دنباله‌ی حسابی و هندسی

۱- گزینه‌ی «۱» اگر $\frac{۱}{۳}$ اضلاع را به هم وصل نماییم مساحت‌ها به نسبت $\frac{۱}{۳}$ کاهش می‌یابند پس $q=\frac{۱}{۳}$ خواهد بود.

$$S_۱=a^۲\frac{\sqrt{۳}}{۴}=\frac{۳۶\sqrt{۳}}{۴}$$

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{a_۱}{۱-q}=\frac{\frac{۳۶\sqrt{۳}}{۴}}{۱-\frac{۱}{۳}}=\frac{\frac{۳۶\sqrt{۳}}{۴}}{\frac{۲}{۳}}=\frac{۲۷\sqrt{۳}}{۲}$$

۲- گزینه‌ی «۲» اگر $a_۴$ و $a_۷$ جواب‌های معادله باشد، آنگاه:

$$a_۴+a_۷=\frac{-(-۳)}{۱}=۳\Rightarrow a_۱q^۳+a_۱q^۶=۳\Rightarrow a_۱q^۳(۱+q^۳)=۳\qquad(۱)$$

$$\frac{S_۶}{S_۳}=\frac{\frac{a_۱(۱-q^۶)}{۱-q}}{\frac{a_۱(۱-q^۳)}{۱-q}}=\frac{۱-q^۶}{۱-q^۳}=\frac{(۱-q^۳)(۱+q^۳)}{۱-q^۳}=۱+q^۳=\sqrt{۲}\qquad(۲)$$

$$(۱)\,,\,(۲)\Rightarrow a_۱q^۳(\sqrt{۲})=۳\Rightarrow a_۱q^۳=\frac{۳}{\sqrt{۲}}$$

$$a_۲.a_۶=a_۱^۲q^۶=(a_۱q^۳)^۲=(\frac{۳}{\sqrt{۲}})^۲=\frac{۹}{۲}=۴/۵$$

۳- گزینه‌ی «۴»

$$S_۵=\frac{۱}{۳}(S_{۱۰}-S_۵)+۱۰\to ۳S_۵=S_{۱۰}-S_۵+۳۰\to ۴S_۵=S_{۱۰}+۳۰\to ۴\left(\frac{۵}{۲}(۲a_۱+۴d)\right)=\frac{۱۰}{۲}(۲a_۱+۹d)+۳۰$$

$$۴a_۱+۸d=۲a_۱+۹d+۶\to ۲a_۱-d=۶$$

$$۴a_۱^۲-d^۲=۳۰\to \underbrace{(۲a_۱-d)}_{۶}(۲a_۱+d)=۳۰\to ۲a_۱+d=۵$$

$$\left.\begin{matrix}۲a_۱-d=۶\\ ۲a_۱+d=۵\end{matrix}\right\}\to a_۱=۲/۷۵$$

۴- گزینه‌ی «۲»

$$a_۱=۵۶\ ,\ d=-۳\ \to\ a_n=a_۱+(n-۱)d=۵۶+(n-۱)(-۳)$$

$\to a_n=۵۹-۳n>۰\to ۳n<۵۹\to n<۱۹/۶\to n\in\{۱,۲,...,۱۹\}$ ۱۹ جمله‌ی مثبت دارد.

۵- گزینه‌ی «۲»

$$a_۱=۳\ ,\ d_۱=۲\to a_n=۳+(n-۱)۲\to ۳,۵,۷,۹,...,۴۱$$

$$b_۱=۲\ ,\ d_۲=۳\to b_n=۲+(n-۱)۳\to ۲,۵,۸,۱۱,...,۵۹$$

جمله‌ی اول مشترک ۵ و جمله‌ی دوم مشترک ۱۱ است، پس قدر نسبت دنباله‌ی مشترک ۶ است. لذا جملات به صورت زیر خواهند بود.

۵,۱۱,۱۷,۲۳,۲۹,۳۵,۴۱

پس ۷ جمله‌ی مشترک داریم.

۶- گزینه‌ی «۱»

$$S_n=\frac{n}{۲}(۲a_۱+(n-۱)d)=\frac{۱۳}{۲}(۲a_۱+۱۲d)=۱۳(a_۱+۶d)=۱۳\times a_۷=۱۳\times ۵=۶۵$$

۷- گزینه‌ی «۴»

$$S_n=\frac{n}{۲}(۲a_۱+(n-۱)d)\qquad S_{۱۰}=\frac{۱۰}{۲}(۲a_۱+(۱۰-۱)d)\to S_{۱۰}=۵(۲a+۹d)$$

$$S'_{۱۰}=\frac{۱۰}{۲}(۲(a+۱)+(۱۰-۱)(d+۱))=۵(۲a+۲+۹d+۹)=۵(۲a+۹d+۱۱)=۵(۲a+۹d)+۵۵$$

۵۵ واحد به مجموع ۱۰ جمله‌ی اول اضافه می‌شود.

۸- گزینه‌ی «۳» این اعداد عبارتند از: جملات دنباله‌ی حسابی با جمله‌ی اول۲۰۴، قدر نسبت ۶ و جمله‌ی آخر ۲۹۴

$$\text{تعداد جملات}=\frac{\text{جمله‌ی آخر}-\text{جمله‌ی اول}}{\text{قدر نسبت}}+۱\to \text{تعداد جملات}=\frac{۲۹۴-۲۰۴}{۶}+۱=۱۶$$

$$S_n=\frac{n}{۲}(a_۱+a_n)=\frac{۱۶}{۲}(۲۰۴+۲۹۴)=۳۹۸۴$$

۹- گزینه‌ی «۳»

$$۱+۵+۹+...+x=۲۳۱$$

$$S_n=\frac{n}{۲}[۲a_۱+(n-۱)d]\Rightarrow ۲۳۱=\frac{n}{۲}(۲(۱)+(n-۱)۴)\to ۲n^۲-n-۲۳۱=۰\to n=۱۱$$

حال جمله‌ی یازدهم یعنی x را تعیین می‌کنیم.

$$x=a_{۱۱}=۱+۱۰d=۱+۱۰(۴)=۴۱$$

۱۰- گزینه‌ی «۱»

جملات دنباله : $a_1, a_1q, a_1q^2, \dots \Rightarrow$ حد مجموع $= \dfrac{a_1}{1-q}$

مربعات جملات دنباله : $a_1^2, a_1^2q^2, a_1^2q^4, \dots \Rightarrow$ حد مجموع مربعات $= \dfrac{a_1^2}{1-q^2}$

$$\frac{a_1}{1-q} = \frac{a_1^2}{1-q^2} \Rightarrow \frac{a_1}{1-q} = \frac{a_1(a_1)}{(1-q)(1+q)} \Rightarrow 1 = \frac{a_1}{1+q} \Rightarrow 1+q = a_1$$

از طرفی باید $|q|<1$ باشد، در نتیجه:

$$|q|<1 \Rightarrow -1<q<1 \Rightarrow 0<q+1<2 \Rightarrow 0<a_1<2$$

۱۱- گزینه‌ی «۱»

روش اول:

دنباله‌ی هندسی — دنباله‌ی حسابی

$$\begin{cases} a_1 = t_3 \\ a_2 = t_5 \\ a_3 = t_{10} \end{cases} \text{در دنباله‌ی هندسی} \to (a_2)^2 = a_1 \times a_3 \to t_5^2 = t_3 \times t_{10}$$

$$\to (t_1+4d)^2 = (t_1+2d)(t_1+9d) \to t_1^2 + 16d^2 + 8t_1d = t_1^2 + 9t_1d + 2t_1d + 18d^2 \to 3t_1d = -2d^2$$

$$\to t_1 = -\frac{2}{3}d \ , \ d \neq 0$$

در دنباله‌ی هندسی داریم : $\dfrac{a_2}{a_1} = q \to q = \dfrac{t_5}{t_3} = \dfrac{t_1+4d}{t_1+2d} = \dfrac{-\frac{2}{3}d+4d}{-\frac{2}{3}d+2d} = \dfrac{\frac{10}{3}d}{\frac{4}{3}d} = \dfrac{10}{4} = \dfrac{5}{2}$

روش دوم: اگر a_m ،a_p و a_n $(n<p<m)$ سه جمله از یک دنباله‌ی عددی باشند و بخواهیم به‌ترتیب سه جمله‌ی متوالی از یک دنباله‌ی هندسی شوند آنگاه قدر نسبت دنباله‌ی هندسی از رابطه‌ی $q = \dfrac{m-p}{p-n}$ به دست می‌آید. $a_3, a_5, a_{10} \to q = \dfrac{10-5}{5-3} = 2/5$

