

کارت ۱
فصل ۱مجموع جملات دنباله‌های
حسابی

تعریف: به دنباله‌ای که تفاضل هر دو جمله متوالی آن مقداری ثابت باشد، دنباله حسابی گفته می‌شود.

مثال ۱: تفاضل جملات = ۴ ۳ ۷ ۱۱ ۱۵ ...

نکته: به مقدار ثابتی که به جملات اضافه (کم) می‌شود قدر نسبت گفته می‌شود. (d)

جمله اول: a

قدرنسبت: d

جملات: $a, a + d, a + 2d, \dots$

جمله عمومی: $a_n = a + (n - 1)d$

روابط

دنباله‌ی

حسابی

یا

$$\left\{ \begin{array}{l} S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \\ S_n = n a + \frac{n(n-1)}{2}d \end{array} \right. \quad \text{مجموع جملات:}$$

مثال ۲: حاصل $۱۰۰^۲ - ۹۹^۲ + ۹۸^۲ - ۹۷^۲ + \dots + ۲^۲ - ۱^۲$ را

بیابید.

حل:

$$۱۰۰^۲ - ۹۹^۲ + \dots + ۲^۲ - ۱^۲ = (۱۰۰ - ۹۹)(۱۰۰ + ۹۹)$$

$$+ \dots + (۲ - ۱)(۲ + ۱) = ۱۰۰ + ۹۹ + \dots + ۱ = \frac{۱۰۰}{۲}(۱۰۰ + ۱)$$

$$۵۰ \times ۱۰۱ = ۵۰۵۰$$



مجموع جملات دنباله‌های حسابی

کارت ۱
فصل ۱

حسابان

مثال ۳: جواب معادله‌ی زیر را بیابید.

$$(1 + x) + (4 + x) + \dots + (28 + x) = 155$$

$$\begin{cases} a_1 = 1 + x, a_n = a_1 + (n-1)d \\ d = 3 \Rightarrow 28 + x = (1 + x) + (n-1) \times 3 \Rightarrow n = 1. \end{cases}$$

$$S_1 = \frac{1}{2}(a_1 + a_1) = 5(1 + x + 28 + x) = 155 \Rightarrow x = 1$$

مثال ۴: در یک تصاعد عددی $S_n = \frac{n}{4}(4n + 6)$ است. a_n را بیابید.

$$\begin{cases} a_1 = S_1 = 5 \\ S_n = \frac{n}{4}(a_1 + a_n) = \frac{n}{4}(4n + 6) \Rightarrow a_n = 4n + 1 \end{cases}$$

مثال ۵: مجموع اعداد یک جدول ضرب 10×10 را بیابید؟
حل:

	۱	۲	۳		۱۰	
۱	۱	۲	۳		۱۰	$\rightarrow a = 1 + 2 + \dots + 10 = \frac{1}{2}(1 + 10) = 55$
۲	۲	۴	۶		۲۰	$\rightarrow 2a$
۳	۳	۶	۹		۳۰	$\rightarrow 3a$
	.					
	.					
	.					
۱۰	۱۰	۲۰	۳۰		۱۰۰	$\rightarrow 10 \cdot a$

$$S = a + 2a + \dots + 10 \cdot a = \frac{1}{2}(a + 10 \cdot a) = 55a = 55 \times 55 = 3025$$



تعریف: به دنباله‌ای که نسبت هر دو جمله متوالی آن مقداری ثابت باشد، دنباله هندسی گفته می‌شود.
نکته: به نسبت جملات متوالی قدرنسبت گفته می‌شود.

$$\left. \begin{array}{l} \text{جملات: } a, aq, aq^2, aq^3, \dots \\ \text{رابطه عمومی: } a_n = a \times q^{n-1} \\ \text{مجموع جملات: } S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q} \\ \text{مجموع تمام جملات یا حد مجموع: } \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{a_1}{1 - q} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{روابط} \\ \text{دنباله‌ی} \\ \text{حسابی} \end{array}$$

مثال ۱: توپی را بدون سرعت اولیه از ارتفاع ۱۰ متری به طرف زمین رها می‌کنیم، این توپ پس از برخورد با زمین به اندازه $\frac{4}{5}$ ارتفاع خودش بالا می‌آید. پس از طی چه مسافتی می‌ایستد؟

