶} = \frac{۱}{۲}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۶}} g(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{۶}} \frac{۱}{۲}\sin ۲x = \frac{\sqrt{۳}}{۴}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۶}} \frac{\sqrt{۳}f(x)\times g(x)}{f^۲(x)+۲} = \frac{\sqrt{۳}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{\sqrt{۳}}{۴}}{\frac{۱}{۴}+۲} = \frac{\frac{۳}{۸}}{\frac{۹}{۴}} = \frac{۱}{۶}$$

۸۲- گزینه‌ی «۴» با توجه به قضیه‌ی فشردگی داریم:

$$\lim_{x\to۲} ۶x+۴ = ۱۶ \quad و \quad \lim_{x\to۲} ۴x^۲ = ۱۶$$

$$\lim_{x\to۲} \frac{f(x)-۲}{x} = ۱۶ \to \frac{\lim\limits_{x\to۲} f(x)-۲}{\lim\limits_{x\to۲} x} = ۱۶$$

$$\lim_{x\to۲} f(x) = L \quad و \quad \frac{\lim\limits_{x\to۲} f(x)-۲}{۲} = ۱۶ \to \frac{L-۲}{۲} = ۱۶ \Rightarrow L-۲ = ۳۲ \Rightarrow L = ۳۴$$

۸۳- گزینه‌ی «۱» برای اینکه یک تابع در یک نقطه حدی برابر ۴ داشته باشد باید حد چپ و حد راست آن تابع در آن نقطه برابر ۴ باشد.

$$\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to۱^+} f(x) = \lim\limits_{x\to۱^+} bx^۳+ax+۲ = b+a+۲ = ۴ \\ \lim\limits_{x\to۱^-} f(x) = \lim\limits_{x\to۱^-} \frac{bx+۳}{ax} = \frac{b+۳}{a} = ۴ \end{array} \Rightarrow \begin{cases} a+b = ۲ \\ ۴a-b = ۳ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = ۱ \\ b = ۱ \end{cases} \Rightarrow a-b = ۰$$

۸۴- گزینه‌ی «۴»

$$\lim_{x\to۰} f(x) = \lim_{x\to۲} f(x-۲) = \lim_{x\to۲} \frac{x+۵}{x} = \frac{۷}{۲}$$

۸۵- گزینه‌ی «۳» دقت کنید که در میل کردن $x \to x_۰$، x عدد صحیح نخواهد بود، چه $x_۰$ عددی صحیح باشد چه غیرصحیح، پس:

$$\lim_{x\to۰^+} f(x) = -۱ \qquad (x \in R-Z)$$

$$\lim_{x\to\frac{۱}{۲}^-} f(x) = -۱ \qquad (x \in R-Z)$$

پس مجموع آن‌ها ۲- خواهد بود.

۸۶- گزینه‌ی «۲»

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to(-۱)^+} f(x) = ۳ \\ \lim\limits_{x\to(-۱)^-} f(x) = ۱ \end{array}\right\} \to \lim_{x\to(-۱)^+} f(x) - \lim_{x\to(-۱)^-} f(x) = ۳-۱ = ۲$$

۸۷- گزینه‌ی «۴»

چون

$$۰ \le \left|\frac{۱}{۲}f(x)-۲\right|$$

پس با توجه به قضیه‌ی فشردگی داریم:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۶}} ۰ \le \lim_{x\to\frac{\pi}{۶}}\left|\frac{۱}{۲}f(x)-۲\right| \le \lim_{x\to\frac{\pi}{۶}}\left(\sin x-\frac{۱}{۲}\right)=۰$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۶}}\left|\frac{۱}{۲}f(x)-۲\right|=۰ \to \lim_{x\to\frac{\pi}{۶}}\left(\frac{۱}{۲}f(x)-۲\right)=۰$$

$$\frac{۱}{۲}\lim_{x\to\frac{\pi}{۶}}f(x)-۲=۰ \to \lim_{x\to\frac{\pi}{۶}}f(x)=۴$$

۸۸- گزینه‌ی «۴»

طبق فرض:

$$\lim_{x\to ۱^-}f(x)=\frac{۱}{۶}+\lim_{x\to ۱^+}f(x) \Rightarrow \frac{۱}{a}=\frac{۱}{۶}+\frac{۱}{a+۱} \Rightarrow \frac{۱}{a}-\frac{۱}{a+۱}=\frac{۱}{۶}$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{a(a+۱)}=\frac{۱}{۶} \Rightarrow a(a+۱)=۶ \Rightarrow a^۲+a-۶=۰ \Rightarrow (a+۳)(a-۲)=۰ \Rightarrow \begin{cases} a=-۳ \\ a=۲ \end{cases}$$

بنابراین مقدار کمتر a، برابر است با (۳-).