۱۲- گزینه‌ی «۲»

$$a_3 = 12 \quad , \quad a_6 = 4a_4 \to a_1 = ?$$

$$\frac{a_6}{a_4} = 4 \to \frac{a_1q^5}{a_1q^3} = 4 \to q^2 = 4$$

$$a_3 = 12 \to a_1q^2 = 12 \to a_1 \times 4 = 12 \to a_1 = 3$$

۱۳- گزینه‌ی «۱»

$$a_1 \times a_2 \times \dots \times a_7 = 32 \to a_2 \times a_6 = ?$$

$$a_1 \times a_1q \times a_1q^2 \times \dots \times a_1q^6 = a_1^7 \times q^{1+2+3+\dots+6} = a_1^7 \times q^{21} = 32 \to (a_1q^3)^7 = 2^5 \to a_1q^3 = \sqrt[7]{2^5}$$

$$a_2 \times a_6 = a_1q \times a_1q^5 = a_1^2q^6 = (a_1q^3)^2 = \sqrt[7]{2^{10}} = 2\sqrt[7]{2^3} = 2\sqrt[7]{8}$$

۱۴- گزینه‌ی «۱»

$$4, \dots, \frac{27}{2} \to q^{n+1} = \frac{b}{a} \to q^{5+1} = \frac{\frac{27}{2}}{4} \to q^6 = \frac{27}{8} \to (q^2)^3 = \frac{3^3}{2^3} \to q^2 = \frac{3}{2}$$

$$a_3 = a_1q^2 = 4 \times \frac{3}{2} = 6$$

۱۵- گزینه‌ی «۱»

$$A = (1 + x^3 + x^6 + x^9 + x^{12} + x^{15}) \to x = \sqrt[3]{2}$$

مشاهده می‌شود که A مجموع ۶ جمله‌ی اول یک دنباله‌ی هندسی با جمله‌ی اول (۱) و قدر نسبت $q = x^3$ است. $q = x^3 = \sqrt[3]{2^3} = 2$

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} \Rightarrow S_6 = \frac{1(1-q^6)}{1-q} = \frac{1(1-2^6)}{1-2} = 63$$

۱۶- گزینه‌ی «۲»

$$\frac{S_{10}}{S_5} = 33 \to \frac{a_5}{a_1} = ? \text{ و } S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$$

$$\frac{S_{10}}{S_5} = \frac{a_1\frac{(1-q^{10})}{1-q}}{a_1\frac{(1-q^5)}{1-q}} = \frac{1-q^{10}}{1-q^5} = \frac{(1-q^5)(1+q^5)}{1-q^5} = 1+q^5 = 33 \to q^5 = 32 \to q = 2$$

$$\frac{a_5}{a_1} = \frac{a_1q^4}{a_1} = q^4 = (2)^4 = 16$$

۱۷- گزینه‌ی «۱»

$$S_3=26(a_4+a_5+\dots)$$

$$\frac{a_1(1-q^3)}{1-q}=26\left(\frac{a_4}{1-q}\right)\to a_1(1-q^3)=26a_1q^3\to 1-q^3=26q^3\to 27q^3=1\to q=\frac{1}{3}$$

۱۸- گزینه‌ی «۲»

$$\frac{(a_1+a_2+\dots+a_9)+(a_{16}+a_{17}+\dots+a_{24})}{a_{10}+a_{11}+\dots+a_{15}}=\frac{\frac{9}{2}(a_1+a_9)+\frac{9}{2}(a_{16}+a_{24})}{\frac{6}{2}(a_{10}+a_{15})}$$

$$=\frac{\frac{9}{2}(2a_1+8d)+\frac{9}{2}(2a_1+38d)}{\frac{6}{2}(2a_1+23d)}=\frac{9(2a_1+23d)}{3(2a_1+23d)}=3$$

۱۹- گزینه‌ی «۱»

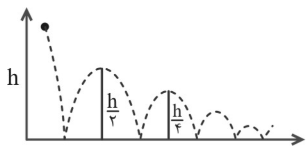
$$S=(12-\frac{1}{2})+(8+\frac{1}{4})+(\frac{16}{3}-\frac{1}{8})+\dots$$

$$\xrightarrow{\text{حد مجموع}} S=(12+8+\frac{16}{3}+\dots)+(-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\dots)=(\frac{a_1}{1-q})+(\frac{b_1}{1-q'})$$

$$a_1=12,\ q=\frac{2}{3}\qquad b_1=\frac{-1}{2},\ q'=-\frac{1}{2}$$

$$S=(\frac{12}{1-\frac{2}{3}})+(\frac{-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}})=\frac{12}{\frac{1}{3}}+\frac{-\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}=36-\frac{1}{3}=\frac{107}{3}$$

۲۰- گزینه‌ی «۳»



$$S=h+2\left(\frac{h}{2}\right)+2\left(\frac{h}{4}\right)+2\left(\frac{h}{8}\right)+\dots$$

$$S=h+h+\frac{h}{2}+\frac{h}{4}+\dots=h+\frac{h}{1-\frac{1}{2}}=3h$$

توابع خاص و نامعادله و توابع زوج و فرد

۲۱- گزینه‌ی «۱»

گزینه‌ی اول $\to f(1)=1$ ، $f(-1)=1\to f(-1)=f(1)$ زوج

گزینه‌ی دوم $\to$ دامنه نامتقارن است $\to$ نه زوج و نه فرد

گزینه‌ی سوم $\to f(1)=3$ ، $f(-1)=1\to f(1)\neq f(-1)\to$ نه زوج و نه فرد

گزینه‌ی چهارم $\to f(2)=-2$ ، $f(-2)=6\to f(2)\neq f(-2)\to$ نه زوج و نه فرد

۲۲- گزینه‌ی «۳»

$$f(x)+2f(-x)=x^7-x^3+x-5 \qquad (1)$$

$$\xrightarrow{x\to -x} f(-x)+2f(x)=-x^7+x^3-x-5 \qquad (2)$$

$$\xrightarrow{\text{حل دستگاه (۱) و (۲)}} -3f(x)=3x^7-3x^3+3x+5\Rightarrow f(x)=-x^7+x^3-x-\frac{5}{3}$$

$$x^2-2=0\Rightarrow x^2=2$$

$$f(x)=-(x^2)^3x+(x^2)x-x-\frac{5}{3}\xrightarrow{x^2=2}R(x)=-8x+2x-x-\frac{5}{3}\Rightarrow R(x)=-7x-\frac{5}{3}=ax+b\Rightarrow (a,b)=(-7,-\frac{5}{3})$$

۲۳- گزینه‌ی «۴»

شرط فرد بودن : $f(-x)=-f(x)$

$$f(-x)=\begin{cases}\dfrac{-2x}{x^2-4x-3} & -x>0\\ \dfrac{-ax}{x^2-bx+c} & -x<0\end{cases}\Rightarrow f(-x)=\begin{cases}\dfrac{-ax}{x^2-bx+c} & x>0\\ \dfrac{-2x}{x^2-4x-3} & x<0\end{cases}\Rightarrow -f(-x)=\begin{cases}\dfrac{ax}{x^2-bx+c} & x>0\\ \dfrac{2x}{x^2-4x-3} & x<0\end{cases}$$

$$f(x)=-f(-x)=\begin{cases}\dfrac{ax}{x^2-bx+c}=\dfrac{2x}{x^2+4x-3} & x>0\\ \dfrac{2x}{x^2-4x-3}=\dfrac{ax}{x^2+bx+c} & x<0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=2\\ b=-4\\ c=-3\end{cases}$$

$a+b+c=2-4-3=-5$

۲۴- گزینه‌ی «۲» شرط فرد بودن توابع زوج مرتب آن است که مولفه‌های اول قرینه‌ی هم دارای مولفه‌های دوم قرینه‌ی هم باشند.