حل: $a, \frac{4}{5}a, \frac{4}{5}(\frac{4}{5}a), \dots = \frac{16}{25}a, \dots$: ارتفاع توپ در هر مرحله
 مجموع مسافت $S = a + 2(\frac{4}{5}a) + 2(\frac{16}{25}a) + \dots$

$$= a + \frac{8}{5}a + \frac{32}{25}a + \dots, S = a + \frac{\frac{8}{5}a}{1 - \frac{4}{5}} =$$

$$a + 8a = 9a \xrightarrow{a=10} S = 9(10) = 90$$



مجموع جملات دنباله‌های

هندسی

مثال ۲: یک مثلث با مساحت S را در نظر بگیرید. وسط‌های اضلاع آن را به هم وصل می‌کنیم و مثلث کوچک‌تر جدیدی می‌سازیم. این عمل را روی مثلث کوچک‌تر انجام می‌دهیم. این عملیات را به طور متوالی ادامه می‌دهیم. مجموع مساحت مثلث‌های به دست آمده چقدر است؟

حل: می‌دانیم مساحت مثلث کوچک در هر مرحله $1/4$ مساحت مثلث مرحله قبل است.



$$\text{مجموع مساحت‌ها} = S + \frac{1}{4}S + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}S\right) + \dots = \frac{S}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3}S$$

مثال ۳: حاصل جمع روبه‌رو را بیابید.

$$A = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \frac{4}{3^4} + \dots$$

$$\begin{cases} 3A = 1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{3^2} + \frac{4}{3^3} + \dots \\ A = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \dots \end{cases} \quad \begin{cases} 3A - A = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots \\ 2A = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2} \Rightarrow A = \frac{3}{4} \end{cases}$$

$$A = \sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{\dots}}}}$$

مثال ۴: حاصل A را بیابید.

$$A = \frac{1}{3^2} \times \frac{1}{3^4} \times \frac{1}{3^8} \times \dots = \frac{1}{3^{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots}} = \frac{1}{3^{1 - \frac{1}{2}}} = \frac{1}{3^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

حل:



تقسیم چندجمله‌ای‌ها

قضیه: باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x - a$ همان

$$P(a) \text{ است. } P(x) = (x - a)q(x) + R \xrightarrow{x=a} R = P(a)$$

اگر $R = 0$ باشد گوییم $P(x)$ بر $x - a$ بخش‌پذیر است.

مثال ۱: اگر $P(x) = ax^{2n} + 2ax^{2n-1} - 5$ بر $x + 1$ بخش‌پذیر باشد a را بیابید.

حل:

$$x + 1 = 0 \rightarrow x = -1 \rightarrow P(-1) = 0$$

$$\Rightarrow a(-1)^{2n} + 2a(-1)^{2n-1} - 5 = 0$$

$$\Rightarrow a - 2a - 5 = 0 \Rightarrow a = -5$$

مثال ۲: به‌ازای چه مقادیری از m و n عبارت

$P(x) = mx^4 + (n - 2)x + 2$ بر $x^2 - 1$ بخش‌پذیر است.

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \rightarrow P(1) = 0 \\ x = -1 \rightarrow P(-1) = 0 \end{cases}$$

حل:

$$\Rightarrow \begin{cases} m + 2 - 2 + 2 = 0 \\ m - n + 2 + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = -2 \\ n = 2 \end{cases}$$



تقسیم چند جمله‌ای‌ها

نکته: به جدول زیر توجه کنید:

$n \in \mathbb{N}$	$a^n - b^n = (a - b)$ $(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + b^{n-1})$
$n \in \mathbb{N}$	$a^n + b^n$ بر $a - b$ بخش پذیر نمی‌باشد.
n زوج	$a^n - b^n = (a + b)$ $(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \dots - b^{n-1})$
n فرد	$a^n + b^n = (a + b)$ $(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + b^{n-1})$

مثال ۳: عبارت $x^7 + 1$ را تجزیه کنید.

حل: $x^7 + 1 = (x + 1)(x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)$



بسط دوجمله‌ای‌ها

کارت ۴

فصل ۱

حسابان

تعریف: با در نظر گرفتن مثلث خیام - پاسکال می‌توان عبارت $(a + b)^n$ را بسط داد.

۱

$$1 \quad 1 \rightarrow (a + b)^1 = 1a + 1b$$

۱ ۲ ۱

$$1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \rightarrow (a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

۱ ۴ ۶ ۴ ۱

$$1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \rightarrow (a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

نکته: برای n های بزرگ به کمک اتحاد زیر $(a + b)^n$ را بسط می‌دهیم.

$$(a + b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + \binom{n}{n-1} a^1 b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n$$

بسط دوجمله‌ای‌ها



نتایج بسط $(a+b)^n$ { دارای $n+1$ جمله است.
مجموع ضرایب 2^n است.
اگر ضریب جمله t ام و k ام برابر باشد.
 $t+k=n+2$

مثال ۱: $(a-b)^5$ را بسط دهید.