۸۹- گزینه‌ی «۲»

با توجه به این که مخرج کسر وقتی $x\to ۲$، به صفر میل می‌کند، باید صورت کسر هم دارای حد صفر باشد در غیر این صورت L متناهی نمی‌شود:

$$۲^۲+۲^{a-۲}-۶=۰ \Rightarrow ۲^{a-۲}=۲ \Rightarrow a-۲=۱ \Rightarrow a=۳$$

به ازای $a=۳$ خواهیم داشت:

$$L=\lim_{x\to ۲}\frac{۲^x+۲^۳\times ۲^{-x}-۶}{۲^۲\times ۲^{-x}+۲^x-۵}=\lim_{x\to ۲}\frac{۲^x+\frac{۸}{۲^x}-۶}{\frac{۴}{۲^x}+۲^x-۵}=\lim_{x\to ۲}\frac{(۲^x)^۲-۶(۲^x)+۸}{(۲^x)^۲-۵(۲^x)+۴}$$

به کمک تغییر متغیر $t=۲^x$، حاصل حد را به صورت ساده‌تر می‌نویسیم:

$$L=\lim_{t\to ۴}\frac{t^۲-۶t+۸}{t^۲-۵t+۴}=\lim_{t\to ۴}\frac{(t-۴)(t-۲)}{(t-۴)(t-۱)}=\frac{۴-۲}{۴-۱}=\frac{۲}{۳}$$

۹۰- گزینه‌ی «۴»

تابع f در نقاطی حد دارد که $\sqrt{۱-x}=x+۵$ باشد. بنابراین:

$$۱-x=x^۲+۱۰x+۲۵ \Rightarrow x^۲+۱۱x+۲۴=۰ \Rightarrow (x+۳)(x+۸)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=-۳ \\ x=-۸ \end{cases}$$

چون به ازای $x=-۸$ عبارت $x+۵$ منفی می‌شود، پس غیرقابل قبول است پس $a=-۳$ است.

$$\lim_{x\to(-۳)^+}g(x)=\frac{۱}{-۳}=-\frac{۱}{۳}$$

۹۱- گزینه‌ی «۱»

$$x\to ۰^+ \Rightarrow f(x-۲)=f(-۲^+)=۰^-$$

$$x\to ۰^- \Rightarrow f(x)=f(۰^-)=[(-۲)^+]=-۲$$

۹۲- گزینه‌ی «۳»

$$\lim_{x\to ۲^+}\frac{\sqrt{x^۲-۴}}{\sqrt{x}-\sqrt{۲}+\sqrt{x-۲}}=\lim_{x\to ۲^+}\frac{\sqrt{x-۲}\sqrt{x+۲}}{\sqrt{x-۲}\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{۲}}{\sqrt{x-۲}}+۱\right)}=\lim_{x\to ۲^+}\frac{\sqrt{x+۲}}{\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{۲}}{\sqrt{x-۲}}\times\frac{\sqrt{x}+\sqrt{۲}}{\sqrt{x}+\sqrt{۲}}+۱\right)}$$

$$\lim_{x\to ۲^+}\frac{\sqrt{۴}}{\left(\frac{x-۲}{\sqrt{x-۲}}\times\frac{۱}{۲\sqrt{۲}}+۱\right)}=\lim_{x\to ۲^+}\frac{۲}{\left(\sqrt{x-۲}\times\frac{۱}{۲\sqrt{۲}}+۱\right)}=\frac{۲}{۰+۱}=۲$$

۹۳- گزینه‌ی «۲»

$$\lim_{x\to ۰}\frac{۱-\cos x}{x\sin\frac{x}{۲}}=\lim_{x\to ۰}\frac{۲\sin^۲\frac{x}{۲}}{x\sin\frac{x}{۲}}=\lim_{x\to ۰}\frac{۲\sin\frac{x}{۲}\sin\frac{x}{۲}}{x\sin\frac{x}{۲}}=\lim_{x\to ۰}\frac{۲\sin\frac{x}{۲}}{x}\Rightarrow\lim_{x\to ۰}\frac{\sin\frac{x}{۲}}{\frac{x}{۲}}=۱$$

۹۴- گزینه‌ی «۲»

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}\left[\frac{۱}{\sin ۳x}\right]=\left[\frac{۱}{(-۱)^+}\right]=[(-۱)^-]=-۲$$

۹۵- گزینه‌ی «۲»

$$\lim_{x\to ۲^+}\frac{(-۱)^{[x]}.\left(\frac{۲}{x}-۱\right)}{x-[x]}=\lim_{x\to ۲^+}\frac{(-۱)^{[۲^+]}.\left(\frac{۲}{x}-۱\right)}{x-[۲^+]}=\lim_{x\to ۲^+}\frac{\frac{۲}{x}-۱}{x-۲}=\frac{۰}{۰}\to\lim_{x\to ۲^+}\frac{\frac{۲-x}{x}}{x-۲}=\lim_{x\to ۲^+}\frac{-۱}{x}=\frac{-۱}{۲}$$