$a+2=-5\to a=-7$

$d+1=1\to d=0$

$b+4=-2\to b=-6$

نکته: اگر تابع فرد f در $x=0$ تعریف شده باشد قطعاً از مبدأ مختصات می‌گذرد. $(f(0)=0)$

$f(0)=0\to c+1=0\to c=-1$

$a+b+c+d=-7-6-1+0=-14$

۲۵- گزینه‌ی «۱»

شرط زوج بودن : $f(x)=f(-x)$

$$f(-x)=\begin{cases}x^2-3x+1 & x\le -4\\ 3|2-x|+a|b-x| & -4<x<4\\ cx^2+dx+e & x\ge 4\end{cases}=\begin{cases}x^2+3x+1 & x\ge 4\\ 3|x+2|+a|x+b| & -4<x<4\\ cx^2-dx+e & x\le -4\end{cases}\to\begin{cases}c=1\\ e=1\\ d=3\end{cases}$$

$a=3\to f(2)=f(-2)\to 3(|2+2|+|2+b|)=3(|-2+2|+|-2+b|)\to b=-2$

$a+b+c+d+e=3-2+1+3+1=6$

۲۶- گزینه‌ی «۲» اگر f تابعی معکوس‌پذیر و اکیداً صعودی باشد، آنگاه محل تلاقی دو تابع f و f^{-1} درصورت وجود بر روی نیمساز ناحیه‌ی اول و سوم است، در این سؤال: $f(x)=x^3-3x\Rightarrow f'(x)=3x^2-3$

در بازه‌ی $[1,+\infty)$، $f'(x)\ge 0$ است، پس f اکیداً صعودی است، بنابراین محل تلاقی f و f^{-1} بر روی نیمساز ناحیه‌ی اول و سوم است، لذا:

$$\begin{cases}f(x)=x^3-3x\\ y=x\end{cases}\Rightarrow x^3-3x=x\Rightarrow x^3-4x=0$$

$\Rightarrow x(x^2-4)=0\Rightarrow x(x-2)(x+2)=0\Rightarrow x=0\,,\,x=2\,,\,x=-2$ از سه ریشه‌ی فوق با توجه به شرط $x\ge 1$، تنها $x=2$ قابل قبول است.

۲۷- گزینه‌ی «۲»

$$f(x)=\underbrace{\frac{1}{2}(f(x)+f(-x))}_{\text{همواره زوج}}+\underbrace{\frac{1}{2}(f(x)-f(-x))}_{\text{همواره فرد}}$$

$$\Rightarrow \text{تابع فرد}:\frac{1}{2}(f(x)-f(-x))=\frac{1}{2}(\log(2^x+1)-\log(2^{-x}+1))=\frac{1}{2}\left(\log\left(\frac{2^x+1}{2^{-x}+1}\right)\right)=\frac{1}{2}\log\left(\frac{2^x+1}{\frac{1}{2^x}+1}\right)=\frac{1}{2}\log\left(\frac{2^x+1}{\frac{1+2^x}{2^x}}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\log 2^x=\frac{x}{2}\log 2$$

۲۸- گزینه‌ی «۴»

$f(x)\to f(-x)=-f(x)$ فرد است

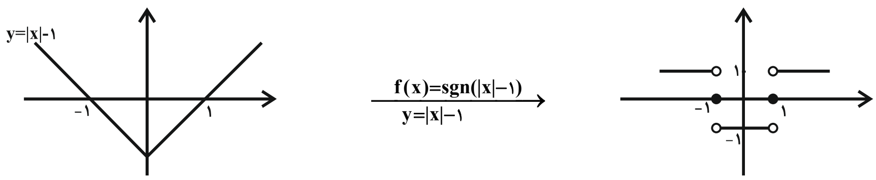
$fof(x)$ بررسی $\to f(f(-x))=f(-f(x))=-f(f(x))$

تابع $fof(x)$ فرد است.

۲۹- گزینه‌ی «۴»

$$f(x)=\operatorname{sgn}(|x|-۱)=\begin{cases}۱ & |x|-۱>۰\\ ۰ & |x|-۱=۰\\ -۱ & |x|-۱<۰\end{cases}=\begin{cases}۱ & x<-۱ \text{ یا } x>۱\\ ۰ & x=\pm ۱\\ -۱ & -۱<x<۱\end{cases}$$

راه دوم:



۳۰- گزینه‌ی «۲»

$$|x-۱|<-۳x-۵\rightarrow ۳x+۵<x-۱<-۳x-۵$$

$$\left.\begin{cases}۳x+۵<x-۱\rightarrow x<-۳\\ x-۱<-۳x-۵\rightarrow x<-۱\end{cases}\right\}\xrightarrow{\text{اشتراک}}x<-۳$$

۳۱- گزینه‌ی «۴» اگر f و g هر دو فرد باشند f + g و f − g فرد می‌باشند.

۳۲- گزینه‌ی «۴»

$$f(x)=\overbrace{\frac{۱}{۲}(f(x)+f(-x))}^{h(x)\ \text{همواره زوج}}+\overbrace{\frac{۱}{۲}(f(x)-f(-x))}^{g(x)\ \text{همواره فرد}}$$

$$h(x)=\frac{۱}{۲}(\cos^{-۱}(\sqrt[۳]{x})+\cos^{-۱}(\sqrt[۳]{-x}))$$

$$=\frac{۱}{۲}(\cos^{-۱}(\sqrt[۳]{x})+\pi-\cos^{-۱}(\sqrt[۳]{x}))=\frac{\pi}{۲}$$

۳۳- گزینه‌ی «۲»

$$f(x)=\begin{cases}۲\sqrt{x}-۱ & x>۰\\ g(x) & x<۰\end{cases}$$

$$f(-x)=\begin{cases}۲\sqrt{-x}-۱ & -x>۰\\ g(-x) & -x<۰\end{cases}=\begin{cases}۲\sqrt{-x}-۱ & x<۰\\ g(-x) & x>۰\end{cases}$$

$$-f(x)=\begin{cases}-۲\sqrt{x}+۱ & x>۰\\ -g(x) & x<۰\end{cases}$$

$$x<۰\rightarrow f(-x)=-f(x)\rightarrow ۲\sqrt{-x}-۱=-g(x)\rightarrow g(x)=-۲\sqrt{-x}+۱$$

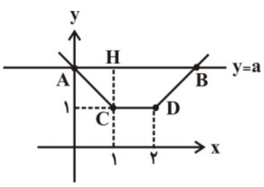
۳۴- گزینه‌ی «۳»

$f(x)\rightarrow m+n=۰$ فرد است.

$g(x)\rightarrow ۲m+۴=۰\rightarrow m=-۲\rightarrow n=۲$ زوج است.

$$\left.\begin{matrix}f(x)=\tan x\\ g(x)=۱-\tan^{۲}x\end{matrix}\right\}\rightarrow\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\tan x}{۱-\tan^{۲}x}=\frac{۱}{۲}\tan ۲x$$

۳۵- گزینه‌ی «۲» ابتدا نمودار $y=|x-۱|+|x-۲|$ را رسم می‌کنیم.



$$\begin{cases}۳-۲x & ; \quad x\le ۱\\ ۱ & ; \quad ۱<x<۲\\ ۲x-۳ & ; \quad x\ge ۲\end{cases}$$

چون $y=a$ نمودار را در دو نقطه قطع می‌کند، پس $a>۱$ است. محل تقاطع $y=a$ با نمودار، روی دو نیم‌خط است.

$$\begin{cases}y=a\\ y=۳-۲x\end{cases}\Rightarrow a=۳-۲x\Rightarrow x_A=\frac{۳-a}{۲}$$

$$\begin{cases}y=a\\ y=۲x-۳\end{cases}\Rightarrow a=۲x-۳\Rightarrow x_B=\frac{a+۳}{۲}$$

$$S_{ABDC}=\frac{۱}{۲}(AB+CD).CH=\frac{۱}{۲}((\frac{a+۳}{۲}-\frac{۳-a}{۲})+۱)(a-۱)=\frac{۱}{۲}(a+۱)(a-۱)=۴\Rightarrow a^{۲}-۱=۸\Rightarrow a^{۲}=۹\xrightarrow{a>۱}a=۳$$

۳۶- گزینه‌ی «۳»