حل: کافی است در بسط $(a+b)^5$ به جای b ، $-b$ قرار دهیم.

$$(a-b)^5 = a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5$$

مثال ۲: مجموع ضرایب بسط $(2x+y)^{2n}$ از مجموع ضرایب

بسط $(x+\frac{y}{2})^n$ ، 72 واحد بیشتر است. n را بیابید.

حل: برای به دست آوردن مجموع ضرایب به جای تمام متغیرها یک در نظر می‌گیریم.

$$(2+1)^{2n} = (1+\frac{2}{1})^n + 72 \Rightarrow 3^{2n} = 3^n + 72$$

$$3^n = t \rightarrow t^2 - t - 72 = 0 \rightarrow (t-9)(t+8) = 0$$

$$\begin{cases} t=9 \rightarrow 3^n = 9 \rightarrow n=2 \\ t=-8 \rightarrow 3^n = -8 \end{cases}$$

کارت ۵

فصل ۱

ب.م.م و ک.م.م



ب.م.م و ک.م.م اعداد: ابتدا اعداد را به عامل‌های اول تجزیه می‌کنیم سپس برای محاسبه‌ی ک.م.م . ب.م.م به صورت زیر عمل می‌کنیم:

حاصل ضرب عامل‌های مشترک با توان کمتر = ب.م.م
 حاصل ضرب عامل‌های مشترک و غیر مشترک با توان بزرگ‌تر = ک.م.م
مثال ۱: ب.م.م و ک.م.م اعداد ۱۵ و ۳۵ و ۱۴۰ را بیابید.

حل:

$$\begin{aligned}
 15 &= 3 \times 5 \\
 35 &= 5 \times 7 \quad \rightarrow \\
 140 &= 2^2 \times 5 \times 7
 \end{aligned}$$

$$= 5$$

$$= 2^2 \times 3 \times 5 \times 7 = 420$$

مثال ۲: ۷۲ لیتر آب میوه، ۴۰ لیتر شیر و ۴۸ لیتر دوغ در شیشه‌هایی با حجم یکسان بسته‌بندی شده‌اند. حداقل تعداد شیشه‌ها چقدر است. (گنجایش شیشه‌ها را عدد طبیعی فرض کنید).

حل:

$$\begin{cases}
 72 = 2^3 \times 3^2 \\
 40 = 2^3 \times 5 \rightarrow \text{ب.م.م و م.م} = 2^3 = 8 \\
 48 = 2^4 \times 3
 \end{cases}$$

$$\text{تعداد شیشه‌ها} = \frac{72}{8} + \frac{40}{8} + \frac{48}{8} = 9 + 5 + 6 = 20$$



ب.م.م و ک.م.م

نکته: ب.م.م و ک.م.م چند جمله‌ای را به مانند اعداد حساب می‌کنیم.

مثال ۳: ک.م.م $a^3 - 1$ و $a^2 - 1$ را بیابید.

$$\begin{aligned} a^2 - 1 &= (a-1)(a+1) \\ a^3 - 1 &= (a-1)(a^2 + a + 1) \end{aligned} \quad \rightarrow \text{ک.م.م} = \begin{aligned} &(a-1) \times (a+1) \\ &\times (a^2 + a + 1) \end{aligned}$$

مثال ۴: ساده کنید.

$$A = \frac{x+1}{x-1} + \frac{1}{x-3} - \frac{8}{x^2 + 2x - 3}$$

حل: ک.م.م مخرج‌ها را می‌یابیم.

$$A = \frac{(x+1)(x+3) + x-1 + 8}{(x-1)(x+3)} = \frac{x^2 + 4x + 10}{x^2 + 2x - 3}$$

مثال ۵: در تساوی $\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} = \frac{8x-11}{x^2 - 3x + 2}$ و B را بیابید.

حل: طرفین را در ک.م.م مخرج‌ها یعنی $(x-1)(x-2)$ ضرب می‌کنیم.

$$A(x-2) + B(x-1) = 8x-11 \Rightarrow (A+B)x - 2A - B$$

$$= 8x-11 \Rightarrow \begin{cases} A+B=8 \\ -2A-B=-11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=3 \\ B=5 \end{cases}$$