۹۶- گزینهٔ «۱»

$$\lim_{x\to ۲^-}(x+۲)\left[\frac{۱}{x+۲}\right]=۴\times ۰=۰$$

۹۷- گزینهٔ «۳»

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\sin kx}{\tan ۲x.\cos kx}=\frac{۰}{۰}$$

با استفاده از هم‌ارزی توابع مثلثاتی داریم:

$$\sin kx \to kx$$

$$\tan ۲x \to ۲x$$

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\sin kx}{\tan ۲x.\cos kx}=\lim_{x\to ۰}\frac{kx}{۲x\times ۱}=\frac{k}{۲}=۳\Rightarrow k=۶$$

۹۸- گزینهٔ «۳»

x		۰		۱	
$x^۲-x$	$+$	۰	$-$	۰	$+$

x		-۱		۱	
$۱-x^۲$	$-$	۰	$+$	۰	$-$

با توجه به جدول تعیین علامت $x^۲-x$، اگر $x\to ۱^-$، آنگاه $(x^۲-x)\to ۰^-$.

با توجه به جدول تعیین علامت $۱-x^۲$، اگر $x\to ۱^+$، آنگاه $(۱-x^۲)\to ۰^-$.

بنابراین:

$$\lim_{x\to ۱^-}f(x^۲-x)+\lim_{x\to ۱^+}f(۱-x^۲)=\lim_{x\to ۰^-}f(x)+\lim_{x\to ۰^-}f(x)=k_۲+k_۲=۲k_۲$$

۹۹- گزینهٔ «۱»

$$\lim_{x\to(\frac{۳\pi}{۴})^-}\frac{۱+\tan x}{۱+\cot x}=\lim_{x\to(\frac{۳\pi}{۴}^-)}\frac{۱+\frac{\sin x}{\cos x}}{۱+\frac{\cos x}{\sin x}}=\lim_{x\to(\frac{۳\pi}{۴}^-)}\frac{\frac{\cos x+\sin x}{\cos x}}{\frac{\sin x+\cos x}{\sin x}}=\lim_{x\to(\frac{۳\pi}{۴}^-)}\frac{\sin x}{\cos x}=\lim_{x\to(\frac{۳\pi}{۴}^-)}\tan x=-۱$$

۱۰۰- گزینهٔ «۴»

$$x\to ۰^+\to |x|=x\ ,\ [x]=۰$$

$$x\to ۰^-\to |x|=-x\ ,\ [x]=-۱$$

$$\text{حد راست}=\lim_{x\to ۰^+}f(x)=\lim_{x\to ۰^+}\frac{x^۳+۲x}{x}=۲ \quad \text{و} \quad \text{حد چپ}=\lim_{x\to ۰^-}f(x)=\lim_{x\to ۰^-}\frac{x^۳-۲x}{x-۱}=۰$$

$$\text{حد راست}+\text{حد چپ}=۲+۰=۲$$

حد (بخش‌پذیری تا آخر تعمیم حد) و پیوستگی

۱۰۱- گزینهٔ «۴»

نکته:

$$\lim_{u\to ۰}u^m+u^n\sim u^n\ ,\ m>n$$

$$\lim_{x\to ۳^+}\frac{\sqrt{x^۲-۹}}{\sqrt{۴x-۱۲}}=\lim_{x\to ۳^+}\frac{\sqrt{(x-۳)(x+۳)}}{\sqrt{۴(x-۳)}}=\lim_{x\to ۳^+}\frac{\sqrt{x+۳}}{\sqrt{۴}}=\frac{\sqrt{۶}}{۲}$$

۱۰۲- گزینهٔ «۴»

$$\lim_{x\to ۱۰}\frac{۵-\sqrt{۳x-۵}}{\sqrt{۱۰}-\sqrt{x}}=\frac{۰}{۰}\xrightarrow{H}\lim_{x\to ۱۰}\frac{-\frac{۳}{۲\sqrt{۳x-۵}}}{-\frac{۱}{۲\sqrt{x}}}=\frac{-\frac{۳}{۱۰}}{-\frac{۱}{۲\sqrt{۱۰}}}=\frac{۳\sqrt{۱۰}}{۵}$$

۱۰۳- گزینهٔ «۱»

$$\lim_{x\to ۱}\frac{\sqrt[۸]{x}-۱}{x\sqrt[۳]{x}-۱}=\frac{۰}{۰}\overset{H}{\Longrightarrow}\lim_{x\to ۱}\frac{\frac{۱}{۸\sqrt[۸]{x^۷}}}{۱\times\sqrt[۳]{x}+\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^۲}}x}=\frac{\frac{۱}{۸}}{۱+\frac{۱}{۳}}=\frac{\frac{۱}{۸}}{\frac{۴}{۳}}=\frac{۳}{۳۲}$$

۱۰۴-گزینه‌ی «۳» از هم‌ارزی $\cos^m u \underset{u\to 0}{\simeq} 1-\frac{mu^2}{2}$ استفاده می‌کنیم.