با توجه به این که $f(x)$ یک تابع ثابت است، لذا $h(x)=g(x)-16$ از درجه‌ی ۲ خواهد بود. از طرفی دامنه‌ی $f(x)$ عبارت است از $R-\{-2,2\}$، بنابراین اعداد ۲ و ۲- صفرهای تابع $h(x)=g(x)-16$ هستند و داریم:

$$h(x)=g(x)-16=k(x-2)(x+2)=k(x^2-4)\Rightarrow g(x)-16=kx^2-4k\xrightarrow{g(0)=0}k=4\Rightarrow g(x)=4x^2$$

$$\Rightarrow h(x)=g(x)-16=4(x^2-4)$$

از طرفی $f(x)$ برابر با یک مقدار ثابت مانند c است. پس:

$$f(x)=\frac{2x^2+ax+b}{4(x^2-4)}=c\Rightarrow 2x^2+ax+b=4cx^2-16c$$

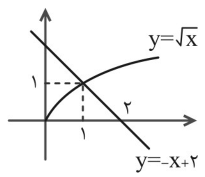
$$\Rightarrow\begin{cases}c=\frac{1}{2}\\ a=0\\ b=-16c=-16(\frac{1}{2})=-8\end{cases}\Rightarrow f(x)=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{f(b)}{g(a)-2}=\frac{f(-8)}{g(0)-2}=\frac{\frac{1}{2}}{-2}=-\frac{1}{4}$$

۳۷- گزینه‌ی «۱»

$$|x+1|+|x|\geq|2x-1|$$

$$\left.\begin{array}{l}x\leq-1\to -x-1-x\geq-2x+1\to -1\geq+1\to x=\phi\\ -1<x\leq0\to x+1-x\geq-2x+1\to -2x\leq0\to x\geq0\to x=0\\ 0<x<\frac{1}{2}\to x+1+x\geq-2x+1\to 4x\geq0\to 0<x<\frac{1}{2}\\ x\geq\frac{1}{2}\to x+1+x\geq2x-1\to 1\geq-1\to x\geq\frac{1}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow x\geq0$$

۳۸- گزینه‌ی «۱»



$$\sqrt{x}=-x+2\to x=x^2-4x+4\to x^2-5x+4=0$$

$$(x-1)(x-4)=0\to\begin{cases}x=1 & \text{قق}\\ x=4 & \text{غ‌قق}\end{cases}$$

$$\Rightarrow x\in[0,1]=[a,b]\to b-a=1$$

۳۹- گزینه‌ی «۳»

$$\sqrt{\log_{\frac{1}{3}}^{(3x-1)}}>\log_x^x\to\sqrt{\log_{\frac{1}{3}}^{(3x-1)}}>1\to \text{توان } 2$$

$$\log_{\frac{1}{3}}^{(3x-1)}>1\to\log_{\frac{1}{3}}^{(3x-1)}>\log_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}}\to 3x-1<\frac{1}{3}\to x<\frac{4}{9}$$

$$\log_{\frac{1}{3}}^{(3x-1)}\geq0\to\log_{\frac{1}{3}}^{(3x-1)}\geq\log_{\frac{1}{3}}^{1}\to 3x-1\leq1\to x\leq\frac{2}{3}$$

$$3x-1>0\to x>\frac{1}{3},\ x>0,\ x\neq1$$

$$x<\frac{4}{9},\ x\leq\frac{2}{3},\ x>\frac{1}{3},\ x>0,\ x\neq1\xrightarrow{\cap}\frac{1}{3}<x<\frac{4}{9}$$

۴۰- گزینه‌ی «۱»

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{x^2-1}<\frac{\sqrt{44}}{10}\to x^2-1<\frac{44}{100}\to x^2<\frac{144}{100}\to -1/2<x<1/2\\ \text{دامنه}: x^2-1\geq0\to x^2\geq1\to x\leq-1\ \text{یا}\ x\geq1\\ \text{همسایگی متقارن به مرکز ۱ و شعاع } \frac{3}{10}\Rightarrow x\in\left(1-\frac{3}{10},1+\frac{3}{10}\right)\to 0/7<x<1/3\end{array}\right\}\xrightarrow{\cap}1\leq x<1/2$$

ترکیب توابع و توابع یک به یک، معکوس و جزء صحیح

۴۱- گزینه‌ی «۲»

راه حل اول:

$$g(x)=f(2x-4)\rightarrow f^{-1}(g(x))=f^{-1}of(2x-4)=f^{-1}(f(2x-4))$$

$$\rightarrow f^{-1}(g(x))=2x-4\rightarrow x=\frac{1}{2}f^{-1}(g(x))+\frac{4}{2}\rightarrow g^{-1}(x)=\frac{1}{2}f^{-1}(x)+\frac{4}{2}$$

$$g^{-1}(8)=\frac{1}{2}f^{-1}(8)+\frac{4}{2}=\frac{1}{2}(10)+\frac{4}{2}=\frac{14}{2}=7$$

راه حل دوم:

$$g^{-1}(8)=a\Rightarrow g(a)=8\Rightarrow f(2a-4)=8\Rightarrow f^{-1}(8)=2a-4\Rightarrow 8+\sqrt[3]{8}=10=2a-4\Rightarrow a=7\Rightarrow g^{-1}(8)=7$$

۴۲- گزینه‌ی «۳»

$$f^{-1}=\{(1,0),(2,-1),(4,3)\}$$

$$D_{gof^{-1}}\subset D_{f^{-1}}$$

$$x=1\rightarrow g(f^{-1}(1))=g(0)=4\rightarrow 2gof^{-1}(1)\rightarrow (1,8)$$

$x=2\rightarrow g(f^{-1}(2))=g(-1)\rightarrow$ ت.ن

$$x=4\rightarrow g(f^{-1}(4))=g(3)=-2\rightarrow 2gof^{-1}(4)\rightarrow (4,-4)$$

۴۳- گزینه‌ی «۳»

شرط یک به یک بودن $\rightarrow$ جمله‌ی x^6 حذف شود $\rightarrow a=-2$

$$\rightarrow\begin{cases}y=x^3-3x^2+3x\\ y=x\end{cases}\rightarrow x^3-3x^2+2x=0\rightarrow x(x^2-3x+2)=0\rightarrow x=0,1,2$$

۴۴- گزینه‌ی «۴»

$$F(x-\frac{1}{x})=\frac{x^2}{x^4+1}+5=\frac{1}{\frac{x^4+1}{x^2}}+5\rightarrow F(x-\frac{1}{x})=\frac{1}{x^2+\frac{1}{x^2}}+5=\frac{1}{(x-\frac{1}{x})^2+2}+5\rightarrow F(x)=\frac{1}{x^2+2}+5$$

۴۵- گزینه‌ی «۲»

$$D_f=\{k-1,k,0\}\xrightarrow{\text{شرط تقارن دامنه}}k-1=-k\Rightarrow 2k=1\Rightarrow k=\frac{1}{2}$$

$$f(0)=m-3=0\Rightarrow m=3$$

$$fog(-k)=f(g(\frac{-1}{2}))=f(\frac{1}{2})=-\frac{3}{2}$$

۴۶- گزینه‌ی «۱»

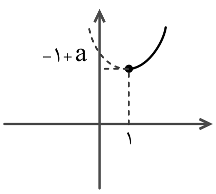
$$f:x\in\mathbb{R}\rightarrow y\geq 1\rightarrow f^{-1}:x\geq 1,\ y\in\mathbb{R}$$

$$2y=a^x+\frac{1}{a^x}\rightarrow 2a^xy=a^{2x}+1\rightarrow a^{2x}-2ya^x+1=0\rightarrow (a^x-y)^2-y^2+1=0\rightarrow a^x=y+\sqrt{y^2-1}$$

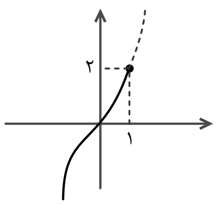
$$\rightarrow x=\log_a^{y+\sqrt{y^2-1}}\rightarrow y^{-1}=\log_a^{x+\sqrt{x^2-1}}$$

۴۷- گزینه‌ی «۱» شرط یک به یک بودن آن است که می‌نیمم y_1 از ماکزیمم y_2 بزرگتر یا برابر باشد.

$y_1=x^2-2x+a$

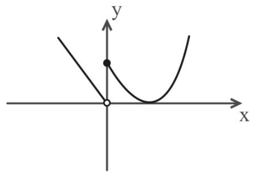


$y_2=x^3+x$

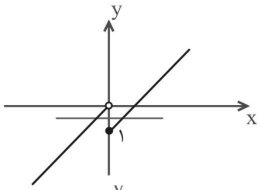


$$-1+a\geq 2\rightarrow a\geq 3$$

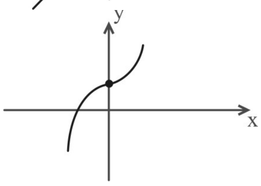
۴۸- گزینه‌ی «۳»

گزینه‌ی «۱» : 

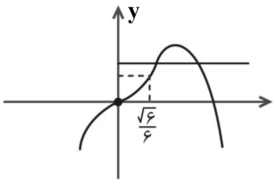
نادرست

گزینه‌ی «۲» : 

نادرست

گزینه‌ی «۳» : 

درست

گزینه‌ی «۴» : 

نادرست

۴۹- گزینه‌ی «۴»

$$fog(x)=g^2(x)-4g(x)+3=4x^2-4x\Rightarrow(g(x)-2)^2=4x^2-4x+1$$

$$\Rightarrow(g(x)-2)^2=(2x-1)^2\Rightarrow\begin{cases}g(x)-2=2x-1\Rightarrow g(x)=2x+1\\ g(x)-2=-2x+1\Rightarrow g(x)=-2x+3\end{cases}$$

۵۰- گزینه‌ی «۲»

$f([f(x)])=2\rightarrow[f(x)]=0\rightarrow 0\le f(x)<1\rightarrow -4\le x<-2$ یا $2<x\le 4$

۵۱- گزینه‌ی «۲»

$$(gof)^{-1}(2x-1)=x\Rightarrow f^{-1}(g^{-1}(2x-1))=x$$

$$\xrightarrow{x=2}f^{-1}(g^{-1}(3))=2\Rightarrow g^{-1}(3)=f(2)=2^3+2=10$$

۵۲- گزینه‌ی «۳»

$$f(g(x))=-4x^2-8x-3\xrightarrow{x=-1}f(g(-1))=-4+8-3=1$$

$$f(x)=-x^2+2x\rightarrow f(g(-1))=-(g(-1))^2+2(g(-1))=1$$

$$g^2(-1)-2g(-1)+1=0\rightarrow(g(-1)-1)^2=0\rightarrow g(-1)=1$$

۵۳- گزینه‌ی «۲»

$$f(x)=\frac{x}{4}-\left[\frac{x}{3}\right]=0\rightarrow\frac{x}{4}=\left[\frac{x}{3}\right]=k\in Z\rightarrow x=4k$$

$$\left[\frac{4k}{3}\right]=k\rightarrow k\le\frac{4k}{3}<k+1\rightarrow 3k\le 4k<3k+3\xrightarrow{-3k}0\le k<3\rightarrow k=0,1,2\rightarrow x=0,4,8$$

معادله ۳ ریشه دارد.

۵۴- گزینه‌ی «۳»

$$D_{fog}=\{x\in D_g\mid g(x)\in D_f\}=\{x\in\{2,3,4\}\mid\{3,5,7\}\in\{1,2,3\}\}\Rightarrow x=2$$

$$D_{gof}=\{x\in D_f\mid f(x)\in D_g\}=\{x\in\{1,2,3\}\mid\{2,4\}\in\{2,3,4\}\}\Rightarrow x=1,2,3$$

$fog-gof$ برای برقراری این رابطه $\Rightarrow D_{fog}\cap D_{gof}\Rightarrow x=2$

$x=2\Rightarrow fog(2)-gof(2)=4-7=-3\Rightarrow$ زوج مرتب : $(2,-3)$

۵۵- گزینه‌ی «۱»

$$f(\sqrt{2}\sin x)=\cos 2x\rightarrow f(\sqrt{2}\sin x)=1-2\sin^2 x=1-(\sqrt{2}\sin x)^2\xrightarrow{\sqrt{2}\sin x=A}f(A)=1-A^2$$

$$\rightarrow f(\cos x)=1-\cos^2 x=\sin^2 x$$

۵۶- گزینه‌ی «۱» دامنه‌ی تابع f بازه‌ی $[0,a]$ و برد آن بازه‌ی $[1,3a+1]$ می‌باشد. برای این‌که تابع fof با دامنه‌ی غیرتهی قابل تعریف باشد، لازم است داشته باشیم $[0,a]\cap[1,3a+1]\neq\phi$ و برای این کار لازم است $a\geq 1$ باشد.

۵۷- گزینه‌ی «۴»

$$[-f(x)]+[f(x)]=\begin{cases}0 & f(x)\in\mathbb{Z}\\ -1 & f(x)\notin\mathbb{Z}\end{cases}$$

$$\left[\frac{-1}{x+1}\right]+\left[\frac{1}{x+1}\right]=-1\rightarrow\frac{1}{x+1}\notin\mathbb{Z}\rightarrow x\neq-1,0,-2\rightarrow x\in\mathbb{Z}-\{-2,-1,0\}$$

۵۸- گزینه‌ی «۲»

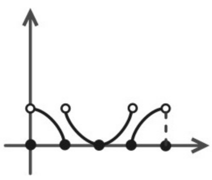
$$x=0\rightarrow y=0$$

$$0<x\leq\frac{\pi}{2}\rightarrow[\cos x]=0\rightarrow y=\cos x$$

$$\frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{2}\rightarrow[\cos x]=-1\rightarrow y=\cos x+1$$

$$\frac{3\pi}{2}\leq x<2\pi\rightarrow[\cos x]=0\rightarrow y=\cos x$$

$$x=2\pi\rightarrow y=0$$



۵۹- گزینه‌ی «۲»

$$x\geq0\rightarrow x^2+1=y\rightarrow x^2=y-1\rightarrow|x|=\sqrt{y-1}\rightarrow x=\sqrt{y-1}\rightarrow y^{-1}=\sqrt{x-1}$$

$$x\geq0\rightarrow x^2\geq0\rightarrow x^2+1\geq1\rightarrow y\geq1$$

$$x<0\rightarrow x-1=y\rightarrow x=y+1\rightarrow y^{-1}=x+1$$

$$x<0\rightarrow x-1<-1\rightarrow y<-1$$

$$f^{-1}(x)=\begin{cases}\sqrt{x-1} & x\geq1\\ x+1 & x<-1\end{cases}$$

۶۰- گزینه‌ی «۴» ابتدا قدر مطلق را تعیین علامت کرده و سپس تابع مرکب را تشکیل می‌دهیم و برد آن را با ساختن تابع محاسبه می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{x+|x|}{x(\sqrt{x}+1)}\xrightarrow{x>0}f(x)=\frac{2x}{x(\sqrt{x}+1)}=\frac{2}{\sqrt{x}+1}\ ,\ x>0$$

$$f(g(x))=\frac{2}{\sqrt{x-[x]}+1}\ ,\ x-[x]>0$$

$$0<x-[x]<1\rightarrow0<\sqrt{x-[x]}<1\rightarrow1<\sqrt{x-[x]}+1<2$$

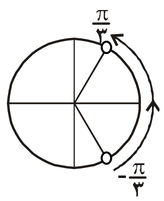
$$\rightarrow\frac{1}{2}<\frac{1}{\sqrt{x-[x]}+1}<1\xrightarrow{\times2}1<\frac{2}{\sqrt{x-[x]}+1}<2\rightarrow R_{fog(x)}=(1\,,2)$$

روابط بین نسبت‌های مثلثاتی و توابع معکوس مثلثاتی

۶۱- گزینه‌ی «۳»

$$-\frac{\pi}{6}<x<\frac{\pi}{6}\ ,\ \cos2x=\frac{m-1}{2}$$

$$-\frac{\pi}{3}<2x<\frac{\pi}{3}\rightarrow$$



$$\rightarrow\frac{1}{2}<\cos2x\leq1\rightarrow\frac{1}{2}<\frac{m-1}{2}\leq1$$

$$\rightarrow1<m-1\leq2\rightarrow2<m\leq3\rightarrow m\in(2,3]$$

۶۲- گزینه‌ی «۲»

$$\frac{\sin^{۲}x-۲\cos^{۲}x+۱}{\sin^{۲}x+۲\cos^{۲}x-۱}=۴\rightarrow\cot^{۲}x=?$$

صورت و مخرج را بر $\sin^{۲}x$ تقسیم کنید.

$$\rightarrow\frac{۱-۲\cot^{۲}x+\frac{۱}{\sin^{۲}x}}{۱+۲\cot^{۲}x-\frac{۱}{\sin^{۲}x}}=۴\rightarrow\frac{۱-۲\cot^{۲}x+۱+\cot^{۲}x}{۱+۲\cot^{۲}x-۱-\cot^{۲}x}=۴\rightarrow\frac{۲-\cot^{۲}x}{\cot^{۲}x}=۴$$

$$\rightarrow۲-\cot^{۲}x=۴\cot^{۲}x\rightarrow۵\cot^{۲}x=۲\rightarrow\cot^{۲}x=\frac{۲}{۵}$$