از طرفی داریم:
$$f(x)=[3x]+[-3x]=\begin{cases}0 & 3x\in Z\\ -1 & 3x\notin Z\end{cases}$$

بنابراین:
$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^5 x^2}{1-\sqrt{1+x^4}}([3x]+[-3x])=\lim_{x\to 0}(-1)\frac{1-\left(1-\frac{5x^4}{2}\right)}{1-\sqrt{1+x^4}}\times\frac{1+\sqrt{1+x^4}}{1+\sqrt{1+x^4}}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{5x^4}{2}(2)}{1-(1+x^4)}=\lim_{x\to 0}\frac{-5x^4}{-x^4}=5$$

۱۰۵-گزینه‌ی «۳» هر دو تابع f و g در $x=0$ ناپیوسته‌اند، پس برای عملیات بر روی آنها نمی‌توانیم نظر قطعی بدهیم، هر کدام را تشکیل می‌دهیم و در مورد پیوستگی آن در $x=0$ نظر می‌دهیم:

گزینه‌ی (۱) : $(f+g)(x)=\begin{cases}-2x-\frac{1}{2} & , \ x<0\\ 2x+1 & , \ x\geq 0\end{cases}$

حد چپ و راست نابرابر و تابع $f+g$ در $x=0$ ناپیوسته است.

گزینه‌ی (۲) : $fof(x)=f(f(x))=\begin{cases}\frac{-1}{2} & , \ f(x)<0\\ 2f(x) & , \ f(x)\geq 0\end{cases}=\begin{cases}\frac{-1}{2} & , \ x<0\\ 2(2x)=4x & , \ x\geq 0\end{cases}$

این تابع در $x=0$ ناپیوسته است.

گزینه‌ی (۳) : $gof(x)=g(f(x))=\begin{cases}-2f(x) & , \ f(x)<0\\ 1 & , \ f(x)\geq 0\end{cases}=\begin{cases}-2\left(\frac{-1}{2}\right)=1 & , \ x<0\\ 1 & , \ x\geq 0\end{cases}$

این تابع در $x=0$ پیوسته است.

گزینه‌ی (۴) : $fog(x)=f(g(x))=\begin{cases}\frac{-1}{2} & , \ g(x)<0\\ 2g(x) & , \ g(x)\geq 0\end{cases}$

ضابطه‌ی بالا تشکیل نمی‌شود، زیرا $g(x)$ همواره بزرگتر یا مساوی صفر است و در نتیجه داریم:
$$f(g(x))=\begin{cases}2(-2x)=-4x & , \ x<0\\ f(1)=2 & , \ x\geq 0\end{cases}$$

پس تابع در $x=0$ ناپیوسته است.

۱۰۶-گزینه‌ی «۲»
$$\lim_{x\to -5}\frac{ax+5a}{1-\sqrt{3x+16}}=6 \xrightarrow{H} \lim_{x\to -5}\frac{a}{\frac{-3}{2\sqrt{3x+16}}}=6\Rightarrow \frac{a}{-\frac{3}{2}}=6\to 2a=-18\to a=-9$$

۱۰۷-گزینه‌ی «۱»
$$\lim_{x\to 1^+}\frac{\tan 3\pi x}{x^2-1}=\frac{0}{0}\xrightarrow{H}\lim_{x\to 1^+}\frac{3\pi(1+\tan^2 3\pi x)}{2x}=\frac{3\pi(1+0)}{2}=\frac{3\pi}{2}$$

۱۰۸-گزینه‌ی «۳»
$$\left(\frac{1}{2x+1}-\frac{1}{3x+2}\right)=\frac{3x+2-2x-1}{(3x+2)(2x+1)}=\frac{x+1}{(3x+2)(2x+1)}$$
$$\lim_{x\to -1}\frac{1}{x+1}\times\frac{(x+1)}{(3x+2)(2x+1)}=\lim_{x\to -1}\frac{1}{(3x+2)(2x+1)}=\frac{1}{(-1)\times(-1)}=1$$

۱۰۹-گزینه‌ی «۱» طبق قضیه‌ی فشردگی:
$$\lim_{x\to\frac{1}{2}}f(x)=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{\cos\pi x}{4x^2-1}=\lim_{x\to\frac{1}{2}}g(x)$$

لذا:
$$\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{\cos\pi x}{4x^2-1}=\frac{0}{0}\xrightarrow{H}\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{-\pi\sin\pi x}{8x}=\frac{-\pi\times 1}{4}=-\frac{\pi}{4}$$