۶۳- گزینه‌ی «۲»

$$\sin^{۲}(x+y)+\sin^{۲}(x-y)+\cos۲x.\cos۲y$$

$$\frac{۱-\cos(۲x+۲y)}{۲}+\frac{۱-\cos(۲x-۲y)}{۲}+\frac{۱}{۲}(\cos(۲x+۲y)+\cos(۲x-۲y))$$

$$=\frac{۱}{۲}(۲-\cos(۲x+۲y)-\cos(۲x-۲y)+\cos(۲x+۲y)+\cos(۲x-۲y))=۱$$

۶۴- گزینه‌ی «۳»

$$\frac{\cos۱۰^\circ+\sqrt{۳}\sin۱۰^\circ}{\sin۴۰}=\frac{\cos۱۰^\circ+\tan۶۰^\circ\sin۱۰^\circ}{\sin۴۰}=\frac{\cos۱۰^\circ+\frac{\sin۶۰^\circ}{\cos۶۰^\circ}.\sin۱۰^\circ}{\sin۴۰^\circ}$$

$$=\frac{\cos۱۰^\circ\cos۶۰^\circ+\sin۶۰^\circ\sin۱۰^\circ}{\sin۴۰^\circ\cos۶۰^\circ}=\frac{\cos(۱۰^\circ-۶۰^\circ)}{\sin۴۰^\circ\times\frac{۱}{۲}}=\frac{(\cos۵۰^\circ)\times۲}{\sin۴۰^\circ}=\frac{۲\sin۴۰^\circ}{\sin۴۰^\circ}=۲$$

۶۵- گزینه‌ی «۲» اگر $\cot۲۰^\circ=A$ باشد، داریم:

$$\frac{۲\sin۳۴۰^\circ+۳\sin۷۰^\circ}{\cos۲۹۰^\circ}=\frac{۲\sin(۳۶۰^\circ-۲۰^\circ)+۳\sin(۹۰^\circ-۲۰^\circ)}{\cos(۲۷۰^\circ+۲۰^\circ)}$$

$$=\frac{-۲\sin۲۰^\circ+۳\cos۲۰^\circ}{\sin۲۰^\circ}=-۲+۳\cot۲۰^\circ=-۲+۳A$$

۶۶- گزینه‌ی «۱»

$$\tan(۲۰^\circ+\alpha)=\frac{۳}{۴}$$

$$\tan(۲۵^\circ-\alpha)=\tan(۴۵^\circ-(۲۰^\circ+\alpha))=\frac{\tan۴۵^\circ-\tan(۲۰^\circ+\alpha)}{۱+\tan۴۵^\circ.\tan(۲۰^\circ+\alpha)}=\frac{۱-\frac{۳}{۴}}{۱+\frac{۳}{۴}}=\frac{\frac{۱}{۴}}{\frac{۷}{۴}}=\frac{۱}{۷}$$

۶۷- گزینه‌ی «۴»

$$\frac{۲\left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}-\sin۲\alpha\right)}{۲\left(\frac{۱}{۲}+\cos۲\alpha\right)}=۳\rightarrow\frac{\sin۶۰^\circ-\sin۲\alpha}{\cos۶۰^\circ+\cos۲\alpha}=۳\rightarrow\frac{۲\sin(۳۰^\circ-\alpha)\cos(۳۰^\circ+\alpha)}{۲\cos(۳۰^\circ-\alpha)\cos(۳۰^\circ+\alpha)}=۳$$

$$\rightarrow\tan(۳۰^\circ-\alpha)=۳\rightarrow۱+\tan^{۲}(۳۰^\circ-\alpha)=\frac{۱}{\cos^{۲}(۳۰^\circ-\alpha)}\rightarrow۱+(۳)^{۲}=\frac{۱}{\cos^{۲}(۳۰^\circ-\alpha)}\rightarrow\cos^{۲}(۳۰^\circ-\alpha)=۰/۱$$

۶۸- گزینه‌ی «۳»

$$\sin^{-۱}(\cos(۶x+۵x))=\sin^{-۱}(\cos۱۱x)\xrightarrow{x=\frac{\pi}{۸}}\sin^{-۱}\left(\cos\frac{۱۱\pi}{۸}\right)=\sin^{-۱}\left(\cos\frac{۸\pi+۳\pi}{۸}\right)$$

$$=\sin^{-۱}\left(\cos\left(\pi+\frac{۳\pi}{۸}\right)\right)=\sin^{-۱}\left(-\cos\left(\frac{۳\pi}{۸}\right)\right)=-\sin^{-۱}\left(\sin\left(\frac{\pi}{۲}-\frac{۳\pi}{۸}\right)\right)=-\sin^{-۱}\left(\sin\frac{\pi}{۸}\right)=\frac{-\pi}{۸}$$

۶۹- گزینه‌ی «۱»

$$\frac{۱+\sin ۲a}{۱-\sin ۲a}=۴\to ۱+\sin ۲a=۴-۴\sin ۲a\to \sin ۲a=\frac{۳}{۵}$$

$$\sin ۲a=\frac{۲\tan a}{۱+\tan^{۲} a}=\frac{۳}{۵}\to ۱۰\tan a=۳+۳\tan^{۲} a\to ۳\tan^{۲} a-۱۰\tan a+۳=۰$$

$$\tan a=x \qquad ۳x^{۲}-۱۰x+۳=۰ \qquad x=\frac{۱۰\pm ۸}{۶}$$

$$\tan a=\frac{۱۰\pm ۸}{۶}\begin{array}{l}\nearrow \tan\alpha=\frac{۱}{۳}\\ \searrow \tan\alpha=۳\end{array}\to \tan\alpha=\frac{۱}{۳}$$

۷۰- گزینه‌ی «۴»

$$\frac{۲\left(\sin(A+B)-\frac{۱}{۲}\right)}{۴\cos A\cos B}=\frac{\sin(A+B)-\sin\frac{\pi}{۶}}{۲\cos A\cos B}=\frac{\sin(A+B)-\sin(A-B)}{۲\cos A\cos B}=\frac{۲\sin B\cos A}{۲\cos A\cos B}=\tan B$$

۷۱- گزینه‌ی «۲»

$$۲\cos ۲۰^\circ\cos ۴۰^\circ+\frac{۱}{۲}=\cos ۶۰^\circ+\cos ۲۰^\circ+\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۲}+\cos ۲۰^\circ+\frac{۱}{۲}=۱+\cos ۲۰^\circ=۲\cos^{۲} ۱۰^\circ=۲\sin^{۲} ۸۰^\circ$$

۷۲- گزینه‌ی «۱»

$$\frac{(\sin ۷x-\sin ۲x)(\sin ۷x+\sin ۲x)}{\sin ۵x}=\frac{۲\sin\frac{۵x}{۲}\cos\frac{۹x}{۲}\times ۲\sin\frac{۹x}{۲}\cos\frac{۵x}{۲}}{\sin ۵x}=\frac{۲\sin\frac{۵x}{۲}\cos\frac{۵x}{۲}\times ۲\sin\frac{۹x}{۲}\cos\frac{۹x}{۲}}{\sin ۵x}$$

$$=\frac{\sin ۵x\sin ۹x}{\sin ۵x}=\sin ۹x\xrightarrow{x=\frac{\pi}{۵۴}}\sin\frac{\pi}{۶}=\frac{۱}{۲}$$

۷۳- گزینه‌ی «۱»

$$\sin\left(\sin^{-۱}\frac{۳}{۵}-\cos^{-۱}\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)=\sin\left(\sin^{-۱}\frac{۳}{۵}-\frac{\pi}{۶}\right)=\sin\left(\sin^{-۱}\frac{۳}{۵}\right).\cos\frac{\pi}{۶}-\cos\left(\sin^{-۱}\frac{۳}{۵}\right).\sin\frac{\pi}{۶}$$

$$\cos(\sin^{-۱}\frac{۳}{۵}-\frac{\pi}{۶})=\cos(\sin^{-۱}\frac{۳}{۵})\cos\frac{\pi}{۶}+\sin(\sin^{-۱}\frac{۳}{۵}).\sin\frac{\pi}{۶}$$

$$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{\frac{۳}{۵}\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}-\sqrt{۱-\frac{۹}{۲۵}}\times\frac{۱}{۲}}{\sqrt{۱-\frac{۹}{۲۵}}\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}+\frac{۳}{۵}\times\frac{۱}{۲}}=\frac{\frac{۳\sqrt{۳}-۴}{۱۰}}{\frac{۴\sqrt{۳}+۳}{۱۰}}=\frac{۳\sqrt{۳}-۴}{۴\sqrt{۳}+۳}$$

۷۴- گزینه‌ی «۲»

$f(\pi)=\cos^{-۱}(\cos\pi)=\cos^{-۱}(-۱)=\pi\to$ گزینه‌ی «۳» و «۴» نادرست است

$f(-\pi)=\cos^{-۱}(\cos(-\pi))=\cos^{-۱}(-۱)=\pi\to$ گزینه‌ی ۱ نادرست است $\to$ گزینه‌ی ۲ درست است

۷۵- گزینه‌ی «۱»

$$\cos^{-۱}\left(\frac{۱}{\sqrt{۱+x^{۲}}}\right)=\alpha\to\frac{۱}{\sqrt{۱+x^{۲}}}=\cos\alpha\to\sqrt{۱+x^{۲}}=\frac{۱}{\cos\alpha}\to ۱+x^{۲}=\frac{۱}{\cos^{۲}\alpha}$$

$$\to ۱+x^{۲}=۱+\tan^{۲}\alpha\to x^{۲}=\tan^{۲}\alpha\to x=\tan\alpha\to\alpha=\tan^{-۱}(x)$$

۷۶- گزینه‌ی «۱»

$$\tan(\tan^{-۱}(x)+\tan^{-۱}(۲x))=\tan\frac{\pi}{۲}\to\frac{x+۲x}{۱-۲x^{۲}}=\infty\to ۱-۲x^{۲}=۰$$

$\to\begin{cases}x=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\to\end{cases}$ ق.ق

$x=\frac{-\sqrt{۲}}{۲}\to$ با جای‌گذاری در معادله $\to$ جمع دو منفی برابر $\frac{\pi}{۲}$ نخواهد بود $\to$ غ.ق.ق

۷۷- گزینه‌ی «۱»

گزینه‌ی «۴» نادرست است $\rightarrow$ دامنه: $x \le -1$ یا $x \ge 1 \rightarrow |x| \ge 1 \rightarrow -1 \le \frac{1}{x} \le 1 \rightarrow f(x) = \cos^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \cos^{-1}\left(\frac{1}{1^+}\right) = \cos^{-1}(1^-) = 0 \rightarrow & \text{گزینه‌ی «۲» نادرست است.} \\ \lim\limits_{x\to (-1)^-} f(x) = \cos^{-1}((-1)^+) = \pi^- \rightarrow & \text{گزینه‌ی «۳» نادرست است.} \end{cases}$$

۷۸- گزینه‌ی «۲»

$$\cos\left[\left(\sin^{-1}\frac{1}{4}\right) + 2\underbrace{\left(\sin^{-1}\frac{1}{4} + \cos^{-1}\frac{1}{4}\right)}_{\frac{\pi}{2}}\right] = \cos\left[\pi + \sin^{-1}\frac{1}{4}\right] = -\cos\left(\sin^{-1}\frac{1}{4}\right) = -\sqrt{1-\frac{1}{16}} = -\frac{\sqrt{15}}{4}$$

۷۹- گزینه‌ی «۱»

$$\cot\left(2\tan^{-1}\left(\frac{1}{4}\right)\right) = \frac{1}{\tan\left(2\tan^{-1}\left(\frac{1}{4}\right)\right)} = \frac{1}{\dfrac{2\tan\left(\tan^{-1}\left(\frac{1}{4}\right)\right)}{1-\tan^2\left(\tan^{-1}\left(\frac{1}{4}\right)\right)}} = \frac{1}{\dfrac{2\times\frac{1}{4}}{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2}} = \frac{1-\frac{1}{16}}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{15}{16}}{\frac{1}{2}} = \frac{15}{8}$$

۸۰- گزینه‌ی «۱»

$$\sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) = \alpha \rightarrow \sin\alpha = \frac{1}{3} \rightarrow \cos\alpha = \sqrt{1-\frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{8}}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \rightarrow \alpha = \operatorname{Arccos}\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$$

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{4} \rightarrow \tan\alpha = \frac{\sqrt{2}}{4} \rightarrow \alpha = \operatorname{Arctan}\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$$

$$\sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) + \tan^{-1}\frac{\sqrt{2}}{4} = 2\alpha = 2\cos^{-1}\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$$

معادلات مثلثاتی

۸۱- گزینه‌ی «۳»

$$\cos^2 3x - \cos^2 x = 2\sin 2x\cos 2x \rightarrow \cos^2 3x - \cos^2 x = \sin 4x$$

$$(\cos 3x + \cos x)(\cos 3x - \cos x) = \sin 4x$$

$$(2\cos 2x\cos x)(-2\sin 2x\sin x) = \sin 4x$$

$$-\sin 4x\sin 2x = \sin 4x \rightarrow \begin{cases} \sin 4x = 0 \rightarrow 4x = k\pi \rightarrow x = \frac{k\pi}{4} = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right\} \\ \sin 2x = -1 \rightarrow 2x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{4} = \left\{\frac{3\pi}{4}\right\} \end{cases}$$

$\frac{\pi}{2}$ عضو دامنه نیست و مخرج را صفر می‌کند پس مجموع ریشه‌ها به صورت زیر است: $\frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} = \pi$ = جمع ریشه‌ها

۸۲- گزینه‌ی «۱»

$$\frac{3+3\tan x}{1-\tan x} = \sqrt{3} \Rightarrow \frac{3(1+\tan x)}{1-\tan x} = \sqrt{3} \Rightarrow \tan\left(\frac{\pi}{4}+x\right) = \frac{\sqrt{3}}{3} = \tan\frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{4} + x = k\pi + \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{12} \quad (k\in Z)$$

در بازهٔ $(-\pi,\pi)$، معادلهٔ فوق دارای جواب‌های $-\frac{\pi}{12}$ و $\frac{11\pi}{12}$ است.

۸۳- گزینه‌ی «۲»

$$۲\sin^۲(x-\frac{\pi}{۱۶})+۳\cos(x-\frac{۹\pi}{۱۶})=۵$$

می‌دانیم: $\cos\alpha=\sin(\frac{\pi}{۲}+\alpha)$

$$\cos(x-\frac{۹\pi}{۱۶})=\sin(\frac{\pi}{۲}+x-\frac{۹\pi}{۱۶})=\sin(x+\frac{۸\pi}{۱۶}-\frac{۹\pi}{۱۶})=\sin(x-\frac{\pi}{۱۶})$$

$\Rightarrow$ پس داریم: $۲\sin^۲(x-\frac{\pi}{۱۶})+۳\sin(x-\frac{\pi}{۱۶})=۵ \quad \sin(x-\frac{\pi}{۱۶})=k$

$$۲k^۲+۳k-۵=۰\Rightarrow\begin{cases}k=۱\\ k=-\frac{۵}{۲}\end{cases}\Rightarrow\sin(x-\frac{\pi}{۱۶})=۱ \text{ و } \sin(x-\frac{\pi}{۱۶})=-\frac{۵}{۲} \text{ غ ق ق}$$

$$x-\frac{\pi}{۱۶}=۲k\pi+\frac{\pi}{۲} \qquad x=۲k\pi+\frac{۹\pi}{۱۶} \qquad k=۰\Rightarrow x=\frac{۹\pi}{۱۶}$$

۸۴- گزینه‌ی «۱»

$$\tan^۲x-k\tan x+k^۲-۱=۰$$

$$x'+x''=\frac{\pi}{۴}\to\tan(x'+x'')=\tan\frac{\pi}{۴}\to\frac{\tan x'+\tan x''}{۱-\tan x'.\tan x''}=۱$$

$$\xrightarrow[\text{(ضرب ریشه‌ها)}\ \tan x'.\tan x''=\frac{c}{a}]{\text{(جمع ریشه‌ها)}\ \tan x'+\tan x''=-\frac{b}{a}}\frac{k}{۱+۱-k^۲}=۱\to k^۲+k-۲=۰\to\begin{cases}k=۱\\ k=-۲\end{cases}$$

$k=-۲$ غیرقابل قبول است. زیرا:

$$k=-۲\Rightarrow\tan^۲x+۲\tan x+۳=۰ \qquad \Delta=۴-۱۲=-۸<۰$$

۸۵- گزینه‌ی «۲»

$$\cos۵t=\cos t.\cos۴t\to t\in[۰,\pi]$$

$$\cos(t+۴t)=\cos t.\cos۴t-\sin t.\sin۴t=\cos t\times\cos۴t$$

$$\to\begin{cases}\sin t=۰\to t=۰,\pi\\ \text{یا}\\ \sin۴t=۰\to۴t=k\pi\to t=\frac{k\pi}{۴}\to x=\overset{\text{مشترک}}{۰},\frac{\pi}{۴},\frac{\pi}{۲},\frac{۳\pi}{۴},\overset{\text{مشترک}}{\pi}\end{cases}$$

معادله ۵ ریشه دارد.

۸۶- گزینه‌ی «۴»

$$۴(\cos^۲x)^۲=۲\cos۲x+\frac{۳}{۲}\to۴\left(\frac{۱+\cos۲x}{۲}\right)^۲=۲\cos۲x+\frac{۳}{۲}$$

$$۱+\cos^۲۲x+۲\cos۲x=۲\cos۲x+\frac{۳}{۲}\to\cos^۲۲x=\frac{۱}{۲}$$

$$\to\cos^۲۲x=\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)^۲=\cos^۲\frac{\pi}{۴}\to۲x=k\pi\pm\frac{\pi}{۴}\to x=\frac{k\pi}{۲}\pm\frac{\pi}{۸}$$

۸۷- گزینه‌ی «۲»

$$۳\sin x+\sqrt{۳}\cos x=۳\to\sin x+\frac{\sqrt{۳}}{۳}\cos x=۱\to\sin x+\tan\frac{\pi}{۶}\cos x=۱$$

$$\to\sin x+\frac{\sin\frac{\pi}{۶}}{\cos\frac{\pi}{۶}}.\cos x=۱\to\sin x.\cos\frac{\pi}{۶}+\sin\frac{\pi}{۶}.\cos x=\cos\frac{\pi}{۶}$$

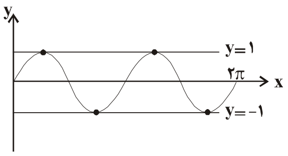
$$\to\sin(x+\frac{\pi}{۶})=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\to\sin(x+\frac{\pi}{۶})=\sin\frac{\pi}{۳}\to\begin{cases}x+\frac{\pi}{۶}=۲k\pi+\frac{\pi}{۳}\to x=۲k\pi+\frac{\pi}{۶}\\ x+\frac{\pi}{۶}=۲k\pi+\pi-\frac{\pi}{۳}\to x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}\end{cases}$$

۸۸- گزینه‌ی «۳»

$$\sin^۶x+\cos^۶x=\frac{۱}{۴}\to x\in[۰,۲\pi]$$

$$۱-\frac{۳}{۴}\sin^۲۲x=\frac{۱}{۴}\to-\frac{۳}{۴}\sin^۲۲x=-\frac{۳}{۴}\to\sin^۲۲x=۱\to\sin۲x=\pm۱$$

$$\to\begin{cases}\sin۲x=۱\\ \sin۲x=-۱\end{cases}\to$$



معادله چهار ریشه دارد.

$$\rightarrow\begin{cases}\sin ۲x=۱\rightarrow ۲x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}\rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{۴}\rightarrow x=\frac{\pi}{۴},\frac{۵\pi}{۴}\\ \text{یا}\\ \sin ۲x=-۱\rightarrow ۲x=۲k\pi+\frac{۳\pi}{۲}\rightarrow x=k\pi+\frac{۳\pi}{۴}\rightarrow x=\frac{۳\pi}{۴},\frac{۷\pi}{۴}\end{cases}$$

۸۹- گزینه‌ی «۳»

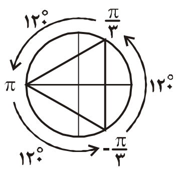
$$\frac{۳\sin x-۴\sin^۳ x}{\sin x}=۲\cos^۲ x\Rightarrow \frac{\sin x(۳-۴\sin^۲ x)}{\sin x}=۲\cos^۲ x$$

$$\xrightarrow{\sin x\neq ۰} ۳-۴\sin^۲ x=۲\cos^۲ x\Rightarrow ۳-۴\sin^۲ x=۲(۱-\sin^۲ x)$$

$$\Rightarrow ۳-۴\sin^۲ x=۲-۲\sin^۲ x\Rightarrow ۲\sin^۲ x=۱\Rightarrow \sin^۲ x=\frac{۱}{۲}\Rightarrow \sin x=\pm\frac{\sqrt{۲}}{۲}\Rightarrow x=\frac{k\pi}{۲}+\frac{\pi}{۴}$$

۹۰- گزینه‌ی «۱» نکته: در بازه‌ی $(۰,\frac{\pi}{۲})$ داریم $۱<\sin x+\cos x\le\sqrt{۲}$. بنابراین سمت چپ تساوی، عددی بزرگ‌تر از یک است و سمت راست عددی همواره کوچک‌تر از ۱ ، بنابراین این تساوی ممکن نیست.

۹۱- گزینه‌ی «۲»



$$(۱+\cos x)(۲\cos x-۱)=۰\rightarrow\begin{cases}۱+\cos x=۰\rightarrow \cos x=-۱\rightarrow x=۲k\pi+\pi\rightarrow x=\pi\\ ۲\cos x-۱=۰\rightarrow \cos x=\frac{۱}{۲}\rightarrow\begin{cases}x=۲k\pi+\frac{\pi}{۳}\\ x=۲k\pi-\frac{\pi}{۳}\end{cases}\rightarrow x=-\frac{\pi}{۳},\frac{\pi}{۳}\end{cases}$$

مثلث مورد نظر متساوی‌الاضلاع است.

۹۲- گزینه‌ی «۳»

$$۲\sqrt{۲}\sin x\cos x=\sin x+\cos x\rightarrow \sqrt{۲}\sin ۲x=\sqrt{۲}\sin\left(x+\frac{\pi}{۴}\right)\rightarrow \sin ۲x=\sin\left(x+\frac{\pi}{۴}\right)$$

$$\rightarrow\left.\begin{cases}۲x=۲k\pi+\pi-x-\frac{\pi}{۴}\rightarrow x=۲\frac{k\pi}{۳}+\frac{\pi}{۴}\\ ۲x=۲k\pi+x+\frac{\pi}{۴}\rightarrow x=۲k\pi+\frac{\pi}{۴}\end{cases}\right\}\xrightarrow{\cup} x=\frac{۲k\pi}{۳}+\frac{\pi}{۴}$$

۹۳- گزینه‌ی «۱»

$$\sin ۳x+\sin x=۴\sin x\cos x\rightarrow ۲\sin ۲x.\cos x=۲\sin ۲x$$

$$\rightarrow ۲\sin ۲x.\cos x-۲\sin ۲x=۰\rightarrow ۲\sin ۲x(\cos x-۱)=۰$$

$$\begin{cases}\sin ۲x=۰\rightarrow ۲x=k\pi\rightarrow x=\frac{k\pi}{۲}\\ \cos x-۱=۰\rightarrow \cos x=۱\rightarrow x=۲k\pi\end{cases}\rightarrow$$

پس جواب کلی $x=\frac{k\pi}{۲}$ است.

۹۴- گزینه‌ی «۱»

$$\frac{\cos ۷x\times\cos ۳x-\sin ۲x\sin ۶x}{\cos x}=۱\Rightarrow\frac{\frac{۱}{۲}(\cos ۱۰x+\cos ۴x)-(-\frac{۱}{۲})(\cos ۸x-\cos ۴x)}{\cos x}=۱$$

$$\Rightarrow\frac{\frac{۱}{۲}(\cos ۱۰x+\cos ۸x)}{\cos x}=۱\Rightarrow\frac{\cos ۹x\cos x}{\cos x}=۱\Rightarrow \cos ۹x=۱\Rightarrow ۹x=۲k\pi\Rightarrow x=\frac{۲k\pi}{۹}$$

۹۵- گزینه‌ی «۳»

$$\tan x=\frac{-۱}{\cot ۲x}\rightarrow \tan x=-\tan ۲x\rightarrow \tan x=\frac{-۲\tan x}{۱-\tan^۲ x}$$

$$\xrightarrow{\tan x\neq ۰}۱-\tan^۲ x=-۲\rightarrow \tan^۲ x=۳\rightarrow \tan x=\pm\sqrt{۳}\rightarrow x=k\pi\pm\frac{\pi}{۳}$$